Un facteur direct canonique de la K-théorie d'anneaux d'entiers algébriques non exceptionnels

HINDA HAMRAOUI

Résumé – Soient R un anneau d'entiers algébriques non exceptionnel au sens de [6], ne contenant pas $\sqrt{-1}$, et K son corps des fractions. Notons ξ_{2^m} une racine 2-primitive de l'unité d'ordre maximal 2^m dans $K(\sqrt{-1})$ et μ_{2^m} le groupe cyclique engendré par ξ_{2^m}. Dans [6], Harris et Segal ont donné des corps résiduels k de R tels que $\mu_{2^\infty}(R(\sqrt{-1})) \to \mu_{2^\infty}(k(\sqrt{-1}))$ soit un isomorphisme équivariant pour l'action galoisienne de $\mathbf{Z}/2$. En particulier, le groupe semi-diédral $\Delta := \mathbf{Z}/2 \ltimes \mu_{2^m}$ est un sous-groupe commun à $\mathbf{GL}(2,k)$ et $\mathbf{GL}(2,R)$. Aux inclusions naturelles $\Delta \to \mathbf{GL}(2,k)$ et $\Delta \to \mathbf{GL}(2,R)$ sont associées des applications $\phi_k : \mathbf{B}(\Sigma_\infty \int \Delta)^+ \to \mathbf{BGL}(k)^+$ et $\phi_R : \mathbf{B}(\Sigma_\infty \int \Delta)^+ \to \mathbf{BGL}(R)^+$. Notons $L\phi_k$ et $L\phi_R$ les applications induites sur les localisés en 2. Soit s une section à droite quelconque de $L\phi_k$, voir [6]. Le but de cette Note est d'étendre les résultats de [3, theorem 4.1 (2)] au cas où R est non exceptionnel ne contenant pas $\sqrt{-1}$, c'est-à-dire de démontrer que le triangle

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B}(\Sigma_\infty \int \Delta)^+_2 \arrow[r, "L\phi_k"] \arrow[dr, "(L\phi_R)"'] & \mathbf{BGL}(k)^+_2 \arrow[d, "(L\phi_R \circ s)"] \\ & \mathbf{BGL}(R)^+_{(2)} \end{tikzcd} \tag{1}$$

est commutatif à homotopie près.

A canonical direct summand of the K-theory of non-exceptional rings of algebraic integers

Abstract – Let R be a ring of algebraic integers, non-exceptional in the sense of [6] and not containing $\sqrt{-1}$, and let K be its quotient field. Let ξ_{2^m} be a 2-primary root of unity of maximal order 2^m in $K(\sqrt{-1})$ and μ_{2^m} the cyclic group generated by ξ_{2^m}. In [6], Harris and Segal have given residue class fields k of R such that $\mu_{2^\infty}(R(\sqrt{-1})) \to \mu_{2^\infty}(k(\sqrt{-1}))$ is an isomorphism, equivariant for the Galois action of $\mathbf{Z}/2$. In particular, the dihedral group $\Delta : \mathbf{Z}/2 \ltimes \mu_{2^m}$ is a common subgroup to $\mathbf{GL}(2,k)$ and $\mathbf{GL}(2,R)$.

The natural embeddings $\Delta \to \mathbf{GL}(2,k)$ and $\Delta \to \mathbf{GL}(2,R)$ induce maps $\phi_k : \mathbf{B}(\Sigma_\infty \int \Delta)^+ \to \mathbf{BGL}(k)^+$, $\phi_R : \mathbf{B}(\Sigma_\infty \int \Delta)^+ \to \mathbf{BG}L(R)^+$ and corresponding maps $L\phi_k$, $L\phi_R$ after localisation at 2. Let s be any right inverse of $L\phi_k$ see [6]. The aim of this Note is to extend the results of [3, theorem 4.1 (2)] to the case where R is non exceptional and $\sqrt{-1}$ does not belong to R, i.e. to prove that the triangle (1) above is homotopy commutative.

Théorème 1 *Le triangle* (1) *est commutatif à homotopie près.*

Corollaire 2 *Pour toutes sections s, s' de l'application $L\phi_k$, les applications $L\phi_R \circ s$ et $L\phi_R \circ s'$ sont homotopes.*

Remarque 3 *En passant aux groupes d'homotopie dans le corollaire précédent, on conclut que le facteur direct de $K_n(R) \otimes \mathbf{Z}_{(2)}$ [6, corollaire 3.2] est indépendant de la section choisie dans le cas où l'anneau est non exceptionnel ne contenant pas $\sqrt{-1}$.*

La stratégie suivie dans cette Note est celle développée dans [3] par Dwyer, Friedlander et Mitchell pour un anneau contenant $\sqrt{-1}$. En se fondant essentiellement sur les résultats de Kahn sur les représentations linéaires irréductibles et primitives d'un 2-groupe sur un corps non exceptionnel ne contenant pas $\sqrt{-1}$ [7], le théorème de Rector [9], la théorie de Morita dans le cas linéaire et un théorème de May [8], on prouvera le théorème 1.

Abridged English Version

Let $S = R[1/2]$, $S' = S[\mu_{2^n}]$ and ρ the S-representation of Δ described bellow. Using the well-known listing of the sub-groups of Δ and [7, sections 8.1, 8.3], we prove in corollaries 10 and 11 that for $\theta : H \to \Delta$, $g : H \to \Delta$, $f : H \to \mu_{2^\infty}(S')$, the S'-projectif-module $S[\sqrt{-1}] \otimes_{SH} S'$ is S'- free and the-S-projectif-module $S[\sqrt{-1}] \otimes_{SH} S[\sqrt{-1}]$ is S-free. To each finite group G and commutative unitary ring D, one associates the following Grothendieck groups: the Burnside ring $\mathbf{A}(G)$ [8], the generalised Burnside group $\mathbf{A}(G, \Delta)$ [3] and the ring of D- linear representations $\mathbf{R}_D(G)$ [10]. The groups $\mathbf{A}(G, \Delta)$, $\mathbf{R}_D(G)$ are $\mathbf{A}(G)$-modules. Denote by $\mathbf{R}_D(G)^{(2)}$ the sub-$\mathbf{A}(G)$-module of $\mathbf{R}_D(G)$ of elements of even D-rank. The D-module $D[\sqrt{-1}]$ is a left $D[\Delta]$-module through the scalar multiplication action of μ_{2^m} and the Galois action of $\mathbf{Z}/2$. This induces the $\mathbf{A}(G)$-morphism $\psi_D : \mathbf{A}(G, \Delta) \to \mathbf{R}_D(G)^{(2)}$ defined by $\psi_D(G \times_\theta \Delta) = D[G] \otimes_{D[H]} D[\sqrt{-1}]$ where $\theta : H \to \Delta$. Thanks to [7, proposition 7.3, section 8], we prove in proposition 12 that for every simple $F[G]$-module V, $F = K, k$, with $F' = End_{FG}V$ and G a 2-group there exists a subgroup H of G and a homomorphism $f : H \to \Delta$ such that $[V] = [FG \otimes_{FH} F(\sqrt{-1})]$ or $[V] = [FG \otimes_{FH} F]$ if $F' = F$ or $f : H \to \mu_{2^\infty}(F')$ such that $[V] = [FG \otimes_{FH} F']$ if $F' \neq F$. Using Morita theory and the localisation exact sequence in K-theory, we prove theorem 15 asserting that the kernels of ψ_k and ψ_R are equal. We then deduce, thanks to isomorphisms due to May [8] and Rector [9], the proof of theorem 1.

Le groupe semi-diédral Δ (voir le résumé).

L' anneau D peut désigner R, $S = R[1/2]$, K ou k. Le D-module $D[\sqrt{-1}]$ est muni d'une structure de $D[\Delta]$-module à gauche via l'action de μ_{2^m} par multiplication scalaire et l'action galoisienne de $\mathbf{Z}/2$ dont l'élément non trivial est noté σ. Dans le cas non exceptionnel ne contenant pas $\sqrt{-1}$ [7], σ envoie ξ_{2^m} sur $\xi_{2^m}^{-1+2^{m-1}}$ et le produit est défini par $(1, \xi_{2^m}^k)(\sigma, \xi_{2^m}^t) = (\sigma, \xi_{2^m}^{k(-1+2^{m-1})+t})$. Les éléments $(1, \xi_{2^m}^t)$ et $\xi_{2^m}^t$ ont le même ordre, alors que les éléments $(\sigma, \xi_{2^m}^{2t+1})$ et $(\sigma, \xi_{2^m}^{2t})$ont pour ordres respectifs 2 et 4. Les sous-groupes de Δ sont ceux inclus dans $\{(1,1), (1,-1), (\sigma, \xi_{2^m}^{2t}), (\sigma, -\xi_{2^m}^{2t})\}$ et ceux contenant un élément d'ordre 4 c-a-d Δ, ou diédraux, ou quaternioniens généralisés, ou cycliques.

Notons ρ la S-représentation de Δ décrite dans le résumé et $j : \Delta_1 \to \Delta$ un sous-groupe de Δ. Si $x \in S[\sqrt{-1}]$, on note $h * x \in S[\sqrt{-1}]$ l'image de x par l'action de $h \in \Delta_1$.

Soit ξ une racine de l'unité d'ordre 2^r: on définit $L_\xi^+ = \{x \in S[\sqrt{-1}], (\sigma, \xi^2) * x = x\}$, $L_\xi^- = \{x \in S[\sqrt{-1}], (\sigma, \xi^2) * x = -x\}$.

Lemme 4 *a) Si $r = 1$, $L_\xi^+ = S$ et $L_\xi^- = iS$. b) Si $r = 2$, $L_\xi^+ = iS$ et $L_\xi^- = S$. c) Si r est compris entre 3 et $m-1$, $L_\xi^+ = \xi^{-1}S$ et $L_\xi^- = \xi^{-1-2^{r-2}}S$. d)Si $r = m$, $L_\xi^+ = \xi^{-1+2^{m-2}}S$ et $L_\xi^- = \xi^{-1}S$. Dans tous ces cas, on a $L_\xi^+ \oplus L_\xi^- = S[\sqrt{-1}]$.*

Preuve. Cela se démontre par un calcul au cas par cas.

Corollaire 5 *Si Δ_1 est un sous-groupe de $\{(1,1), (1,-1), (\sigma, \xi_{2^m}^{2t}), (\sigma, -\xi_{2^m}^{2t})\}$, alors: $j^*(\rho) = M_1 \oplus M_2$ avec M_1 et M_2 deux $S[\Delta_1]$-modules S-libres de rang 1.*

Lemme 6 *Si Δ_1 contient des éléments d'ordre 4 alors: $j^*(\rho) \otimes_S K$ est irréductible et pour tout x dans $S[\sqrt{-1}]$, il existe h_t dans Δ_1 et λ_t dans S tels que $x = \sum \lambda_t(h_t * 1)$.*

Preuve. Δ_1 est Δ, diédral, quaternionien généralisé ou cyclique, $j^*(\rho)$ n'est autre que la représentation définie dans [7, sections 8.1, 8.3], donc irréductible. Soit $x = x_1 + ix_2 \in S[\sqrt{-1}]$, $x = x_1(1*1) + x_2(i*1)$, si $i \in \Delta_1$. Sinon, on a $S[\sqrt{-1}] = S[\xi^{-1}]$ pour toute ξ une racine primitive et donc $x = a_1(1*1) + a_2((\sigma,\xi)*1)$, $a_1, a_2 \in S$. $\square$

Notons $K(\sqrt{-1})$ la K-représentation de Δ décrite ci-dessus. On définit: 1)$K(\sqrt{-1})^{opp}$ comme la K-représentation à droite de Δ_1 associée à $K(\sqrt{-1})$ avec l'action $v * h = h^{-1} * v$. 2)$K(\sqrt{-1})^d = Hom_K(K(\sqrt{-1})^{opp}, K)$ munie de sa structure induite de $K(\Delta_1)$-module à gauche .

Remarque 7 *Le K-isomorphisme: $K(\sqrt{-1})^d \to K(\sqrt{-1})$ envoyant $f$sur v de telle manière que $f(u) = Tr_{K(\sqrt{-1})/K}(vu)$ pour tout $u \in K(\sqrt{-1})$, induit sur $K(\sqrt{-1})$ une structure de $K\Delta_1$-module à gauche: si $(1,i) \in \Delta_1$ ou $(\sigma,\xi) \in \Delta_1$, on a pour tout $v \in K(\sqrt{-1})$, $(1,i)*v = iv$ et $(\sigma,\xi)*v = \xi\bar{v}$.*

Lemme 8 *Si Δ_1 est le sous-groupe cyclique engendré par $(1,i)$ ou (σ,ξ), ξ une racine primitive, alors: $S[\sqrt{-1}] \otimes_{S\Delta_1} S[\sqrt{-1}]$ est 0 ou $S[\sqrt{-1}]$.*

Preuve. On a les monomorphismes suivants:

$$S[\sqrt{-1}] \otimes_{S\Delta_1} S[\sqrt{-1}] \to K(\sqrt{-1}) \otimes_{K\Delta_1} K(\sqrt{-1}) \to Hom_{K\Delta_1}(K(\sqrt{-1})^d, K(\sqrt{-1})).$$

D'après le lemme de Schur, le dernier groupe est 0 sauf si Δ_1 opère comme dans la remarque 7. Si $(1,i) \in \Delta_1$, l'application $S[\Delta_1] \to S[\sqrt{-1}]$ à $\Sigma s_t h_t$ on associe $\Sigma s_t j(h_t)$ est surjective et le morphisme $S[\sqrt{-1}] \otimes_{S\Delta_1} S[\sqrt{-1}] \to S[\sqrt{-1}]$ associant xy à $x \otimes y$ est un isomorphisme. 2) Si $(\sigma,\xi) \in \Delta_1$, $(\sigma,\xi)*v = P(i*v)P^{-1}$, P une matrice inversible à coefficients dans S. Notons $<(1,i)>$ le groupe cyclique engendré par $(1,i)$, on a $S[\sqrt{-1}] \otimes_{S<(1,i)>} S[\sqrt{-1}] \to S[\sqrt{-1}] \otimes_{S\Delta_1} S[\sqrt{-1}]$ un isomorphisme, ce qui achève la preuve.

Lemme 9 *Si Δ_1 est un sous-groupe non cyclique de Δ, alors: $S[\sqrt{-1}] \otimes_{S\Delta_1} S[\sqrt{-1}]$ est 0 ou S.*

Preuve. Si Δ_1 est non cyclique, $End_{K\Delta_1}K(\sqrt{-1}) = K$ [7]et $K(\sqrt{-1}) \otimes_{K\Delta_1} K(\sqrt{-1}) \stackrel{Tr(xy)}{\to} K$ est un isomorphisme. L'inclusion $S \to K$ induit le carré commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} K(\sqrt{-1}) \otimes_{K\Delta_1} K(\sqrt{-1}) & \xrightarrow{Tr(xy)} & K \\ \uparrow & & \uparrow \\ S[\sqrt{-1}] \otimes_{S\Delta_1} S[\sqrt{-1}] & \xrightarrow{Tr(xy)} & S \end{array}$$

Comme $S[\sqrt{-1}] \otimes_{S\Delta_1} S[\sqrt{-1}] \stackrel{Tr(xy)}{\to} S$ est déja surjective, c'est un isomorphisme. □

Soient $S' = S[\mu_{2^n}]$ et H un groupe fini.

Corollaire 10 *Soient $\theta : H \to \Delta$, $f : H \to \mu_{2^\infty}(S')$. Alors tout S'-module projectif de la forme $S[\sqrt{-1}] \otimes_{SH} S'$ est S'- libre.*

Preuve. Soit $\Delta_1 = \theta(H)$. Supposons que Δ_1 contient un élément d'ordre 4: d'après le lemme 6, l'application $S' \to S[\sqrt{-1}] \otimes_{S\Delta_1} S'$ associant à x l'élément $1 \otimes_{S\Delta_1} x$ est surjective. Comme $S[\sqrt{-1}] \otimes_{S\Delta_1} S'$ est S'-projectif, c'est 0 ou S'. Sinon, d'après le corollaire 5, $S[\sqrt{-1}] \otimes_{S\Delta_1} S' = M_1 \otimes_{S\Delta_1} S' \oplus M_2 \otimes_{S\Delta_1} S'$. Donc S'-libre, par le même argument. □

Corollaire 11 *Pour tout $\theta : H \to \Delta$, $f : H \to \Delta$, tout S-module projectif de la forme $S[\sqrt{-1}] \otimes_{SH} S[\sqrt{-1}]$ est S-libre.*

Preuve. D'après le corollaire 10, on peut supposer que $\theta(H)$ ou $f(H)$ contient un élément d'ordre 4. En particulier, les représentations $j^*(\rho) \otimes_S K$ et $k^*(\rho) \otimes_S K$ sont irréductibles, avec $j : \theta(H) \to \Delta$ et $k : f(H) \to \Delta$. Compte tenu du monomorphisme $S[\sqrt{-1}] \otimes_{SH} S[\sqrt{-1}] \to K(\sqrt{-1}) \otimes_{KH} K(\sqrt{-1})$, on peut supposer que $j^*(\rho) \otimes_S K$ est isomorphe à la duale de $k^*(\rho) \otimes_S K$. On conclut grâce aux lemmes 8 et 9. □

Des groupes de Grothendieck

À tout groupe G, on associe comme dans [10], [8] et [3]

- La catégorie des G-ensembles à gauche finis. Son groupe de Grothendieck est noté $\mathbf{A}(G)$ (anneau de Burnside de G); c'est un anneau commutatif unitaire pour la loi $[P].[Q] = [P \times Q]$.

- La catégorie des G-ensembles à gauche finis munis d'une action à droite libre de Δ. Son groupe de Grothendieck est noté $\mathbf{A}(G, \Delta)$ (groupe de Burnside généralisé); c'est un $\mathbf{Z}$-module libre de base les $G \times_\theta \Delta = \{(g,t) \in G \times \Delta, (gk,t) = (g, \theta(k)t)\}$ où $\theta : H \to \Delta$ est un homomorphisme d'un sous-groupe H de G vers Δ.

- La catégorie des $D[G]$-modules à gauche de type fini D-projectifs. Son groupe de Grothendieck est noté $\mathbf{R}_D(G)$ (représentations linéaires): il a une structure d'anneau commutatif unitaire muni du produit tensoriel sur D. Désignons par $\mathbf{R}_D(G)^{(2)}$ le sous-$\mathbf{A}(G)$-module de $\mathbf{R}_D(G)$ formé par les éléments de D-rang pair.

Le groupe $\mathbf{A}(G, \Delta)$ est un $\mathbf{A}(G)$-module pour le produit $[P].[Q] = [P \times Q]$, où G opère diagonalement sur $P \times Q$ et Δ opère uniquement sur le facteur Q. La loi $[P].[M] = [DP \otimes_D M]$ donne à $\mathbf{R}_D(G)$ une structure de $\mathbf{A}(G)$-module, laissant stable $\mathbf{R}_D(G)^{(2)}$ et dont le complété $\mathbf{I}(G)$-adique est noté $\widehat{\mathbf{R}}_D(G)$.

De plus la structure de $D[\Delta]$-module de $D[\sqrt{-1}]$, donne naissance à un $\mathbf{A}(G)$-morphisme $\psi_D : \mathbf{A}(G,\Delta) \to \mathbf{R}_D(G)^{(2)}$ défini par $\psi_D(G \times_\theta \Delta) = D[G] \otimes_{D[H]} D[\sqrt{-1}]$, où $\theta : H \to \Delta$. L'homomorphisme résiduel $R \to k$ induit le triangle commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}(G,\Delta) \arrow[rr, "\psi_R"] \arrow[dr, "\psi_k"'] & & \mathbf{R}_R(G)^{(2)} \arrow[dl] \\ & \mathbf{R}_k(G)^{(2)} & \end{tikzcd}$$

Soit F un corps non exceptionnel, par exemple $F = K$ ou k.

Proposition 12 *Soient G un 2-groupe et V un FG-module simple non trivial de corps d'endomorphismes F'. Alors, F' est de la forme $F(\mu_{2^n})$, il existe un sous-groupe H de G tel que*

- *si $F' = F$ il existe $f : H \to \Delta$ tels que $[V] = [FG \otimes_{FH} F(\sqrt{-1})]$ ou $[V] = [FG \otimes_{FH} F]$;*

- *si $F' \neq F$ il existe $f : H \to \mu_{2^\infty}(F')$ tel que $[V] = [FG \otimes_{FH} F']$.*

Preuve. On peut supposer V fidèle. D'après [7, proposition 7.3], il existe un sous-groupe H de G de rang normal 1 et une représentation irréductible W de H sur F tels que $[V] = [FG \otimes_{FH} W]$ et $End_{FG}V = End_{FH}W = F(\mu_{2^n})$.

D'après [7, tableau fin section 8], on a deux cas: Si $F' = F$ alors il existe $f : H \to \Delta$ tels que $[W] = [F(\sqrt{-1})]$ ou $[W] = [F]$, d'après [7, théorème 9.8]. Si $F' \neq F$ alors il existe un sous groupe H' d'indice 2 de H, $f : H' \to \mu_{2^\infty}(F')$ tels que $[W] = [FH \otimes_{FH'} F']$. $\square$

Corollaire 13 *Pour tout 2-groupe G, le morphisme ψ_F est surjectif scindé.*

Preuve. La surjectivité se démontre en utilisant la proposition 12. Dans cette Note, nous n'aurons besoin que de savoir que ψ_F est scindé sur son image. C'est clair puisque $\mathbf{R}_F(G)$ est un $\mathbf{Z}$-module libre. $\square$

Soit V un KG-module simple de corps d'endomorphismes K'. On définit a) $[V^S] = [SG \otimes_{SH} S[\sqrt{-1}]]$ si $[V] = [KG \otimes_{KH} K(\sqrt{-1})]$ et b) $[V^S] = [SG \otimes_{SH} S']$ si $[V] = [KG \otimes_{KH} K']$. On a $End_{KG}[V^S] = S$ dans le cas a) et $End_{KG}[V^S] = S'$ dans le cas b).

Lemme 14 *Le module V^S est S-libre dans le cas a) et S'-libre dans le cas b) de même rang que V.*

Preuve. Dans le cas a), $[V^S] = [SG \otimes_{SH} S[\sqrt{-1}]] = [\sum_{G/H} S[\sqrt{-1}]]$, donc S-libre. Dans le cas b), $[V^S] = [SG \otimes_{SH} S'] = [\sum_{G/H} S']$, donc S'-libre. Dans les deux cas, $V^S \otimes_S K = V$. $\square$

Soient $V_1 \dots V_N$ la liste complète des classes d'isomorphisme des $K[G]$-modules simples à gauche, $K_i = End_{KG} V_i$, O_{K_i} l'anneau des entiers de K_i et $S_i = O_{K_i}[1/2]$. Il existe des sous-groupes $H_1 \dots H_N$, des KH_i-modules W_i et des homomorphismes $f_i : H_i \to \Delta$ ou $f_i : H_i \to \mu_{2^\infty}(K_i)$ tels que $[V_i] = [KG \otimes_{KH_i} W_i]$ comme dans la proposition 12. Notons $W_i^S = S[\sqrt{-1}]$ si $W_i = K(\sqrt{-1})$, $W_i^S = S_i$ si $W_i = K_i$ et $[V_i^S] = [SG \otimes_{SH_i} W_i^S]$

Comme le corps K est de caractéristique nulle, l'anneau $K[G]$ est semi-simple et on a l'isomorphisme $K[G] \xrightarrow{\sim} \prod_i End_{K_i}(V_i)$. Comme l'ordre de G est inversible dans S, on a aussi l'isomorphisme $S[G] \xrightarrow{\sim} \prod_i End_{S_i}(V_i^S)$ [3, proof of proposition 3.4]. En tensorisant par k sur S, on a l'isomorphisme $k[G] \xrightarrow{\sim} \prod_i End_{k_i}(V_i^k)$. De plus, le carré suivant est commutatif:

$$
\begin{array}{ccc}
K[G] & \longrightarrow & \prod_i End_{K_i}(V_i) \\
{\scriptstyle K\otimes_S}\uparrow & & \uparrow \\
S[G] & \longrightarrow & \prod_i End_{S_i}(V_i^S) \\
{\scriptstyle k\otimes_S}\downarrow & & \downarrow \\
k[G] & \longrightarrow & \prod_i End_{k_i}(V_i^k)
\end{array} \tag{2}
$$

Notons $K_0(D)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des D-modules à gauche projectifs de type fini. Considérons les morphismes $K_0(End_{K_i}(V_i) \to K_0(K_i)$ (respectivement $K_0(End_{S_i}(V_i^S)) \to K_0(S_i)$ et $K_0(End_{k_i}(V_i^k)) \to K_0(k_i))$ associant au $End_{K_i}(V_i)$-module $[M]$ (respectivement $End_{S_i}(V_i^S)$-module $[N]$ et $End_{k_i}(V_i^k)$-module $[P]$) le K_i-module $[V_i \otimes_{End_{K_i}(V_i)} M]$ (respectivement le S_i-module $[V_i^S \otimes_{End_{S_i}(V_i^S)} N]$ et le k_i-module $[V_i^k \otimes_{End_{k_i}(V_i^k)} P]$). Par la théorie de Morita, ce sont des isomorphismes. Le diagramme (2) donne le diagramme commutatif suivant, dont les morphismes horizontaux sont des isomorphismes définis par $f_i^K[M] = [M \otimes_{K[G]} V_i]$, $f_i^S[N] = [N \otimes_{S[G]} V_i^S]$ et $f_i^k[P] = [P \otimes_{k[G]} V_i^k]$:

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{R}_K(G) & \xrightarrow{(f_i^K)} & \prod K_0(K_i) & \xrightarrow{\prod rg_i^K} & \mathbf{Z}^N \\
{\scriptstyle K\otimes_S}\uparrow & & \uparrow & & \\
\mathbf{R}_S(G) & \xrightarrow{(f_i^S)} & \prod K_0(S_i) & & \\
{\scriptstyle k\otimes_S}\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbf{R}_k(G) & \xrightarrow{(f_i^k)} & \prod K_0(k_i) & \xrightarrow{\prod rg_i^k} & \mathbf{Z}^N
\end{array} \tag{3}
$$

Théorème 15 *Pour tout 2-groupe G, le noyau de ψ_R contient celui de ψ_k.*

Preuve. On a la suite exacte de localisation

$$
\bigoplus_{m/2} \mathbf{R}'_{R/m}(G) \to \mathbf{R}_R(G) \xrightarrow{\sigma} \mathbf{R}_S(G) \to 0
$$

avec $\mathbf{R}'_D(G)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $D(G)$-modules à gauche de type fini. Comme $\operatorname{Im}\psi_R$ ne rencontre pas $\operatorname{Ker}\sigma$ [3, proof of proposition 3.5], d'après le diagramme (3), il suffit de prouver que $\operatorname{Ker}\psi_S$ contient $\operatorname{Ker}\psi_K$. Soient $\theta : H \to \Delta$ et $P = (G \times_\theta \Delta)$, on a:

$$f_i^S(\psi_S(P)) = \psi_S(P) \otimes_{S[G]} V_i^S = S[\sqrt{-1}] \otimes_{S\Delta} S[P] \otimes_{SH_i} W_i^S$$

Ceci prouve que $f_i^S(\psi_S(P))$ ne dépend que de la structure de P en tant que (H_i, Δ)-ensemble. En décomposant P en union disjointe d'indécomposables $H_i \times_{\theta'} \Delta$ avec $\theta' : H'_i \to \Delta$ et $H'_i \subset H_i$ on a : $[f_i^S(\psi_S(H_i \times_{\theta'} \Delta)) = (S[\sqrt{-1}] \otimes_{SH'_i} SH_i) \otimes_{SH_i} W_i^S = S[\sqrt{-1}] \otimes_{SH'_i} W_i^S]$ avec H'_i qui opère sur $S[\sqrt{-1}]$ via θ' et sur W_i^S via la composée de l'inclusion $H'_i \to H_i$ et de f_i. D'après les corollaires 10 et 11, $f_i^S(\psi_S(H_i \times_{\theta'} \Delta))$ est un S_i-module libre. Comme $(- \otimes_S K)$ injecte dans $K_0(K_i)$ le sous-groupe de $K_0(S_i)$ engendré par les S_i-modules libres et que $(- \otimes_S K) f_i^S(\psi_S) = f_i^K(\psi_K)$, on conclut que les noyaux de ψ_K et ψ_S sont égaux. □

Remarque 16 *Soit σ une section quelconque à droite de ψ_k, le théorème 15 implique que $\psi_R \circ \sigma \circ \psi_k = \psi_R$. Comme ψ_k est surjective et que ψ_k, ψ_R sont des $\mathbf{A}(G)$-morphismes, $\psi_R \circ \sigma$ est aussi un $\mathbf{A}(G)$-morphisme.*

Rappelons que $\mathbf{R}_k(G)$ est un anneau augmenté par l'homorphisme k-rang, d'idéal d'augmentation $\mathbf{I}_k(G)$, on constate que:

Proposition 17 *Les complétés $\mathbf{I}_k(G)$-adique et $\mathbf{I}(G)$-adique de $\mathbf{R}_k(G)$ sont isomorphes.*

Preuve. D'après [5, proposition 2.6] qui est essentiellement fondée sur [4, theorem 4.5]. □

Remarque 18 *Curieusement, ce point n'est pas traité dans [3].*

Rappelons que dans [3] on a défini des $\mathbf{A}(G)$-morphismes

$$\alpha : \mathbf{A}(G, \Delta) \to [\mathbf{B}G, \mathbf{B}(\Sigma_\infty \int \Delta)^+ \times \mathbf{Z}]$$

$$\beta_D : \mathbf{R}_D(G) \to [\mathbf{B}G, \mathbf{BGL}(D)^+ \times K_0(D)].$$

Ils se factorisent à travers les complétés $\mathbf{I}(G)$-adique de $\mathbf{A}(G,\Delta)$ et $\mathbf{R}_k(G)$ en des isomorphismes: pour le premier, cela résulte de [8] et pour le second, de [9] et de la proposition 17. Notons $\widehat{\mathbf{R}_k(G)^{(2)}}$ le complété $\mathbf{I}(G)$-adique de $\mathbf{R}_k(G)^{(2)}$. C'est un sous-groupe de $\widehat{\mathbf{R}}_k(G)$ [1] qu'on peut envoyer injectivement par $\hat{\beta}_k$ dans $[\mathbf{B}G, \mathbf{BGL}(k)^+ \times \mathbf{Z}]$.

De plus, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{\mathbf{R}_k(G)^{(2)}} & \xrightarrow{\hat{\beta}_k} & [\mathbf{B}G, \mathbf{BGL}(k)^+] \times \mathbf{Z} \\
\hat{\psi}_k \Big\uparrow & & \phi_{k*} \Big\uparrow \\
\hat{\mathbf{A}}(G,\Delta) & \xrightarrow{\hat{\alpha}} & [\mathbf{B}G, \mathbf{B}(\Sigma_\infty \int \Delta)^+] \times \mathbf{Z} \\
\hat{\psi}_R \Big\downarrow & & \phi_{R*} \Big\downarrow \\
\widehat{\mathbf{R}}_R(G) & \xrightarrow{\hat{\beta}_R} & [\mathbf{B}G, \mathbf{BGL}(R)^+ \times K_0(R)]
\end{array} \qquad (4)$$

Rappelons les trois propositions suivantes:

Proposition 19 *Soit un* 2*-groupe* G*,* Y *un espace de lacets infini,* $Y_{(2)}$ *son localisé en* 2*. Alors l'application naturelle* $Y \to Y_{(2)}$ *induit une bijection* $[\mathbf{B}G, Y] \to [\mathbf{B}G, Y_{(2)}]$ *.*

Preuve. [3, proposition 4.7]. □

Proposition 20 *Soit un* 2*-sous groupe* H *de Sylow de* G*. Alors l'application* $BH_{(2)} \to BG_{(2)}$ *induite par l'inclusion de* H *dans* G *est une rétraction d'homotopie.*

Preuve. [3, proposition 4.4]. □

Proposition 21 *Soient* l *un nombre premier et* X *un CW complexe et* $X_0 \subset X_1 \ldots \subset X_n \subset X_{n+1} \ldots \subset X$ *une filtration de* X *par des sous-complexes* X_n*. Soient* Y *et* Z *deux espaces de lacets infinis. Supposons que les groupes* $\bar{H}^j(X_i, \mathbf{Z}_{(l)})$ *soient finis pour tout* i, j*, et que les groupes d'homotopie de* Y *et de* Z *sont des* $\mathbf{Z}_{(l)}$*-modules de type fini. Alors, étant donné* $f : X \to Z$ *et* $g : Y \to Z$ *, il existe* $h : X \to Y$ *avec* $g.h \sim f$ *si et seulement si pour chaque* n *il existe* $h_n : X_n \to Y$ *telle que* $g.h_n \sim f_n$

Preuve. [3, proposition 4.2]. □

Remarque 22 *1) D'après [3, remarque 4.3], avec les mêmes hypothèses sur X et Z, deux applications $f, g : X \to Z$ sont homotopes si et seulement si $g_n \sim f_n$ pour chaque n.*
2) On va appliquer cette première remarque dans le cas où $l = 2$, $X = (\mathbf{B}\Sigma_\infty \int \Delta^+)_{(2)}$ et $Z = \mathbf{BGL}(R)^+_{(2)}$ [3, remarque 4.3].

Preuve du théorème 1.
Donnons-nous une section quelconque s de $L\phi_k$. Soit G un 2-sous-groupe de Sylow de $\Sigma_m \int \Delta$. Les inclusions naturelles $G \to \Sigma_m \int \Delta \to \Sigma_\infty \int \Delta$ induisent des applications $\mathbf{B}G \xrightarrow{\bar{i}} (\mathbf{B}\Sigma_m \int \Delta^+)_{(2)} \xrightarrow{\bar{f}_m} (\mathbf{B}\Sigma_\infty \int \Delta^+)_{(2)}$. Soient $\bar{f} = \bar{f}_m \circ \bar{i}$, $\bar{g} = s \circ L\phi_k \circ \bar{f}$ et $\bar{g}_m = s \circ L\phi_k \circ \bar{f}_m$. Par la proposition 19, $\bar{f}$ et $\bar{g}$ se relèvent en $f, g : \mathbf{B}G \to \mathbf{B}\Sigma_\infty \int \Delta^+$. Il existe a et b dans $\hat{\mathbf{A}}(G, \Delta)$ respectivement envoyés par $\hat{\alpha}$ sur $([f], 0)$ et $([g], 0)$. Comme $L\phi_k \circ \bar{g}$ et $L\phi_k \circ \bar{f}$ sont homotopes, d'après la proposition 19 on a $\phi_{k*}[g] = \phi_{k*}[f]$. Comme $\hat{\beta}_k$ est injective, et d'après la commutativité dans le diagramme (4), on a $\hat{\psi}_k(a) = \hat{\psi}_k(b)$. D'après le théorème 15 et l'exactitude du foncteur complétion, on a $\hat{\psi}_R(a) = \widehat{\psi_R \sigma} \hat{\psi}_k(a) = \widehat{\psi_R \sigma} \hat{\psi}_k(b) = \hat{\psi}_R(b)$, où σ est une section à droite de ψ_k. La commutativité du diagramme (4) implique que $\phi_{R*}[f] = \phi_{R*}[g]$. D'après la proposition 19, $L\phi_R \circ \bar{f}$ et $L\phi_R \circ \bar{g}$ sont homotopes et donc $L\phi_R \circ L\bar{f}$ et $L\phi_R \circ L\bar{g}$ sont homotopes, $L\bar{f}$ et $L\bar{g}$ induites par $\bar{f}$ et $\bar{g}$ à $BG_{(2)}$. D'après la proposition 20, $L\phi_R \circ \bar{f}_m$ et $L\phi_R \circ \bar{g}_m$ sont homotopes. Donc $L\phi_R$ et $L\phi_R \circ s \circ L\phi_k$ sont homotopes d'après la remarque 22.

Références bibliographiques

[1] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1969).

[2] W. A. Adkins, S. H. Weintraub, Algebra an approch via module theory, Graduate Texts in Mathematics **136**, Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin.

[3] W. G. Dwyer, E. M. Friedlander, S. A. Mitchell, *the generalised Burnside ring and the K-theory of ring with roots of unity*, K-theory **6** (1992), 285–300.

[4] J. P. Greenlees, J. P. May *Completions of G-spectra at ideals of the Burnside ring*, London Math. Soc. Lect. Notes Series **176**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992, 145–178.

[5] H. Hamraoui, B. Kahn *Analogues orthogonal et symplectique d'un théorème de Rector*, prépublication, 2000.

[6] B. Harris, G. Segal, *K_i-groups of rings of algebraic integers*, Annals of Math. **101** (1975), 20–33.

[7] B. Kahn, *Représentations orthogonales primitives sur un corps de caractéristique différente de* 2, prépublication, 2000.

[8] J. P. May, *Stable maps between classifying spaces*, Contemporary Math. Vol **37**, American Math. Soc, Providence, 1985, 121–129.

[9] D. Rector, *Modular characters and K-theory with coefficients in a finite field*, J. Pure and Applied Algebra **4** (1978), 135–158.

[10] J. P. Serre , Linear representations of finite groups, Graduate Texts in Mathematics **42**, Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin.

Hinda Hamraoui, Université Hassan II, Faculté des Sciences 1, Km 8, route El Jadida, BP 5366 Maârif, Casablanca, Maroc. Adresse électronique: `hamraoui@facsc-achok.ac.ma`