Un isomorphisme motivique entre deux variétés homogènes projectives sous l'action d'un groupe de type G_2*

Jean-Paul Bonnet

2003

Résumé

Dans tout cet article, k désigne un corps de caractéristique différente de 2 et par variété nous désignons un k-schéma séparé et de type fini.

L'objet du présent article est d'étudier $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$, les variétés homogènes projectives associées à chacune des deux racines d'un groupe de type G_2. La première d'entre elles, $\mathcal{X}(\alpha_1)$, est une quadrique projective de dimension 5 associée à une voisine de Pfister et l'autre, $\mathcal{X}(\alpha_2)$, est une variété de Fano (de genre 10). Ces deux variétés ne sont pas isomorphes, pourtant elles le deviennent en tant qu'objets d'une catégorie plus large, à savoir la catégorie des correspondances (et par conséquent également dans la catégorie des motifs de Chow). Nous établissons que ce résultat est vrai que les variétés soient déployées ou non.

En première partie, nous rappelons quelques résultats classiques sur les algèbres d'octonions et construisons un modèle d'algèbre d'octonions déployée. En seconde partie, étape importante de notre travail, nous construisons une structure cellulaire de $\mathcal{X}(\alpha_2)$ lorsqu'elle est déployée. C'est également dans cette partie que nous déterminons la structure de l'anneau de Chow déployé de la variété $\mathcal{X}(\alpha_2)$. Enfin, en troisième partie, après avoir introduit nos notations et rappelé les résultats nécessaires sur la catégorie des correspondances, nous établissons l'isomorphisme motivique en toute généralité.

Table des matières

*2000 *Mathematics Subject Classification.* 14C95, 14F42, 20G15.

Première partie
Rappels sur les algèbres d'octonions

1 Généralités

Pour commencer, nous rappelons quelques propriétés sur les algèbres à composition en général et les octonions en particulier.

Pour un exposé plus complet, nous vous conseillons la lecture de [SV] dont la plupart des résultats suivants sont tirés.

Définition 1. *Soit C une algèbre unitaire d'unité 1, non nécessairement associative et telle qu'il existe, sur C, une forme quadratique q non dégénérée qui permette la composition, i.e. telle que*

$$\forall x, y \in C \qquad q(xy) = q(x)q(y).$$

Une telle algèbre C est appelée ***algèbre à composition****.*

Remarque 1. *On verra plus loin (cf. corollaire 1) que la forme quadratique q est unique.*

On désigne par $B_q(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique q, i.e. définie par

$$\forall x, y \in C, \quad B_q(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)).$$

On définit également la forme linéaire suivante, appelée **trace** par

$$\forall x \in C, \quad T(x) = 2B_q(x, 1).$$

Dans la suite, nous allons identifier le corps de base k avec son image dans C (et plus tard dans O) ainsi q, B_q et T seront considérées comme étant à valeurs dans C. Cet abus nous permettra d'alléger significativement nos notations.

La donnée de la forme quadratique q induit sur C l'existence d'une involution.

Proposition 1. *Soit C une algèbre à composition. L'application*

$$\begin{array}{rccl} \overline{\cdot}: & C & \longrightarrow & C \\ & x & \mapsto & \overline{x} = 2B_q(x,1) - x \end{array}$$

est un anti-automorphisme[1] *involutif de C.*

Démonstration. Voir par exemple [Gar99, Lem. 2.3.6]. □

Cette involution joue un rôle important car elle permet de retrouver la forme quadratique q et par conséquent elle caractérise également C.

Lemme 1. *Soit $x \in C$ on a*

$$q(x) = x\overline{x}$$

et

$$T(x) = x + \overline{x}.$$

Démonstration. Voir [Gar99, Lem. 2.3.6] pour le premier point, le second est trivial. □

Ainsi, il existe dans la littérature des présentations des algèbres à composition à partir de la donnée d'une involution $\overline{\cdot}$ sur C telle que $x\overline{x}$ soit une forme quadratique non-dégénérée et $x + \overline{x}$ une forme linéaire.

Ces deux constructions sont parfaitement équivalentes. En outre, cette involution permet parfois de simplifier certains calculs dans C tout comme le résultat suivant :

Proposition 2. *Pour tout x d'une algèbre à composition C, on a*

$$x^2 - T(x)x + q(x) = 0 \tag{1}$$

et pour tout $x,\ y \in C$, on a également

$$xy + yx - T(x)y - T(y)x + 2B_q(x,\ y) = 0. \tag{2}$$

Si le sous-espace $k1 \oplus kx$ est de dimension 2 et non dégénéré, c'est une algèbre à composition.

Démonstration. Voir [SV, Prop. 1.2.3]. □

La formule (2) implique en particulier que $xy = -yx$ dès que $x, y \in \ker T$ et que x et y sont des vecteurs orthogonaux. Ce dernier point jouera un rôle primordial par la suite.

D'autre part, la proposition 2 a pour conséquence (voir encore une fois [SV]) les deux corollaires ci-dessous.

Corollaire 1. *La forme quadratique q d'une algèbre à composition C est déterminée de façon unique par l'algèbre C.*

[1] i.e. un automorphisme de l'espace vectoriel C vérifiant $\forall x, y \in C \quad \overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$.

Corollaire 2. *Les algèbres à composition C sont puissances-associatives, i.e. pour tout $x \in C$, la sous-algèbre $k[x]$ est associative.*

Le premier de ces corollaires implique donc que la définition de C posée au départ de ce texte est correcte. Le second est quant à lui un moyen très pratique de simplifier un grand nombre de calculs lorsque l'on travaille dans une telle algèbre.

Autre curiosité des algèbres à composition, ces dernières n'existent pas en toute dimension. De surcroit, plus la dimension est grande plus on perd de bonnes propriétés de l'algèbre. Le résultat précis concernant ces derniers points est énoncé sous la forme du théorème suivant :

Théorème 1. *Les dimensions possibles pour une algèbre à composition sont* 1, 2, 4 *et* 8. *Les algèbres à composition de dimension* 1 *ou* 2 *sont commutatives et associatives, celles de dimension* 4 *sont associatives mais non commutatives, et quant à celles de dimension* 8 *elles ne sont ni l'un ni l'autre.*

Remarque 2. *Les algèbres à composition de dimension* 4 *sont plus connues sous le nom d'algèbres de* ***quaternions****.*

Nous introduisons maintenant les algèbres d'octonions :

Définition 2. *Toute algèbre de composition C de dimension 8 est appelée* ***algèbre d'octonions*** *ou encore* ***algèbre de Cayley****.*

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de ce texte, nous désignons les algèbres d'octonions par un O.

Définition 3. *Soit O une algèbre d'octonions. Si la forme quadratique q est isotrope, on parlera d'algèbre d'octonions* ***déployée****.*

Remarque 3. *Les algèbres d'octonions déployées existent quel que soit le corps de base et sont uniques à isomorphisme près. En revanche, sur un corps fixé il peut exister de nombreuses algèbres d'octonions non-déployées. Toute algèbre non déployée se déploie sur une extension quadratique du corps de base. Le lecteur interessé consultera notamment [S, Chap. 3 §4] ou [SV, Théo. 1.8.1].*

2 Un modèle d'algèbre d'octonions déployée

Nous allons maintenant construire O une algèbre d'octonions déployée. De ce que nous avons dit en remarque 3, de telles algèbres sont uniques à isomorphismes près. Ainsi, sauf mention explicite du contraire, lorsque par la suite nous parlerons d'algèbre d'octonions déployée, nous désignerons le modèle d'algèbre que nous allons construire maintenant.

On se donne le k-espace vectoriel

$$O = \mathfrak{M}_2(k) \times \mathfrak{M}_2(k)$$

où $\mathfrak{M}_2(k)$ désigne l'algèbre des matrices 2×2 à coefficients dans le corps k et on munit O du produit

$$\forall x, y \in O \qquad xy = (x_1,\ x_2)(y_1,\ y_2) = (x_1 y_1 + \tilde{y}_2 x_2,\ y_2 x_1 + x_2 \tilde{y}_1)$$

où

$$\tilde{y}_i = {}^t\operatorname{co}(y_i),$$

$\mathrm{co}(y_i)$ désignant la matrice constituée des cofacteurs de y_i.

De cette façon et comme signalé dans le corollaire 1, la forme quadratique q sur O est uniquement déterminée et s'exprime[2] sous la forme suivante :

$$\forall x = (x_1, x_2) \in O \qquad q(x) = \det(x_1) - \det(x_2).$$

Il est clair que O est une algèbre unitaire d'unité $1 = (Id,\ 0)$ et que la forme quadratique q est isotrope. Par conséquent, elle sera une algèbre d'octonions (déployée) lorsqu'il sera prouvé que q permet la composition. Ce dernier point peut s'établir à la main moyennant quelques calculs fastidieux que nous ne reproduisons pas ici. Une autre façon de le voir serait de constater que l'algèbre ainsi construite est le résultat du procédé de duplication de Cayley-Dickson appliqué à l'algèbre $\mathfrak{M}_2(k)$. Là encore nous ne détaillerons pas et conseillons, par exemple, la lecture de [SV, §1.5 et §1.8] ou encore de [Gar99, §2.3].

L'anti-automorphisme et la trace associés à q sont, quant à eux, donnés par le lemme suivant :

Lemme 2. *Pour tout $x \in C$,*

$$\overline{x} = (\tilde{x}_1,\ -x_2),$$
$$T(x) = (\mathrm{trace}(x_1),\ 0).$$

Démonstration. Là encore un calcul direct est possible, sinon le lecteur peut toujours se reporter à [SV, §1.8]. □

Nous considérons maintenant les vecteurs

$$e_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ [0]\right); \qquad f_0 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ [0]\right) \tag{3}$$
$$e_1 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ [0]\right); \qquad f_1 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ [0]\right) \tag{4}$$
$$e_2 = \left([0],\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right); \qquad f_2 = \left([0],\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \tag{5}$$
$$e_3 = \left([0],\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right); \qquad f_3 = \left([0],\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \tag{6}$$

où $[0]$ désigne la matrice nulle ; ces vecteurs forment une base de O qui vérifie de nombreuses propriétés dont les plus importantes sont résumées dans le lemme 3 ci-dessous.

Lemme 3. *Tout d'abord on a*

$$\begin{aligned} e_0 + f_0 &= 1, & \overline{e_0} &= f_0, & 2B_q(e_0, f_0) &= 1, \\ e_0^2 &= e_0, & f_0^2 &= f_0, & e_0 f_0 = f_0 e_0 &= 0 \end{aligned}$$

et pour tout $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$,

$$\begin{aligned} q(e_i) = q(f_i) &= 0, & 2B_q(e_i, f_j) &= \delta_{ij}, & e_i^2 &= 0, \\ f_i^2 &= 0, & \overline{e_i} &= -e_i, & \overline{f_i} &= -f_i, \\ f_0 e_i = e_i e_0 &= 0, & e_0 f_i = f_i f_0 &= 0, & e_0 e_i = e_i f_0 &= e_i, \\ f_0 f_i = f_i e_0 &= f_i, & e_i f_j &= -\delta_{ij} e_0, & f_i e_j &= -\delta_{ij} f_0, \end{aligned}$$

[2] Les relations et le produit dans O étant connus, avec un peu d'algèbre linéaire le résultat se déduit facilement.

$$e_i e_{i+1} = -e_{i+1} e_i = -f_{i+2}, \qquad f_i f_{i+1} = -f_{i+1} f_i = -e_{i+2}$$

ces deux dernières égalités étant vraies avec les indices $i+1$ et $i+2$ pris modulo 3 à valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Démonstration. Voir [Sch62, §1 p. 202]. □

En fait, il existe de nombreuses bases de O vérifiant ces propriétés et c'est avec de telles bases que nous allons travailler. On énonce donc :

Définition 4. *Toute base de O vérifiant les propriétés du lemme 3 est appelée* ***normale*** *(cf. [Sch62, §1 p. 202]).*

Remarque 4. *On remarquera que la base utilisée dans [SV] n'est pas une base normale.*

Dans la suite de ce texte, nous travaillerons avec une base normale et comme certains résultats du lemme 3 nous serons très utiles, nous les avons résumés dans la figure 1 ci-dessous.

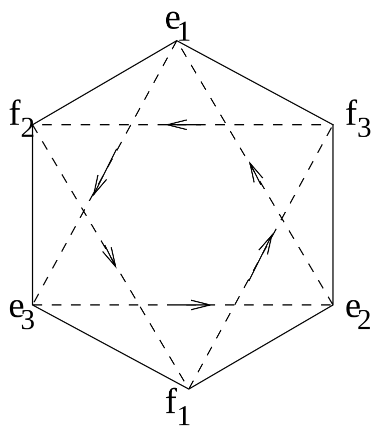

FIG. 1 – Diagramme illustrant la multiplication dans O.
Les traits pleins relient deux éléments dont le produit est nul. En pointillé le produit de ces deux éléments donne celui situé au-dessus du trait et la flèche indique la positivité. Par exemple $f_2 f_3 = -e_1$.

Deuxième partie
Décomposition cellulaire de $\mathcal{X}(\alpha_2)$

3 Définition des variétés

Rappelons, tout d'abord, quelques résultats classiques sur les groupes algébriques et les variétés homogènes projectives qu'on leur associe. À l'aide de ces résultats, nous définirons les variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ associées à un groupe de type G_2. Pour un exposé complet sur les groupes algébriques, nous vous conseillons la lecture de [B] et vous renvoyons à [MPW96] en ce qui concerne le choix de nos notations.

3.1 Variétés homogènes projectives

Soient G un groupe algébrique, T un tore maximal de G et B un sous-groupe de Borel le contenant. Le choix de ce groupe de Borel fixe un ensemble $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ de racines simples de G par rapport à T et pour tout α_i, il existe U_{α_i} un unique **sous-groupe de racine** de G. On associe également à toute racine α_i un autre sous-groupe de G, son **sous-groupe de racine opposé**, noté $U_{-\alpha_i}$, qui est en fait le sous-groupe de racine associé à la racine $-\alpha_i$. Dès lors, à tout sous-ensemble Θ de Δ, on associe P_Θ, un **sous-groupe parabolique** de G défini par

$$P_\Theta = \mathrm{gr}(T,\ \{U_\alpha |\ \alpha \in \Delta\},\ \{U_{-\alpha} |\ \alpha \notin \Theta\})$$

où $\mathrm{gr}(\mathcal{E})$ désigne le groupe engendré par l'ensemble $\mathcal{E}$. Par exemple, pour $\Theta = \Delta$, le sous-groupe parabolique associé est le sous-groupe de Borel B et pour $\Theta = \emptyset$, c'est G lui-même. On notera P_{α_i} le groupe $P_{\{\alpha_i\}}$ associé à une seule racine α_i. Enfin, on associe à Θ la **variété projective** G/P_Θ, **homogène** sous l'action de G, que nous noterons[3] $\mathcal{X}(\Theta)$. Une telle variété $\mathcal{X}(\Theta)$ est évidemment lisse et sera définie sur k, si et seulement si Θ est stable sous l'action du groupe de Galois absolu de k.

Parallèlement, on peut associer à un groupe algébrique un certain ensemble E. Cet ensemble peut être un k-espace vectoriel, un k-espace vectoriel quadratique, hermitien ou encore une k-algèbre. Ainsi, lorsque les racines sont convenablement[4] numérotées, $\mathcal{X}(\alpha_i)$ est une variété constituée à partir de certains sous-espaces de E, de dimension i sur k. Ensuite, on définit une relation d'incidence sur ces i-espaces particuliers et on obtient les variétés associées aux autres sous-ensembles de Δ à partir des variétés $\mathcal{X}(\alpha_i)$. Concrètement, la variété $\mathcal{X}(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_l})$ associée au sous-ensemble $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_l}\}$ de Δ, a pour k-points l'ensemble :

$$\left\{ (V_1, \dots, V_l) \in X(\alpha_{i_1})(k) \times \dots \times X(\alpha_{i_l})(k) \mid \begin{array}{c} V_i \text{ est incident à } V_j \\ \text{pour tout } 1 \leqslant i, j \leqslant l \end{array} \right\}.$$

Dans le cadre de notre étude, G est un groupe de type G_2. Un tel groupe peut se définir à l'aide d'une algèbre d'octonion comme cela nous est appris par le résultat suivant :

Théorème 2. *Le groupe G des automorphismes d'une algèbre d'octonions O est un k-groupe algébrique simple adjoint de type G_2. Tout groupe adjoint de ce type est obtenu de cette façon.*

Démonstration. Voir [SV, Th. 2.3.5 p. 33] ou sans preuve [Car14, p. 298] et [Car52, p. 443]. □

Un groupe de type G_2 est un groupe de rang 2. Il possède par conséquent deux racines, notées α_1 et α_2 et son diagramme de Dynkin est donné par la figure 2 ci-dessous.

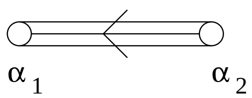

FIG. 2 – Diagramme de Dynkin de G.

En dehors du point $\mathcal{X}(\emptyset)$, nous avons donc trois variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)$, $\mathcal{X}(\alpha_2)$ et $\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)$, cette dernière étant celle dont la dimension est la plus grande. L'ensemble que l'on associe à G pour décrire ses variétés homogènes projectives est une algèbre d'octonions O et la relation

[3] Là encore, nous noterons simplement $\mathcal{X}(\alpha_i)$ à la place de $\mathcal{X}(\{\alpha_i\})$.

[4] C'est-à-dire comme nous l'avons fait ici.

d'incidence est tout simplement l'inclusion. Les variétés $\mathcal{X}(\alpha_i)$ ($i \in \{1,2\}$) sont constituées des sous-espaces V_i de dimension i de O dont les éléments sont de trace nulle et tels que si x et y sont deux éléments de V_i alors $xy = 0$.

Dans le cas présent, les variétés $\mathcal{X}(\alpha_i)$ ($i \in \{1,2\}$) et $\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)$, seront définies sur k si et seulement si O est déployée. Par extension lorsque cela sera le cas, nous qualifirons également les variétés $\mathcal{X}(\alpha_i)$ de **déployées**.

Notre prochain objectif est d'exhiber la décomposition cellulaire de $\mathcal{X}(\alpha_2)$. Pour ce faire, le langage des foncteurs de points nous est apparu comme le plus indiqué. Toutefois, cette fois encore, il nous semble nécessaire de rappeler brièvement quelques notions essentielles avant de rentrer dans le vif du sujet.

3.2 Foncteurs de points

On désigne par **foncteur de points**, tout foncteur covariant de la catégorie $\mathfrak{Alg}._k$ des k-algèbres associatives, unitaires et commutatives, à valeurs dans la catégorie $\mathfrak{Ens}.$ des ensembles.

Un tel foncteur $\mathcal{F}$ est dit **représentable** s'il existe une k-variété X telle que pour tout élément R de $\mathfrak{Alg}._k$ on ait :

$$\mathcal{F}(R) = \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{Sch}}(Spec\ R, X)$$

On dit aussi que le foncteur $\mathcal{F}$ est **représenté** par X. On remarquera au passage que l'application $X \mapsto \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{Sch}}(-, X)$ définit une transformation naturelle entre la catégorie des k-variétés et celle des foncteurs de points représentables qui est une équivalence de catégorie (cf [DG, Th. de comparaison p. 18]).

Un exemple de foncteur de point est donné par le **foncteur affine** $Spec\ R$ associé à la k-algèbre R, défini pour tout élément S de $\mathfrak{Alg}._k$ par

$$Spec\ R(S) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}._k}(R, S).$$

Ce foncteur est clairement représenté par la k-variété Spec R et c'est pour cette raison qu'il est noté de la même manière.

On dit que $\mathcal{G}$ est un **sous-foncteur** de $\mathcal{F}$, si pour toute k-algèbre R, $\mathcal{G}(R)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{F}(R)$ et si pour tout homomorphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}._k}(R, S)$ (où $S \in \mathfrak{Alg}._k$), l'application $\mathcal{G}(\varphi) \colon \mathcal{G}(R) \to \mathcal{G}(S)$ est la restriction de $\mathcal{F}(\varphi)$.

On se donne maintenant un foncteur $\mathcal{F}$ représenté par une k-variété X. On dira alors qu'un sous-foncteur $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ est **ouvert** (respectivement **fermé**), s'il s'agit d'un sous-foncteur représentable de $\mathcal{F}$ qui est représenté par une sous-variété ouverte (respectivement fermée) de X.

À présent, nous allons définir les foncteurs de point **grassmaniennes** qui interviendront dans la suite de ce texte. Pour cela, on se donne un k-espace vectoriel V de dimension finie n et pour toute k-algèbre R on pose $V_R = V \otimes_k R$.

Définition 5. *Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, le foncteur grassmanienne $\Gamma_i(V)$ des sous-espaces de dimension i est défini par :*

- *pour toute k-algèbre R, l'ensemble $\Gamma_i(V)(R)$ est constitué des sommants directs de rang i de V_R, en d'autres termes, il s'agit des sous-modules projectifs M de rang i de V_R tels que V_R/M est également projectif ;*
- *pour tout homomorphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}._k}(R, S)$, l'application $\Gamma_i(V)(R) \to \Gamma_i(V)(S)$ est définie par la tensorisation par S sur R, i.e. par*

$$V_R \supset M \mapsto M \otimes_R S \subset V_S.$$

Nous renvoyons le lecteur à [EH, Ex. VI-18 p. 261] pour vérifier qu'il s'agit bien du foncteur de point associé à la grassmanienne des i-sous-espaces de V.

Soit maintenant $f\colon V \times V \to W$ une application k-bilinéaire où W est aussi un k-espace vectoriel de dimension fini. On définit alors un sous-foncteur $\Gamma_i(V,\ f)$ de $\Gamma_i(V)$, i.e. celui des sous-espaces totalement isotropes de dimension i de V, en posant comme ensemble de ses R-points ($R \in \mathfrak{Alg}._k$) :

$$\Gamma_i(V,f)(R) = \{M \in \Gamma_i(V)(R) \mid f_R(M,M) = 0\}$$

où f_R est l'application R-bilinéaire induite par f.

Ici nous utiliserons cette définition dans le cas où $V = W = O$ et où f est la multiplication de l'algèbre. Pour plus de détails concernant ce formalisme et ces définitions nous renvoyons le lecteur à [Kar01, §9 p. 23].

Nous sommes maintenant en mesure de donner les définitions explicites de $\mathcal{X}(\alpha_1)$, $\mathcal{X}(\alpha_2)$ et $\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2)$ en terme de foncteurs de points. Ces définitions sont donc la version fonctorielle des définitions classiques que l'on pourra par exemple consulter dans [Sch62, §6 p. 207].

3.3 Les foncteurs de points $\mathcal{X}(\alpha_1)$, $\mathcal{X}(\alpha_2)$ et $\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2)$

Dans les définitions de $\mathcal{X}(\alpha_i)$ ($i \in \{1,2\}$) et $\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2)$, les éléments mis en jeu sont tous de traces nulles, par conséquent nous pouvons nous restreindre à l'hyperplan $H = \ker T$ au lieu de travailler sur O tout entier et ce même si, lorsqu'il s'agit d'effectuer le produit de deux éléments, le résultat est toujours vu dans O. Nous obtenons ainsi pour tout élément R de $\mathfrak{Alg}._k$, les définitions allégées suivantes :

$$\mathcal{X}(\alpha_1)(R) = \{D\ \in \Gamma_1(H)(R)\ |\forall u,v \in D,\ uv = 0\},$$
$$\mathcal{X}(\alpha_2)(R) = \{P \in \Gamma_2(H)(R)\ |\forall u,v \in P,\ uv = 0\}$$

et

$$\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2)(R) = \{(D,\ P) \in \mathcal{X}(\alpha_1)(R) \times \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \mid D \subset P\}$$

où $\Gamma_1(H)$ et $\Gamma_2(H)$ désignent donc respectivement le foncteur grassmanienne des droites et des plans de H.

Regardons maintenant ces définitions d'un peu plus près. Nous avons déjà fait remarquer que tous les éléments x de O vérifient (1), i.e.

$$x^2 - T(x)x + q(x) = 0.$$

Par conséquent la définition de $\mathcal{X}(\alpha_1)$ devient

$$\mathcal{X}(\alpha_1)(R) = \{D\ \in \Gamma_1(H)(R)\ |\forall u \in D\ (q_{|_H})_R(u) = 0\}$$

où $(q_{|_H})_R$ désigne la forme quadratique q restreinte à H et étendue à R. Toujours pour alléger les notations, nous posons $q' = q_{|_H}$. En effet, un module projectif de rang 1 défini un faisceau localement libre de rang 1. Par conséquent, localement la condition $uv = 0$ est équivalente à $su^2 = 0$ (car puisque le module est libre de rang 1, il existe un scalaire s tel que $v = su$) et donc équivalente à $q'(u) = 0$. Cette équivalence étant vraie localement, elle l'est également globalement. Ainsi, il devient clair que

$$\mathcal{X}(\alpha_1) = \Gamma_1(H, q')$$

i.e. que $\mathcal{X}(\alpha_1)$ est le foncteur des droites isotropes de H ou en d'autres termes, c'est une quadrique projective de dimension 5. Ce résultat a déjà été mis en évidence par M. Demazure (cf. [Dem77, §2 c)]), il s'agit d'un des quelques cas où des variétés homogènes projectives associées à deux groupes algébriques bien distincts sont isomorphes. En ce qui nous concerne, cet article présente aussi un autre intérêt ; si G désigne encore une fois un groupe adjoint de type G_2, l'article de M. Demazure nous apprend que $\mathrm{Aut}(\mathcal{X}(\alpha_1)) \simeq \mathrm{SO}(q')$ et que $\mathrm{Aut}(\mathcal{X}(\alpha_2)) \simeq G$. Dès lors, les variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ ont des groupes d'automorphismes différents et ne sont donc pas isomorphes en tant que variétés projectives lisses.

Concernant maintenant $\mathcal{X}(\alpha_2)$, nous constatons là encore que tout ses points sont des plans totalement isotropes. En effet, ils sont de traces nulles et le produit de deux éléments quelconques est également nul. Ainsi, en vertu des équations (1) et (2), que nous rappelons :

$$x^2 - T(x)x + q(x) = 0$$

et

$$xy + yx - T(x)y - T(y)x + 2B_q(x,\ y) = 0,$$

nous constatons que $q(x) = B_q(x,\ y) = 0$, i.e. que tous les éléments sont isotropes et orthogonaux deux à deux. En revanche un plan totalement isotrope constitué d'éléments de trace nulle n'appartient pas forcement à $\mathcal{X}(\alpha_2)$. En effet, dans ce cas là les formules (1) et (2) nous indiquent juste que $x^2 = 0$ et $xy + yx = 0$ ce qui n'implique pas que $xy = yx = 0$. Par exemple, dans la base normale (3), le module libre engendré par f_1 et f_2 est bien isotrope et vérifit les conditions requisent car $f_1 f_2 = -f_2 f_1$ mais $f_1 f_2 = -e_3 \neq 0$. En conclusion, nous ne pouvons pas simplifier plus la définition de $\mathcal{X}(\alpha_2)$.

Nous allons maintenant donner la structure cellulaire de $\mathcal{X}(\alpha_2)$.

4 Structure cellulaire de $\mathcal{X}(\alpha_2)$

Dans toute cette sous-section, nous travaillons avec O une algèbre d'octonion déployée.

On rappelle que la **structure cellulaire** d'une variété X (lisse et complète) est la donnée d'une filtration

$$X = X_n \supset X_{n-1} \supset \ldots \supset X_0 \supset X_{-1} = \emptyset$$

par des sous-variétés fermées X_i telles que les différences $X_i \backslash X_{i-1}$, $i \in \{0, \ldots, n\}$, soient des espaces affines. Par la suite, on appellera ces différences des **cellules**.

D'après l'article de [Köc91], on sait que lorsque $\mathcal{X}(\alpha_2)$ est déployée, une telle filtration existe. Toutefois, nous voulons l'établir explicitement afin de prouver plus loin dans ce texte la rationnalité de certains cycles. Pour cela, nous allons partir d'une structure cellulaire de $\Gamma_2(H)$ et l'intersecter avec $\mathcal{X}(\alpha_2)$ avant de raffiner la filtration en supprimant les termes redondants (i.e. ceux dont les cellules sont vides).

Remarque 5. *Le lecteur remarquera qu'en général, même lorsqu'une variété X admet une structure cellulaire et que Y est une sous-variété fermée de X, l'intersection de la structure cellulaire de X avec Y ne donne pas nécessairement une structure cellulaire pour Y (pensez à une quadrique projective anisotrope dans une espace projectif...). Le fait que cela fonctionne dans ce cas là est donc assez exceptionnel.*

La construction d'une telle filtration pour $\Gamma_2(H)$ se fait à partir de ses **variétés de Schubert** (cf. ci-dessous), lesquelles se définissent à partir d'un drapeau de H. Dans le cas d'une grassmanienne cette construction est indépendante du choix du drapeau de départ. En revanche, ce choix est primordial si l'on veut être capable d'écrire explicitement le résultat de l'intersection de la structure cellulaire de $\Gamma_2(H)$ avec $\mathcal{X}(\alpha_2)$. En l'occurence, pour construire ce drapeau nous partons d'une base normale (cf. (3)) de O, notre algèbre d'octonion déployée et nous munissons H d'une base qui s'en déduit. Concrètement nous avons

$$H = \mathrm{Vect}\{e_1,\ f_2,\ f_3,\ e = e_0 - f_0,\ e_3,\ e_2,\ f_1\}$$

et l'ordre dans lequel nous venons d'écrire les vecteurs qui engendrent H est important. En effet, pour définir notre drapeau, nous prenons comme premier espace vectoriel (le plus grand), $V_7 = H$. Nous déduisons ensuite V_i, nouvel espace vectoriel de la filtration comme étant égal à $\mathrm{Vect}\{v_{j_i}, \ldots, v_{j_1}\}$ où les v_{j_k} sont les i derniers vecteurs de l'ensemble $\{e_1,\ f_2,\ f_3,\ e = e_0 - f_0,\ e_3,\ e_2,\ f_1\}$ pris dans le même ordre. Par exemple, $V_6 = \mathrm{Vect}\{f_2,\ f_3,\ e,\ e_3,\ e_2,\ f_1\}$ et $V_3 = \mathrm{Vect}\{e_3,\ e_2,\ f_1\}$.

Un drapeau de H étant maintenant fixé, on peut définir de façon classique les **variétés de Schubert** (voir par exemple [M] ou [F]) de $\Gamma_2(H)$. Pour cela, à un couple $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ (avec $5 \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant 0$) on associe la variété dont les R-points ($R \in \mathfrak{Alg}._k$) sont les suivants :

$$X_\lambda(R) = \{M \in \Gamma_2(V)(R) \mid \mathrm{rg}(M \cap (V_{5+i-\lambda_i})_R) \geqslant i,\ 1 \leqslant i \leqslant 2\}.$$

Ces variétés ne forment évidemment pas une filtration mais en prenant des réunions de variétés (et/ou de cellules) de Schubert, il est possible d'en fabriquer une. Nous n'en dirons pas plus ici sur les variétés de Schubert et nous ne reproduisons pas non plus la structure cellulaire de $\Gamma_2(H)$; nous nous contentons de donner la structure cellulaire qui en résulte pour $\mathcal{X}(\alpha_2)$ et dont les R-points ($R \in \mathfrak{Alg}._k$) sont les suivants :

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_5(R) &= \mathcal{X}(\alpha_2)(R)\\
\mathcal{X}_4(R) &= \{P \in \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \mid \mathrm{rg}(P \cap (V_7)_R) \geqslant 2,\ \mathrm{rg}(P \cap (V_5)_R) \geqslant 1\}\\
\mathcal{X}_3(R) &= \{P \in \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \mid \mathrm{rg}(P \cap (V_6)_R) \geqslant 2,\ \mathrm{rg}(P \cap (V_3)_R) \geqslant 1\}\\
\mathcal{X}_2(R) &= \{P \in \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \mid \mathrm{rg}(P \cap (V_5)_R) \geqslant 2,\ \mathrm{rg}(P \cap (V_2)_R) \geqslant 1\}\\
\mathcal{X}_1(R) &= \{P \in \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \mid \mathrm{rg}(P \cap (V_3)_R) \geqslant 2,\ \mathrm{rg}(P \cap (V_1)_R) \geqslant 1\}\\
\mathcal{X}_0(R) &= \{P \in \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \mid \mathrm{rg}(P \cap (V_2)_R) \geqslant 2,\ \mathrm{rg}(P \cap (V_1)_R) \geqslant 1\}
\end{aligned}$$

Là encore, il n'est pas nécessaire de vérifier qu'il s'agit bien de sous-foncteur fermés. Pour s'en convaincre le lecteur pourra, par exemple, adapter les arguments donnés dans [Kar01, Lem. 9.7].

Maintenant que nous avons une filtration, il nous faut vérifier que les cellules sont bien des espaces affines afin d'avoir effectivement une décomposition cellulaire. Tout d'abord, nous introduisons la notation suivante pour désigner les cellules :

$$\forall i \in \{0, \ldots, 5\} \qquad \mathcal{X}_{(i \backslash i-1)} = \mathcal{X}_i \backslash \mathcal{X}_{i-1}$$

avec la convention $\mathcal{X}_{-1} = \emptyset$. Il ne nous reste maintenant plus qu'à établir le résultat suivant :

Lemme 4. $\forall i \in \{0, \ldots, 5\}$,

$$\mathcal{X}_{(i \backslash i-1)} \simeq \mathbb{A}^i$$

où $\mathbb{A}^i$ désigne le foncteur espace affine de dimension i.

Démonstration. Dans sa démarche, la preuve est la même pour toutes les cellules. Nous allons par conséquent nous limiter à celle de $\mathcal{X}_{(4\backslash 3)} \simeq \mathbb{A}^4$.

On se donne donc R une k-algèbre et P un R-point de $\mathcal{X}_{(4\backslash 3)}(R)$. Nous allons établir qu'il existe une bijection entre $\mathcal{X}_{(4\backslash 3)}(R)$ et R^4.

Soit $j\colon V_7 \twoheadrightarrow V_7/V_6$ la projection canonique. Dire que $P \in \mathcal{X}_{(4\backslash 3)}(R)$ est équivalent à dire que d'une part, l'application j étendue à R, et restreinte à P, $(j_R)_{|P}$, est surjective, d'autre part que $\ker(j_R)_{|P} \subset (V_5)_R$ et enfin que $(V_5)_R \to (V_5/V_4)_R$ restreinte à $\ker(j_R)_{|P}$ est un isomorphisme. En conséquence, nous posons $i\colon (V_5/V_4)_R \hookrightarrow P$ l'application induite par l'isomorphisme $(V_5/V_4)_R \xrightarrow{\sim} \ker(j_R)_{|P}$. La situation peut donc se résumer à la suite exacte courte suivante :

$$0 \to (V_5/V_4)_R \overset{i}{\hookrightarrow} P \overset{(j_R)_{|P}}{\twoheadrightarrow} (V_7/V_6)_R \to 0.$$

Il en découle que

$$P \simeq (V_5/V_4)_R \oplus (V_7/V_6)_R$$

où l'isomorphisme dépend de la donnée d'une section de $(j_R)_{|P}$. De cet isomorphisme nous déduisons que P est en fait un module libre et par conséquent nous allons pouvoir raisonner à partir des bases des V_i. Comme $(V_7/V_6)_R$ est engendré par $\overline{e_1}$, classe de e_1 modulo $(V_6)_R$ et $(V_5/V_4)_R$ par $\overline{f_3}$, classe de f_3 modulo $(V_4)_R$, une façon générique de remonter ces éléments est de prendre

$$m = m(a,b,c,d,g,h) = e_1 + a\cdot f_2 + b\cdot f_3 + c\cdot e + d\cdot e_3 + g\cdot e_2 + h\cdot f_1$$

et

$$n = n(w,x,y,z) = f_3 + w\cdot e + x\cdot e_3 + y\cdot e_2 + z\cdot f_1$$

où a,b,c,d,g,h,w,x,y et z sont des scalaires. Ces deux éléments forment bien un module libre de rang 2. En fait, ce module est le même si nous remplaçons m par $m - b\cdot n$ et ainsi nous éliminons un scalaire et réduisons le problème. En conséquence et quitte à renommer les scalaires restants nous pouvons travailler avec

$$m = m(a,c,d,g,h) = e_1 + a\cdot f_2 + c\cdot e + d\cdot e_3 + g\cdot e_2 + h\cdot f_1$$

au lieu de la précédente définition de m. Dans l'ensemble de tous les modules qu'il est possible de générer à partir de m et n en faisant varier la valeur des scalaires, nous nous intéressons au sous-ensemble des modules qui appartiennent à $\mathcal{X}_{(4\backslash 3)}(R)$. Il est clair par définition que m et n sont dans H. Il ne nous reste qu'à vérifier que $m\cdot n = 0$ et $m^2 = n^2 = 0$.

En effectuant les calculs, nous obtenons

$$m\cdot n = 0 \iff \begin{cases} 0 = & hw - cz - xg + yd \\ 0 = & xc - dw + az \\ 0 = & yc + h - gw \\ 0 = & cw - z - d \\ 0 = & cw - ya \\ 0 = & x + aw \\ 0 = & -w - a \\ 0 = & -y - c \end{cases} \iff \begin{cases} h = & c^2 + gw \\ d = & cw - z \\ x = & w^2 \\ y = & -c \\ a = & -w \end{cases}$$

ce qui nous laisse déjà les variables c,g,w et z libres. Le calcul suivant nous donne

$$m^2 = 0 \iff 0 = c^2 - h - ag \iff h = c^2 - ag$$

qui est trivialement vérifié avec les précédentes relations. Enfin, le dernier calcul nous donne

$$n^2 = 0 \iff 0 = w^2 - x \iff x = w^2$$

qui est là encore une relation déjà présente dans le premier calcul.

Réciproquement, si nous considérons un module libre P engendré par $m = m(-w, c, cw - z, g, c^2+gw)$ et $n = n(w, w^2, -c, z)$, les calculs précédents montrent directement que $m^2 = n^2 = m \cdot n = 0$ et par conséquent que $P \in \mathcal{X}_{(4\backslash 3)}(R)$. Nous avons donc mis en bijection $\mathcal{X}_{(4\backslash 3)}(R)$ et l'ensemble des modules engendrés par $m = m(-w, c, cw - z, g, c^2 + gw)$ et $n = n(w, w^2, -c, z)$ qui est en bijection avec R^4. Comme annoncé, nous avons ainsi établi que

$$\mathcal{X}_{(4\backslash 3)} \simeq \mathbb{A}^4.$$

Le calcul des autres cellules se fait en procédant de la même façon et finalement, pour tout $i \in \{0, \ldots, 5\}$, nous trouvons que

$$\mathcal{X}_{(i\backslash i-1)} \simeq \mathbb{A}^i.$$

□

5 Anneau de Chow de $\mathcal{X}(\alpha_2)$

On rappelle qu'à toute variété algébrique lisse et complète X, on associe $\mathrm{CH}^*(X)$, son anneau de Chow engendré sur $\mathbb{Z}$ par les classes de cycles algébriques sur X modulo l'équivalence rationnelle et gradué par la codimension des cycles. On peut également considérer $\mathrm{CH}_*(X)$, l'anneau gradué cette fois-ci par la dimension des cycles et lorsque X est irréductible, on a $\mathrm{CH}^p(X) = \mathrm{CH}_{d-p}(X)$ où $d = \dim X$. Bien que cela soit un abus de langage, nous parlerons souvent de cycle plutôt que de classes de cycles.

Le but de cette section est de déterminer, dans le cas déployé, la structure générale de l'anneau de Chow de $\mathcal{X}(\alpha_2)$. Pour cela, nous allons exhiber les relations que vérifient les générateurs de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$.

Lorsqu'une variété possède une structure cellulaire, nous savons (c.f. [F, Ex. 1.9.1]) que son anneau de Chow est engendré par les classes pour l'équivalence rationnelle de l'adhérence des cellules. En conséquence, la construction de la structure cellulaire de $\mathcal{X}(\alpha_2)$ établie dans la section précédente nous permet d'affirmer que $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$ possède un unique générateur par codimension. Ce qu'il nous faut maintenant comprendre, c'est comment ces générateurs se multiplient entre eux. Pour cela, nous allons utiliser le fait que $\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)$ peut être vue comme une fibration projective au-dessus de $\mathcal{X}(\alpha_2)$ au moyen de l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} pr\colon & \mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2) & \longrightarrow & \mathcal{X}(\alpha_2) \\ & (D, P) & \mapsto & P. \end{array}$$

Cette fibration induit une application faisant de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ un $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$-module libre de rang 2 (c.f. [F, Ex. 8.3.4 et Th. 3.3 b)]). Nous allons utiliser cette structure de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$-module pour calculer de deux façons différentes des invariants de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$. En comparant les résultats de ces deux calculs nous obtiendrons de façon presque complète la table de multiplication des générateurs de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$. Ces relations seront suffisantes pour établir l'isomorphisme motivique. Pour commencer, il nous faut en apprendre d'avantage sur $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$.

5.1 Relations dans $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$

En premier lieu, il est connu (voir par exemple [Mar76, Lem. 5.1.1]) que $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ est un groupe libre engendré par un générateur libre en codimension 0 et 6 et deux générateurs libres dans les autres codimensions. Ainsi, nous désignons par g^i et h^i les générateurs de $\mathrm{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ pour i dans $\{1, \ldots, 5\}$ et par g^0 et g^6 ceux de $\mathrm{CH}^0(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ et $\mathrm{CH}^6(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ respectivement. En second lieu, le calcul du produit de n'importe quel élément de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ avec un élément de codimension 1 peut être obtenu par une formule du "type Pieri-Giambelli," la formule de Chevalley établie dans [Dem74, §4 Cor. 2]. Grâce à cette formule, nous calculons la table de multiplication des générateurs de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$.

$$
\begin{array}{llll}
(g^1)^2 = 3g^2 & (h^1)^2 = h^2 & h^1g^2 = g^3 + h^3 & g^1h^2 = g^3 + 3h^3 \\
(g^1)^3 = 6g^3 & (h^1)^3 = 2h^3 & h^1g^3 = 2g^4 + h^4 & g^1h^3 = g^4 + 2h^4 \\
(g^1)^4 = 18g^4 & (h^1)^4 = 2h^4 & h^1g^4 = g^5 + h^5 & g^1h^4 = g^5 + 3h^5 \\
(g^1)^5 = 18g^5 & (h^1)^5 = 2h^5 & h^1g^5 = g^6 & g^1h^5 = g^6 \\
(g^1)^6 = 0 & (h^1)^6 = 0 & h^1g^1 = h^2 + g^2 &
\end{array}
$$

Comme annoncé nous allons maintenant calculer les invariants de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$.

5.2 Calcul des invariants de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$

Nous désignons par A le sous-anneau de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ engendré par les éléments du groupe $\mathrm{CH}^1(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$. Nous considèrons ensuite A^i le groupe abélien constitué des éléments de codimension i de A (i.e. engendré par les polynômes homogènes de degré i en g^1 et h^1). Par conséquent, après calculs nous obtenons que

$$
\begin{aligned}
A^1 &= \mathrm{gr}(g^1,\ h^1) \\
A^2 &= \mathrm{gr}((g^1)^2,\ g^1h^1,\ (h^1)^2) \\
&= \mathrm{gr}(3g^2,\ g^2 + h^2,\ h^2) \\
A^3 &= \mathrm{gr}((g^1)^3,\ (g^1)^2h^1,\ g^1(h^1)^2,\ (h^1)^3) \\
&= \mathrm{gr}(6g^3,\ 3(g^3 + h^3),\ g^3 + 3h^3,\ 2h^3) \\
A^4 &= \mathrm{gr}((g^1)^4,\ (g^1)^3h^1,\ (g^1)^2(h^1)^2,\ g^1(h^1)^3,\ (h^1)^4) \\
&= \mathrm{gr}(18g^4,\ 12g^4 + 6h^4,\ 6(g^4 + h^4),\ 2g^4 + 4h^4,\ 2h^4) \\
A^5 &= \mathrm{gr}((g^1)^5,\ (g^1)^4h^1,\ (g^1)^3(h^1)^2,\ (g^1)^2(h^1)^3,\ g^1(h^1)^4,\ (h^1)^5) \\
&= \mathrm{gr}(18g^5,\ 18(g^5 + h^5),\ 12g^5 + 18h^5,\ 6g^5 + 12h^5,\ 2g^5 + 6h^5,\ 2h^5) \\
A^6 &= \mathrm{gr}((g^1)^6,\ (g^1)^5h^1,\ (g^1)^4(h^1)^2,\ (g^1)^3(h^1)^3,\ (g^1)^2(h^1)^4,\ g^1(h^1)^5,\ (h^1)^6) \\
&= \mathrm{gr}(0, 2g^6,\ 6g^6,\ 12g^6,\ 18g^6,\ 18g^6, 0)
\end{aligned}
$$

où là encore, nous désignons par $\mathrm{gr}(\mathcal{E})$ le groupe abélien libre engendré par les éléments de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{Z}$.

Nous rappellons que pour tout i dans $\{1, \ldots 5\}$, nous avons

$$\mathrm{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)) = \mathrm{gr}(g^i, h^i)$$

et que

$$\mathrm{CH}^6(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)) = \mathrm{gr}(g^6).$$

En calculant les différents quotients nous trouvons ainsi que :

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{CH}^1(\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2)) : A^1) &= 1\\
(\mathrm{CH}^2(\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2)) : A^2) &= 1\\
(\mathrm{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2)) : A^3) &= 2\\
(\mathrm{CH}^4(\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2)) : A^4) &= 4\\
(\mathrm{CH}^5(\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2)) : A^5) &= 4\\
(\mathrm{CH}^6(\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2)) : A^6) &= 2
\end{aligned}
$$

où nous désignons par $(\mathrm{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2)) : A^i)$, l'indice du sous-groupe A^i dans $\mathrm{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2))$.

Ces indices sont les invariants de l'anneaux $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2))$ dont nous allons nous servir pour déterminer la structure d'anneau de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$. Pour cela, nous allons à nouveau calculer ces indices en utilisant la structure de $\mathrm{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_2))$-module de $\mathrm{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2))$.

5.3 Calcul de la structure de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$

Pour commencer, nous rappelons que $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$ possède un seul générateur par codimension que nous notons h_2^i $(i \in \{0,\dots,5\})$. Ensuite, nous avons déjà signalé que $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2))$ est un $\mathrm{CH}(\mathcal{X}(\alpha_2))$-module libre de rang 2 . Plus précisement, il admet pour base l'ensemble $\{1,\ \zeta\}$ où 1 désigne l'élément neutre et ζ est un élément qui vérifie

$$\zeta^2 - c_1 h_2^1 \zeta + c_2 h_2^2 = 0$$

et où c_i désigne la $i^{ème}$ classe de Chern du fibré vectoriel associé au fibré projectif sur $\mathcal{X}(\alpha_2)$. Ainsi, pour i à valeurs dans $\{1,\dots,5\}$, les groupes $\mathrm{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2))$ correspondent à $\mathrm{gr}(h_2^i,\ \zeta h_2^{i-1})$, et pour les indices 0 et 6, nous avons $\mathrm{CH}^0(\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2)) \simeq \mathrm{CH}^0(\mathcal{X}(\alpha_2))$, et $\mathrm{CH}^6(\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2)) \simeq \mathrm{CH}^5(\mathcal{X}(\alpha_2))\zeta$. Nous nous donnons ensuite quatre nombres entiers positifs l, m, n et p tels que

$$(h_2^1)^2 = l h_2^2, \qquad (h_2^1)^3 = lm h_2^3, \qquad (h_2^1)^4 = lmn h_2^4, \qquad (h_2^1)^5 = lmnp h_2^5.$$

Ceci étant posé, nous allons considérer comme précédemment, les sous-groupes A^i exprimés cette fois-ci en fonction de $(h_2^1)^i$ et $\zeta(h_2^1)^{i-1}$. Pour commencer,

$$A^1 = \mathrm{gr}(h_2^1,\ \zeta)$$

nous avons donc bien

$$(\mathrm{CH}^1(\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2)) : A^1) = 1.$$

Ensuite,

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \mathrm{gr}((h_2^1)^2,\ h_2^1\zeta,\ \zeta^2)\\
&= \mathrm{gr}(l h_2^2,\ h_2^1\zeta,\ c_1 h_2^1\zeta - c_2 h_2^2)\\
&= \mathrm{gr}(l h_2^2,\ c_2 h_2^2,\ h_2^1\zeta)
\end{aligned}
$$

et comme

$$(\mathrm{CH}^2(\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2)) : A^2) = 1$$

nous en déduisons que les nombres l et c_2 sont premiers entres eux. Ce résultat sera très largement exploité dans les calculs suivants. Concernant le groupe A^3, nous avons

$$\begin{aligned}A^3 &= \mathrm{gr}((h_2^1)^3,\ (h_2^1)^2\zeta,\ h_2^1\zeta^2,\ \zeta^3)\\ &= \mathrm{gr}((lmh_2^3,\ lh_2^2\zeta,\ lc_1h_2^2\zeta - mc_2h_2^3,\ (lc_1^2-c_2)h_2^2\zeta - mc_1c_2h_2^3)\\ &= \mathrm{gr}(mh_2^3,\ h_2^2\zeta)\end{aligned}$$

d'où

$$(\mathrm{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2)) : A^3) = m = 2.$$

Nous calculons maintenant A^4,

$$\begin{aligned}A^4 =&\,\mathrm{gr}((h_2^1)^4,\ (h_2^1)^3\zeta,\ (h_2^1)^2\zeta^3,\ h_2^1\zeta^3,\ \zeta^4)\\ =&\,\mathrm{gr}(2lnh_2^4,\ 2lh_2^3\zeta,\ 2lc_1h_2^3\zeta - 2nc_2h_2^4,\ 2(lc_1^2-c_2)h_2^3\zeta - 2nc_1c_2h_2^4,\\ &\quad 2c_1(lc_1^2-2c_2)h_2^3\zeta - \frac{2n}{l}(lc_1^2-c_2)c_2h_2^4)\\ =&\,\mathrm{gr}(2nh_2^4,\ 2h_2^3\zeta,\ \frac{2n}{l}c_2^2h_2^4)\end{aligned}$$

ainsi

$$(\mathrm{CH}^4(\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2)) : A^4) = 2\,\mathrm{pgcd}(2n, \frac{2n}{l}c_2) = 4$$

où $\mathrm{pgcd}(2n, \frac{2n}{l}c_2)$ désigne le plus grand commun multiple de $\frac{2n}{l}c_2$ et $2n$. Par suite, comme $\mathrm{pgcd}(2n, \frac{2n}{l}c_2) = 2$, nécessairement $\mathrm{pgcd}(n, \frac{n}{l}c_2) = 1$ et ainsi $l = n$. Nous calculons maintenant

$$\begin{aligned}A^5 =&\,\mathrm{gr}((h_2^1)^5,\ (h_2^1)^4\zeta,\ (h_2^1)^3\zeta^2,\ (h_2^1)^2\zeta^3,\ h_2^1\zeta^4,\ \zeta^5)\\ =&\,\mathrm{gr}(2l^2ph_2^5,\ 2l^2h_2^4\zeta,\ 2l^2c_1h_2^4\zeta - 2lpc_2h_2^5, 2l(lc_1^2-c_2)h_2^4\zeta - 2lpc_1c_2h_2^5,\\ &\quad 2lc_1(lc_1^2-2c_2)h_2^4\zeta - 2pc_2(lc_1^2-c_2)h_2^5, (2l^2c_1^4-6lc_1^2c_2+2c_2^2)h_2^4\zeta - 2pc_1c_2(lc_1^2-2c_2)h_2^5)\\ =&\,\mathrm{gr}(2ph_2^5,\ 2h_2^4\zeta)\end{aligned}$$

ainsi

$$(\mathrm{CH}^5(\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2)) : A^5) = 4p = 4$$

d'où $p = 1$. Enfin, nous calculons

$$\begin{aligned}A^6 =&\,\mathrm{gr}((h_2^1)^6,\ (h_2^1)^5\zeta,\ (h_2^1)^4\zeta^2,\ (h_2^1)^3\zeta^3,\ (h_2^1)^2\zeta^4,\ h_2^1\zeta^5,\ \zeta^6)\\ =&\,\mathrm{gr}(0,\ 2l^2h_2^5\zeta,\ 2l^2c_1h_2^5\zeta,\ 2l(lc_1^2-c_2)h_2^5\zeta,\ 2lc_1(lc_1^2-2c_2)h_2^5\zeta,\\ &\quad (2l^2c_1^4-6lc_1^2c_2+2c_2^2)h_2^5\zeta,\ (2l^2c_1^5-8lc_1^3c_2+6c_1c_2^2)h_2^5\zeta)\\ =&\,\mathrm{gr}(2h_2^5\zeta)\end{aligned}$$

et nous trouvons bien que

$$(\mathrm{CH}^6(\mathcal{X}(\alpha_1,\alpha_2)) : A^6) = 2.$$

Finalement, la table de multiplication partielle de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$ est

$$\begin{aligned}(h_2^1)^2 &= lh_2^2\\ (h_2^1)^3 &= 2lh_2^3\\ (h_2^1)^4 &= 2l^2h_2^4\\ (h_2^1)^5 &= 2l^2h_2^5\end{aligned}$$

Malgré tous nos effort, l reste donc jusque là indéterminés. Pourtant, l'image de h_2^1 dans $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)$ par l'application $pr^*\colon \mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2) \to \mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2))$ induite par la fibration projective, est une combinaison de g^1 et h^1, i.e. $pr^*(h_2^1) = ag^1 + bh^1$ avec a et b dans $\mathbb{Z}$, premiers entre eux (puisque $pr^*(h_2^1)$ peut être choisis comme un des générateurs de $\mathrm{CH}^1(\mathcal{X}(\alpha_1, \alpha_2)))$. Or, nous avons

$$lpr^*(h_2^2) = (pr^*(h_2^1))^2 = (3a^2 + 2ab)g^1 + (b^2 + 2ab)h^2$$

ce qui impose donc à a et b d'être pairs si l l'est. Ceci est en contradiction avec le fait que a et b sont premiers entre eux. Par conséquent, l est nécessairement impair et ce fait nous sera très utile par la suite pour établir l'isomorphisme motivique. En effet, bien que n'ayant pas totalement déterminé la structure de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$, nous verrons que les informations dont nous disposons seront suffisante pour établir l'isomorphisme motivique entre $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$.

Troisième partie
L'isomorphisme motivique

Nous allons maintenant commencer par introduire la catégories des correspondances sur laquelle nous allons travailler ainsi que les résultats acompagnant cette théorie. Il s'agit de résultats classiques et la motivation principale n'est autre que l'introduction de nos notations.

6 Correspondances et motifs

Nous désignerons par $\mathfrak{Var}_k$ la catégorie des k-variétés lisses, complètes mais non nécessairement connexes (on inclut également $\emptyset$ dans $\mathfrak{Var}_k$). Nous avons déjà signalé que pour X dans $\mathfrak{Var}_k$, nous désignions par $\mathrm{CH}^*(X)$ l'anneau de Chow de X et que bien que cela soit un abus de langage, nous parlerons de cycle plutôt que de classes de cycles.

Une **correspondance** de[5] X dans Y, où X, Y sont dans $\mathfrak{Var}_k$, est par définition un cycle dans $\mathrm{CH}^*(X \times Y)$. La composition des correspondances se fait de la façon classique (voir par exemple [F, Défi. 16.1.1]) suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^*(X \times Y) \times \mathrm{CH}^*(Y \times Z) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^*(X \times Z) \\ (f, g) & \mapsto & g \circ f = (pr_{13})_*((f \times Z) \cdot (X \times g)) \end{array}$$

où $\cdot$ désigne la multiplication des cycles dans $\mathrm{CH}^*(X \times Y \times Z)$ et $(pr_{13})_*$ le push-forward par rapport à la projection

$$\begin{array}{rccc} pr_{13}\colon & X \times Y \times Z & \longrightarrow & X \times Z \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x, z). \end{array}$$

Soient maintenant X et Y dans $\mathfrak{Var}_k$ avec Y supposée connexe (ou d'une façon plus générale équidimensionnelle). On définit dans un premier temps une **correspondance de X dans Y de degré** p comme étant un cycle homogène de $\mathrm{CH}^{\dim Y + p}(X \times Y)$. On étend ensuite cette définition au cas d'une variété Y de $\mathfrak{Var}_k$ quelconque en désignant par correspondance de degré p les cycles homogènes de $\oplus_i \mathrm{CH}^{\dim Y_i + p}(X \times Y_i)$ où les Y_i désignent les composantes connexes de Y. Notez bien que l'on a

[5] Si $Y = X$ on parlera de correspondance sur X tout court.

$$\oplus_i \mathrm{CH}^{\dim Y_i+p}(X \times Y_i) = \oplus_j \mathrm{CH}_{\dim X_j - p}(X_j \times Y)$$

où les X_j désignent les composantes connexes de X.

Lorsque l'on compose des correspondances, les degrés s'ajoutent ([F, Ex. 16.1.1]), ainsi l'ensemble des correspondances de degré 0 est stable par composition et on définit par conséquent :

Définition 6. *Soit $\mathfrak{Corr}_k^0$ la catégorie additive dont les objets sont ceux de $\mathfrak{Var}_k$ et les groupes de morphismes sont les correspondances de degré* 0.

Le lecteur trouvera dans [F, §16.1] la démonstration du fait que $\mathfrak{Corr}_k^0$ est bien une catégorie. Nous signalons tout de même que l'application identité de X, id_X, est donnée par la classe de l'application diagonale sur $X \times X$. Par ailleurs, nous désignerons par $\mathrm{End}(X)$ le groupe $\mathrm{Hom}(X, X)$.

Dans ce texte, nous ne composerons que des correspondances décomposées et homogènes. Dans ce cas là, la de deux correspondances se calcule explicitemment grâce au lemme suivant :

Lemme 5. *Soient X, Y, $Z \in \mathfrak{Var}_k$, $f \in \mathrm{CH}^*(X)$,$g, g' \in \mathrm{CH}^*(Y)$ et $h \in \mathrm{CH}^*(Z)$. On suppose que la variété Y est connexe (ou plus généralement équidimensionnelle) et que les cycles g et g' sont homogènes. Alors on a*

$$\begin{aligned}(g' \times h) \circ (f \times g) = &\ (pr_{13})_*(f \times (g \cdot g') \times h) \\ = &\begin{cases} \deg(g \cdot g')(f \times h) & \mathrm{si}\, \mathrm{codim}(g) + \mathrm{codim}(g') = \dim Y \\ 0 & \mathrm{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

où $\deg(-)$ désigne le degré d'un 0-cycle (voir [F][Défi. 1.4]).

D'autre part, on définit également la **transposé** ${}^t f = \tau_*(f)$ dans $\mathrm{Hom}(Y, X)$ d'une correspondance f de $\mathrm{Hom}(X, Y)$ où $\tau\colon X \times Y \to Y \times X$ est la permutation des points, i.e. $\tau(x, y) = (y, x)$.

Enfin, si X est une variété définie sur le corps de base k et $\mathbb{L}/k$ est une extension de corps on désigne par $X_{\mathbb{L}}$ la variété X définie sur $\mathbb{L}$. On dit qu'un cycle f de $\mathrm{CH}^*(X_{\mathbb{L}})$ est **défini sur** k, si f est dans l'image de l'homomorphisme de restriction $\mathrm{res}_{\mathbb{L}/k}\colon \mathrm{CH}^*(X) \to \mathrm{CH}^*(X_{\mathbb{L}})$. De même, on dira qu'une correspondance est définie sur k, si elle l'est en tant que cycle. On dira souvent par la suite qu'un cycle ou une correspondance est **rationnel** s'il est défini sur k.

Ces préliminaires terminés, nous allons maintenant prouver que les variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ sont isomorphes dans la catégorie $\mathfrak{Corr}_k^0$ et qu'il s'agit par conséquent d'un isomorphisme motivique.

Nous allons maintenant nous employer à prouver l'isomorphisme. Pour cela nous allons procéder en trois étapes. Nous allons prouver qu'un tel isomorphisme existe lorsque les variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ sont déployées. Ensuite, nous allons établir un théorème de nilpotence et enfin, grâce à ce théorème de nilpotence, nous prouverons l'isomorphisme en toute généralité.

7 Isomorphisme

Nous nous plaçons dans le cas où les variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ sont déployées, nous vous rappelons que cela signifie que l'algèbre d'octonions sur laquelle le groupe de type G_2 agit l'est, ou encore de façon équivalente que la forme quadratique q définie sur l'algèbre des octonions est isotrope. Nous allons donc établir qu'il existe un cycle de degré 0 qui réalise un isomorphisme entre $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$.

7.1 Cas déployé

Pour prouver cet isomorphisme il nous faut donc trouver deux cycles f et g, f dans $\mathrm{Hom}(\mathcal{X}(\alpha_1), \mathcal{X}(\alpha_2))$ et g dans $\mathrm{Hom}(\mathcal{X}(\alpha_2), \mathcal{X}(\alpha_1))$ tels que $g \circ f = \Delta_1$ et $f \circ g = \Delta_2$ où Δ_1 et Δ_2 désignent respectivement la classe de l'application diagonale de $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$. Si Δ_1 est déjà connu, il va nous falloir expliciter Δ_2.

Nous allons commencer par fixer quelques notations. Soit j un entier naturel de l'ensemble $\{0, \dots, 5\}$, nous appelons h_1^j le générateur de $\mathrm{CH}^j(\mathcal{X}(\alpha_1))$ et h_2^j celui de $\mathrm{CH}^j(\mathcal{X}(\alpha_2))$. Les relations multiplicatives entre ces générateurs sont désormais (presque totalement) déterminées (cf. sous-section 5.3). En outre, comme $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ ont toutes les deux[6] une structure cellulaire , $\mathcal{X}(\alpha_1) \times \mathcal{X}(\alpha_1)$, $\mathcal{X}(\alpha_1) \times \mathcal{X}(\alpha_2)$, $\mathcal{X}(\alpha_2) \times \mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2) \times \mathcal{X}(\alpha_2)$ en ont également une que l'on déduit de celle de $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ (voir [Kar01, Défi. 7.2]). Ceci nous permet d'établir le résultat suivant :

Lemme 6. *Les applications*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_i)) \otimes \mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_j)) & \to & \mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_i) \times \mathcal{X}(\alpha_j)) \\ (f \otimes g) & \mapsto & f \times g \end{array}$$

où i et j parcourent $\{1, 2\}$, sont des isomorphismes.

En fait, ce résultat est plus général ; il est vérifié dès que les deux variétés ont une structure cellulaire.

D'après le lemme 6, les générateurs de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_i) \times \mathcal{X}(\alpha_j))$ s'expriment en fonction de ceux de $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1))$ et $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2))$. En particulier, en tant qu'anneaux, ils sont sans torsion.

Remarque 6. *On retrouve de cette façon un résultat déjà établi dans [Köc91, Cor. 1.5].*

Nous sommes maintenant en mesure d'en déduire l'expression de l'application diagonale de $\mathcal{X}(\alpha_2)$:

Lemme 7.

$$\Delta_2 = \sum_{i=0}^{5} h_2^i \times h_2^{5-i}$$

Démonstration. Tout ce qu'il y a faire ici, c'est de prouver que le cycle $\sum_{i=0}^{5} h_2^i \times h_2^{5-i}$ agit trivialement sur les générateurs de $\mathrm{End}(\mathcal{X}(\alpha_2)) = \mathrm{CH}^5(\mathcal{X}(\alpha_2) \times \mathcal{X}(\alpha_2))$. D'après le lemme 5 on a :

$$(h_2^i \times h_2^{5-i}) \circ (h_2^j \times h_2^{5-j}) = \begin{cases} \deg(h_2^{5-j} \cdot h_2^i)(h_2^j \times h_2^{5-i}) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $i = j$, nous devons tout d'abord calculer $h_2^{5-i} \cdot h_2^i$ pour toutes les valeurs de j possibles, à savoir 0, 1 et 2. Il est tout d'abord clair en vertu de ce que nous avons calculé que

$$h_2^0 \cdot h_2^5 = h_2^5 \cdot h_2^0 = h_2^5$$

et que

$$h_2^1 \cdot h_2^4 = h_2^4 \cdot h_2^1 = h_2^5.$$

[6]La structure cellulaire de $\mathcal{X}(\alpha_1)$ bien que non décrite ici est en fait classique et bien connue.

Pour $j=2$, nous calculons tout d'abord

$$\begin{aligned}2h_2^2 \cdot h_2^3 &= (h_2^1)^2 \cdot h_2^3 \\ &= h_2^1 \cdot 2h_2^4 \\ &= 2h_2^5\end{aligned}$$

et par conséquent nous avons

$$h_2^2 \cdot h_2^3 = h_2^3 \cdot h_2^2 = h_2^5,$$

en vertu de quoi nous concluons que

$$\deg(h_2^{5-j} \cdot h_2^j) = \deg(h_2^5) = 1$$

pour tout indice j de l'ensemble $\{0, \ldots, 5\}$ et de là, nous en déduisons que pour tout indice j,

$$(\sum_{i=0}^{5} h_2^i \times h_2^{5-i}) \circ (h_2^j \times h_2^{5-j}) = h_2^j \times h_2^{5-j}$$

et de l'unicité de l'élément neutre nous concluons que

$$\Delta_2 = \sum_{i=0}^{5} h_2^i \times h_2^{5-i}.$$

$\square$

Nous allons maintenant exprimer le cycle réalisant l'isomorphisme motivique dans le cas déployé.

Proposition 3. *Soit*

$$J = \sum_{i=0}^{5} h_1^i \times h_2^{5-i} \in \mathrm{CH}^5(\mathcal{X}(\alpha_1) \times \mathcal{X}(\alpha_2)),$$

J réalise un isomorphisme motivique entre $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ dont l'inverse est ${}^tJ$.

Démonstration. Nous pouvons nous contenter de prouver que $J \circ^t J = \Delta_2$. Pour cela nous utilisons une fois encore le lemme 5 pour calculer :

$$(h_1^i \times h_2^{5-i}) \circ (h_2^j \times h_1^{5-j}) = \begin{cases} \deg(h_1^{5-j} \cdot h_1^i)(h_2^j \times h_2^{5-i}) & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et là encore nous avons

$$\deg(h_1^{5-j} \cdot h_1^i) = \deg(h_1^5) = 1$$

puisque

$$\begin{aligned}(h_1^1)^2 &= h_1^2 \\ (h_1^1)^3 &= 2h_1^3 \\ (h_1^1)^4 &= 2h_1^4 \\ (h_1^1)^5 &= 2h_1^5\end{aligned}$$

comme le lecteur pourra s'en assurer en consultant [Kar90]. Par conséquent, il vient tout naturellement en développant que

$$J \circ^t J = \sum_{i=0}^{5} h_2^i \times h_2^{5-i} = \Delta_2$$

et J est donc bien un isomorphisme motivique entre $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ comme annoncé. □

Nous établissons maintenant un théorème de nilpotence pour $\mathcal{X}(\alpha_2)$ comme M. Rost l'a fait dans [Ros90] dans le cas des quadriques.

7.2 Théorème de nilpotence et conséquence

En premier lieu, nous reproduisons ici quelques résultats établis par M. Rost dans [Ros90, §1].

Tout d'abord, on désigne par X et B deux variétés algébriques lisses sur le corps de base k et $\pi\colon B \times X \to B$ la première projection. Pour tout élément b de B, $X_b = Spec\ k(b) \times_k X$ désigne la fibre au-dessus de b et $k(b)$ le corps résiduel en b. Pour toute correspondance f de $\mathrm{End}(X)$, on note $f_b \in \mathrm{End}_{\mathfrak{Corr}^0_{(k(b))}}(X_b)$ l'élément obtenu par changement de base.

Les deux résultats suivants sont démontrés dans [Ros90, §1].

Proposition 4. *Soit $f \in \mathrm{End}(X)$ et supposons que*

$$(f_b)_* (\mathrm{CH}_i(X_b)) = 0$$

pour tout $b \in B$ et tout $i \in \{0, \ldots, \dim B\}$. Alors

$$f^{(1+\dim B)} \circ \mathrm{Hom}(B, X) = 0.$$

Remarque 7. *La puissance de f est prise dans l'anneau* $\mathrm{End}(X)$.

Nous établissons maintenant le résultat suivant :

Lemme 8. *Si $\mathcal{X}(\alpha_2)$ est déployée, alors*

$$\mathrm{End}(\mathcal{X}(\alpha_2)) = \oplus^i \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} \left(\mathrm{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_2))\right).$$

Démonstration. D'aprés [Ros90, Lem. 6] ce résultat est vrai pour les quadriques déployées[7]. Il est donc vrai pour $\mathcal{X}(\alpha_1)$ lorsqu'elle l'est. Nous savons maintenant que dans ce cas $\mathcal{X}(\alpha_2)$ lui est isomorphe. Ce résultat est donc également vrai pour $\mathcal{X}(\alpha_2)$. □

Nous énonçons maintenant notre théorème de nilpotence.

Proposition 5 (Théorème de nilpotence). *Soit $f \in \mathrm{End}(\mathcal{X}(\alpha_2))$ et $\mathbb{L}/k$ une extension quelconque du corps de base k. Si $f_{\mathbb{L}} = 0 \in \mathrm{End}_{\mathfrak{Corr}^0_{\mathbb{L}}}(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{L}})$, alors il existe un entier n tel que $f^n = 0$.*

[7]Dans l'article de M. Rost, le résultat est établi sur les dimensions mais comme nous travaillons avec des variétés irréductibles nous pouvons passer à la codimension sans problème.

Démonstration. Dans le cas où $\mathcal{X}(\alpha_2)$ est déployée, comme

$$\mathrm{End}(\mathcal{X}(\alpha_2)) = \oplus_i \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}\left(\mathrm{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_2))\right),$$

le fait que $f_{\mathbb{L}} = 0$ implique nécessairement que $f = 0$ car $\mathrm{End}(\mathcal{X}(\alpha_2))$ est invariant par extension.

Si maintenant nous sommes dans le cas où $\mathcal{X}(\alpha_2)$ n'est pas déployée, on applique alors la propositon de M. Rost avec $B = \mathcal{X}(\alpha_2)$. Nous allons également devoir utiliser, et donc prouver, le résultat suivant :

Lemme 9. *Pour tout $x \in \mathcal{X}(\alpha_2)$, la fibre $\mathcal{X}(\alpha_2)_x$ est déployée.*

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{X}(\alpha_2)_x$ a un point rationnel et en conséquence, il existe un plan P de l'algèbre d'octonions O tel que la trace restreinte à P est identiquement nulle et que le produit de deux éléments quelconques de P est lui aussi nul. Nous avons déja fait remarquer (cf. sous-section 3.3) que dans ce cas là, P est totalement isotrope. Ainsi, la forme quadratique q sur O est également isotrope, d'où O est déployée d'après le théorème 1.8.1 de [SV]. Par conséquent, $\mathcal{X}(\alpha_2)_x$ est déployée. □

$\mathcal{X}(\alpha_2)_x$ etant totalement déployée, en utilisant ce que l'on à déjà dit en début de preuve, $(f_x)_{\mathbb{L}} = 0$ implique que $f_x = 0$. Dès lors, on peut appliquer la proposition de M. Rost (la condition $(f_x)_* (\mathrm{CH}_i(\mathcal{X}(\alpha_2)_x)) = 0$ est trivialement vérifiée) et en déduire que

$$f^6 = 0.$$

Le résultat est donc établi. □

De ce résultat nous déduisons un théorème d'isomorphisme :

Corollaire 3 (Théorème d'isomorphisme). *Sous les hypothèses précedentes, si $f_{\mathbb{L}}$ est un isomorphisme alors f en est un.*

Démonstration. Si $\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{L}}$ n'est pas déployée, elle l'est sur une extension plus grande. En conséquence, quitte à passer sur une autre extension, nous pouvons supposer que $\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{L}}$ est déployée. En utilisant le lemme 8, nous constatons que

$$\mathrm{End}(\mathcal{X}(\alpha_2)) = \oplus_{i=0}^{5} \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_2)))$$

et ainsi $f_{\mathbb{L}}$ est totalement déterminée par son action sur les groupes $\mathrm{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_2)) \simeq \mathbb{Z}$. D'où $f_{\mathbb{L}}$ satisfait l'équation $t^2 - 1 = 0$. Ainsi, $f_{\mathbb{L}}^2 = (\Delta_2)_{\mathbb{L}}$ et d'après la proposition 5, nous en déduisons que $f^2 = \Delta_2 + g$, où g est un élément nilpotent. En conclusion, f est un automorphisme. □

Remarque 8. *V. Chernousov, S. Gille et A. Merkurjev ont depuis généralisés ce résultat (et le théorème de nilpotence 5) dans leur preprint [CGM03, Th. 7.4].*

Nous allons maintenant établir que le cycle J est rationnel et ainsi être en mesure de conclure que l'isomorphisme motivique est aussi réalisé dans le cas anisotrope.

7.3 Cas anisotrope

Nous supposons à présent que les variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ sont anisotropes sur le corps de base k. Nous considérons alors $\mathbb{K}$ une clôture algébrique de k et les variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}$ sont, elles, clairement déployées. Comme précédemment, nous désignons alors par, h_1^i et h_2^i les générateurs respectifs de $\mathrm{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}})$ et $\mathrm{CH}^i(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})$. Nous annonçons maintenant :

Proposition 6. *Le cycle*

$$J = \sum_{i=0}^{5} h_1^i \times h_2^{5-i} \in \mathrm{CH}^5(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} \times \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})$$

est rationnel.

Démonstration. Sur $\mathbb{K}$, les variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}$ sont déployées et admettent une structure cellulaire. Par conséquent, comme nous l'avons déjà fait remarquer

$$\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}) \otimes \mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}) \simeq \mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} \times \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})$$

et donc $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} \times \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})$ est engendré par les $h_1^i \times h_2^j$. Pour prouver la rationnalité de J, nous allons procéder en plusieurs étapes et pour cela démontrer les deux lemmes suivants :

Lemme 10. *Le cycle $h_2^1 \in \mathrm{CH}^1(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})$ est rationnel.*

Démonstration. Lorsque nous avons calculé la structure cellulaire de $\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}$ (cf. section 4) nous avons trouvé que le premier terme de la filtration admettait pour R-points ($R \in \mathfrak{Alg}_{.k}$) :

$$\mathcal{X}_4(R) = \{P \in \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \mid \mathrm{rg}(P \cap (V_7)_R) \geqslant 2,\ \mathrm{rg}(P \cap (V_5)_R) \geqslant 1\}$$

et la classe de l'adhérence de la cellule associée à ce terme est justement h_2^1. Par ailleurs, le groupe de Chow de la grassmanienne $\Gamma_2(H)$ a également un seul générateur en codimension 1 et ce générateur est la classe de l'adhérence de la cellule de Schubert associée à la variété dont les R-points sont

$$\Gamma_2(H)_{(1,0)}(R) = \{P \in \Gamma_2(H)(R) \mid \mathrm{rg}(P \cap (V_7)_R) \geqslant 2,\ \mathrm{rg}(P \cap (V_5)_R) \geqslant 1\}.$$

Nous constatons ainsi que $\mathcal{X}_4(R) = \mathcal{X}(\alpha_2)(R) \cap \Gamma_2(H)_{(1,0)}(R)$. Il est d'autre part connu que $\Gamma_2(H)_{(1,0)}$ est définie sur k, par conséquent $\mathcal{X}_4$ l'est aussi et par suite h_2^1 est un cycle rationnel. □

Lemme 11. *Le cycle $c = h_1^0 \times h_2^3 + h_1^3 \times h_2^0 \in \mathrm{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} \times \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})$ est rationnel.*

Démonstration. Pour établir la rationalité de c, nous considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} \times \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}) \arrow[r, "(id_{\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}} \times p_{\mathbb{K}})^*"] & \mathrm{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})}) \\
\mathrm{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1) \times \mathcal{X}(\alpha_2)) \arrow[r, "(id_{\mathcal{X}(\alpha_1)} \times p)^*"] \arrow[u, "\mathrm{res}_{\mathbb{K}/k}"] & \mathrm{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1)_{k(\mathcal{X}(\alpha_2))}) \arrow[u, "\mathrm{res}_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})/k(\mathcal{X}(\alpha_2))}"']
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont les pull-backs par rapport aux morphismes plats

$$id_{\mathcal{X}(\alpha_1)} \times p \colon \mathcal{X}(\alpha_1)_{k(\mathcal{X}(\alpha_2))} \to \mathcal{X}(\alpha_1) \times \mathcal{X}(\alpha_2)$$

et

$$id_{\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}} \times p_{\mathbb{K}} \colon \mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})} \to \mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} \times \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}$$

où p (resp. $p_{\mathbb{K}}$) est le morphisme point générique de $\mathcal{X}(\alpha_1)$ (resp. $\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}$).

Il est clair que la forme quadratique q est isotrope sur $k(\mathcal{X}(\alpha_2))$ (comme tout à l'heure dans le lemme 9 nous rajoutons un point rationnel à $\mathcal{X}(\alpha_1)$). Par conséquent, elle est totalement isotrope (par le même argument que dans la preuve du lemme 9) et $(h_1^3)_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})}$ est défini sur $k(\mathcal{X}(\alpha_2))$ (puisque dans ce cas là, tous les cycles le sont). Comme $(id_{\mathcal{X}(\alpha_1)} \times p)^*$ est surjective (voir par exemple [IK00, §5, Prop. 5.1]), il en découle, qu'il existe un cycle $d \in \mathrm{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} \times \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})$ défini sur k tel que

$$(id_{\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}} \times p_{\mathbb{K}})^*(d) = (h_1^3)_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})}.$$

Nous calculons maintenant l'action de $(id_{\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}} \times p_{\mathbb{K}})^*$ sur les éléments engendrant le groupe $\mathrm{CH}^3(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}} \times \mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})$:

$$(id_{\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}} \times p_{\mathbb{K}})^*(h_1^i \times h_2^{3-i}) = \begin{cases} (h_1^3)_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})} & \text{si } i = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et comme $(id_{\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}} \times p_{\mathbb{K}})^*(d) = (h_1^3)_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})}$, il s'ensuit que

$$d = h_1^3 \times h_2^0 + \sum_{i=1}^{2} a_i h_1^i \times h_2^{3-i} + a h_1^0 \times h_2^3$$

pour a_1, a_2 et a dans $\mathbb{Z}$. Nous savons que h_2^1 est rationnel d'après le lemme 10 donc $(h_2^1)^2 = l h_2^2$ l'est. D'autre part, par un argument de transfert, $2h_2^2$ est aussi rationnel et comme l est impair (comme nous l'avons prouvé à la fin de la sous-section 5.3), h_2^2 est rationnel. D'autre part, h_1^1 est aussi un cycle rationnel, ce résultat classique relève du même argument que pour h_2^1 et enfin, comme $h_1^2 = (h_1^1)^2$, c'est aussi un cycle rationnel. De là, nous déduisons que $h_1^1 \times h_2^2$ et $h_1^2 \times h_2^1$ sont rationnels. De la même façon, $h_1^0 \times h_2^2$ et $h_1^0 \times h_2^2$ sont aussi rationnels et comme nous pouvons écrire que

$$2h_1^0 \times h_2^3 = (h_1^0 \times h_2^1) \cdot (h_1^0 \times h_2^2),$$

il s'ensuit que le cycle $2h_1^0 \times h_2^3$ est lui aussi rationnel. Dès lors en soustrayant des multiples de ces cycles à d, il en découle que selon la parité de a, soit $h_1^3 \times h_2^0$ est rationnel, soit $h_1^3 \times h_2^0 + h_1^0 \times h_2^3$ l'est. Dans ce dernier cas, la preuve est terminée. Dans l'autre cas, nous devons refaire exactement le même raisonnement avec $\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}})}$ au lieu de $\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}(\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}})}$, avec l'hypothèse que $h_1^3 \times h_2^0$ est rationnel, pour en déduire que $h_1^0 \times h_2^3$ l'est aussi. Dans tous les cas, nous pouvons conclure que

$$c = h_1^3 \times h_2^0 + h_1^0 \times h_2^3$$

est un cycle rationnel. □

Les arguments précédents, nous montrent que les cycles $h_1^1 \times h_2^1$ et $h_1^2 \times h_2^0$ sont rationnels. Par conséquent, les cycles

$$(h_1^0 \times h_2^2) \cdot c = h_1^3 \times h_2^2 + h_1^0 \times h_2^5$$
$$(h_1^1 \times h_2^1) \cdot c = h_1^4 \times h_2^1 + l h_1^1 \times h_2^4$$
$$(h_1^2 \times h_2^0) \cdot c = h_1^5 \times h_2^0 + h_1^2 \times h_2^3$$

sont également rationnels. D'autre part, par un argument de transfert, $2h_1^1 \times h_2^4 = h_1^1 \times 2h_2^4$ est rationnel et comme l est impaire,

$$h_1^1 \times h_2^4 + h_1^4 \times h_2^1$$

est rationnel. Le cycle J étant égal à la somme des trois cycles, $h_1^3 \times h_2^2 + h_1^0 \times h_2^5$, $h_1^1 \times h_2^4 + hun^4 \times h_2^1$ et $h_1^5 \times h_2^0 + h_1^2 \times h_2^3$, il est par voie de conséquence rationnel. □

Le fait que J soit rationnel signifie qu'il existe une correspondance f telle que $f_{\mathbb{K}} = J$. Nous avons établi dans la proposition 3 que J établit un isomorphisme entre $\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}$. De même, ${}^tJ$ établit un isomorphisme entre $\mathcal{X}(\alpha_2)_{\mathbb{K}}$ et $\mathcal{X}(\alpha_1)_{\mathbb{K}}$ et est également rationnel comme transposé d'un cycle rationnel. Ainsi, d'après le théorème d'isomorphisme (cf. corollaire 3), $f \circ^t f$ et ${}^tf \circ f$ sont des automorphismes motiviques de $\mathcal{X}(\alpha_2)$ et $\mathcal{X}(\alpha_1)$ respectivement. Par conséquent, f réalise un isomorphisme motivique de $\mathcal{X}(\alpha_1)$ dans $\mathcal{X}(\alpha_2)$.

Nous avons donc prouvé que les variétés $\mathcal{X}(\alpha_1)$ et $\mathcal{X}(\alpha_2)$ bien que non isomorphes en tant que variétés algébriques lisses sont motiviquement isomorphes.

Références

[B] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, volume 126 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[Car14] É. Cartan, *Les groupes réels simples finis et continus*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **31**, 263–355, 1914.

[Car52] É. Cartan, *Œuvres Complètes. Partie I. Groupes de Lie*, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[CGM03] V. Chernousov, S. Gille and A. Merkurjev, *Motivic decomposition of isotropic projective homogeneous varieties*, Preprint, 2003. (voir `http ://www.mathematik.uni-bielefeld.de/lag/`).

[Dem74] M. Demazure, *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **7** (4), 53–88, 1974. Collection of Henri Cartan on the occasion of his 70th Birthday, I.

[Dem77] M. Demazure, *Automorphismes et déformations des variétés de Borel*, Invent. Math. **39** (2), 179–186, 1977.

[DG] M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes Algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs.* Masson & Cie, Éditeur, Paris, 1970. Avec un appendice *Corps de classes local* par Michel Hazewinkel.

[EH] D. Eisenbud and J. Harris, *The Geometry of Schemes*, volume 197 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2000.

[F] W. Fulton, *Intersection Theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics].* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.

[Gar99] R.S. Garibaldi, *Exceptional algebraic groups*, ETH Zürich, Summer Semester 1999. (voir `http ://www.mathcs.emory.edu/ skip/classes/eag/eag.html`).

[IK00] O. Izhboldin and N. A. Karpenko, *Some new examples in the theory of quadratic forms.* Math. Z. 234 (4), 647–695, 2000.

[Kar90] N. A. Karpenko, *Algebro-geometrico invariants of quadratics forms.*, Leningrad Math. J. **2** (1), 119–138, 1991.

[Kar01] N. A. Karpenko, *Cohomology of relative cellular spaces and isotropic flag varieties*, St-Petersburg Math. J. **12**, 1–50, 2001.

[Köc91] B. Köck, *Chow motif and higher Chow theory of G/P*, Manuscripta math. **70** (4), 363–372, 1991.

[M] L. Manivel, *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence*, volume 3 des *Cours spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 1998.

[Mar76] R. Marlin, *Comparaison de l'anneau de Chow et de l'anneau de Grothendieck*. Dans le Séminaire de géométrie analytique (École Norm. Sup., Paris, 1974–75), 229–240. Astérisque, n. 36-37. Soc. Math. France, Paris, 1976.

[MPW96] A. S. Merkurjev, I. Panin, and A. R. Wadsworth, *Index reduction formulas for twisted flag varieties*, I, K-Theory **10** (6), 517–596, 1996.

[Ros90] M. Rost, *The motive of a Pfister form.* Preprint, 1990 (voir `http ://www.math.ohio-state.edu/ rost/motive.html`).

[S] R. D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*, volume 22 of Pure and Applied Math., Academic Press, New York–London, 1966.

[Sch62] G. J. Schellekens, *On a hexagonic structure. I*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **65** Indag. Math. **24**, 201–217, 1962.

[SV] T. A. Springer, F.D. Veldkamp, *Octonions, Jordan algebras and exceptional groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2000.