Rationalité du quotient d'une variété de Severi-Brauer par un automorphisme de Kummer

P. Gille, version préliminaire

November 20, 2003

Résumé. Soit S/k une variété de Severi-Brauer définie sur un corps k. Soit f un automorphisme de Kummer de S, c'est-à-dire un automorphisme d'ordre $n = dim_k(S) + 1$ à points fixes isolés. Si k contient une racine primitive n–ième de l'unité, alors le corps $k(S)^f$ des fonctions rationnelles de S invariantes par f est transcendant pur sur k.

Rationality of the quotient of a Severi-Brauer variety by a Kummer automorphism

Abstract. Let S/k be a Severi-Brauer variety defined over a field k. Let f be a Kummer automorphism of S, i.e. an automorphism of order $n = dim_k(S) + 1$ with finitely many fixed points. If k contains a primitive n-th root of unity, then the field $k(S)^f$ of f-invariant rational functions is purely transcendental over k.

1 Introduction.

Soient k un corps, A/k une algèbre simple centrale de degré n. Suivant Rost [1], on dit qu'un élément X de A est un élément de Kummer si son polynôme caractéristique P_X est de la forme $P_X(t) = t^n - a$. On note $S = SB(A)/k$ la variété de Severi-Brauer associée; c'est la variété des idéaux à droite de rang n de A. On note $GL(A)/k$ le groupe algébrique des éléments inversibles de A et $PGL(A) = GL(A)/\mathbb{G}_m$ son groupe adjoint. La variété S/k est un espace homogène sous $PGL(A)$ et par descente galoisienne, on sait que $\mathrm{Aut}_k(S) = PGL(A)$. Un automorphisme $f \in \mathrm{Aut}_k(S)(k) = A^\times/k^\times$ représenté par $X \in A^\times$ est dit de Kummer si l'élément X est de Kummer. De façon intrinsèque, un automorphisme f de S est de Kummer si et seulement s'il est d'ordre n et si sa sous–variété des points fixes est de dimension zéro. Cette Note a pour but d'établir la

Proposition 1.1 *On suppose que k contient une racine primitive n–ième de l'unité ζ. Soit f un automorphisme de Kummer de $S = SB(A)$. Alors le corps $k(S)^f$ des fonctions rationnelles de S invariantes par f est transcendant pur sur k.*

Notons que l'existence d'un automorphisme de Kummer sur S implique que A/k est une algèbre cyclique ([1], §1). Si $n = 2$, la proposition est évidente. En effet, dans ce cas, un couple (S, f) est une conique projective d'équation $x^2 - ay^2 = bz^2$ où $f(x : y : z) = (x : -y : z)$. Alors le corps $k(S)^f = k(x/z)$ est transcendant pur sur k.

La démonstration procède par réduction au cas d'une algèbre déployée.

Remerciements: Je remercie Jean-Louis Colliot-Thélène et Christophe Soulé pour leurs commentaires bienvenus sur une version préliminaire de cette Note.

Notations. Pour tout k–espace vectoriel V, on note $\mathbb{P}(V)/k$ l'espace projectif associé; en particulier, on note $\mathbb{P}^{n-1}_k = \mathbb{P}(k^n) = (\mathbb{A}^n_k \setminus \{0\})/\mathbb{G}_m$ l'espace projectif standard. Pour toute algèbre étale K/k, on note $R_{K/k}(\mathbb{G}_m)$ la restriction des scalaires à la Weil de K/k du tore standard $\mathbb{G}_m$, $N_{K/k} : R_{K/k}(\mathbb{G}_m) \to \mathbb{G}_m$ le morphisme de norme et $R^1_{K/k}(\mathbb{G}_m)$ son noyau. De plus, tout k–automorphisme σ de K définit un automorphisme $\sigma^* : R_{K/k}(\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} R_{K/k}(\mathbb{G}_m)$ commutant à la norme.

2 Descente

Pour $a \in k^\times$, on note f_a l'automorphisme d'ordre n de k^n défini par

$$f_a(e_i) = e_{i+1} \quad (i = 0, .., n-2), \;\; f_a(e_{n-1}) = a\, e_1,$$

et $f_a : \mathbb{P}^{n-1}_k \to \mathbb{P}^{n-1}_k$ l'automorphisme induit.

Lemme 2.1 *Soit $f = (Y)$ un élément de Kummer de A avec $Y^n = a \in k^\times$. Alors le corps $k(S)^f$ est k–isomorphe à $k(\mathbb{P}^{n-1})^{f_a}$.*

Démonstration. Suivant la section 1 de [1], il existe un élément de Kummer X de A tel que (X, Y) est une ζ–paire, i.e $XY = \zeta Y X$. On pose $b = X^n \in k^\times$ et alors la k–algèbre A a la présentation

$$X^n = b,\ \ Y^n = a,\ \ XY = \zeta Y X.$$

On pose $k_b = k(\sqrt[n]{b})/k$, c'est une extension galoisienne cyclique d'ordre m divisant n. On note τ le générateur de $\mathcal{G}al(k_b/k)$ satisfaisant $\tau.\sqrt[n]{b} = (\zeta)^{n/m}\sqrt[n]{b}$. L'extension k_b/k déploie l'algèbre A et de façon plus précise, on considère l'isomorphisme de k_b–algèbres

$$\begin{array}{ccc} M_n \otimes_k k_b & \xrightarrow[\sim]{\phi} & A \otimes_k k_b, \\ X_0 \otimes \sqrt[n]{b} & \mapsto & X \\ \widetilde{f_a} & \mapsto & Y \end{array}$$

où X_0 désigne l'endomorphisme de k^n défini par $X_0.e_i = \zeta^i e_i$ $(i = 0, .., n-1)$. On calcule alors le 1–cocycle associé $z : \mathcal{G}al(k_b/k) \to PGL_n(k_b)$ suivant la technique des k_b/k–formes ([2], §III.1). Il est défini par $z_\tau = \phi^{-1}\,{}^\tau\phi$ où ${}^\tau\phi = (id \otimes \tau) \circ \phi \circ (id \otimes \tau)^{-1}$. On effectue le calcul

$$\begin{aligned} {}^\tau\phi\Big(X_0 \otimes \sqrt[n]{b}\Big) &= \zeta^{-n/m}\,\Big((id \otimes \tau) \circ \phi\Big).\Big(X_0 \otimes \sqrt[n]{b}\Big) \\ &= \zeta^{-n/m}\,(id \otimes \tau).X \\ &= \zeta^{-n/m}\,X \\ &= \zeta^{-n/m}\,\phi\Big(X_0 \otimes \sqrt[n]{b}\Big). \end{aligned}$$

Par suite,

$$(\phi^{-1\tau}\phi).(X_0 \otimes \sqrt[n]{b}) = \zeta^{-n/m}\,(X_0 \otimes \sqrt[n]{b}) = f_a^{n/m}.(X_0 \otimes \sqrt[n]{b}).$$

On remarque que ${}^\tau\phi(\widetilde{f_a}) = Y = \phi(\widetilde{f_a})$ donc $(\phi^{-1\tau}\phi)(\widetilde{f_a}) = \widetilde{f_a} = f_a^{n/m}.\widetilde{f_a}$; on conclut que $z_\tau = \phi^{-1}\,{}^\tau\phi = f_a^{n/m}$. Par descente galoisienne, on a $A = {}_z(M_n)$, $S = {}_z(\mathbb{P}^{n-1})$ et le corps $k(S)$ est le corps des points fixes de $k_b(\mathbb{P})$ suivant l'action tordue de $\mathcal{G}al(k_b/k)$ par le cocycle z, c'est-à-dire

$$k(S) = \{\, g \in k_b(\mathbb{P}^{n-1}) \mid (f_a^{n/m})^*.\,{}^\tau g = g\}.$$

De plus, l'automorphisme f de $k(S)$ est le "descendu" de l'automorphisme f_a de $\mathbb{P}^{n-1}$, i.e $f = \phi f_a \phi^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned} k(S)^f &= \{ g \in k_b(\mathbb{P}^{n-1}) \mid (f_a^{n/m})^*.\, {}^\tau g = g \}^{f_a}. \\ &= \{ g \in k_b(\mathbb{P}^{n-1})^{f_a} \mid {}^\tau g = g \} = k(\mathbb{P}^{n-1})^{f_a}. \end{aligned} \qquad \square$$

3 Le cas déployé.

Lemme 3.1 *Le corps $k(\mathbb{P}^{n-1})^{f_a}$ est transcendant pur sur k.*

Notons tout d'abord que ce lemme joint au lemme précédent 2.1 entraîne immédiatement la proposition 1.1.

Démonstration. On note $L = k[x]/(x^n - a)$ et $\sqrt[n]{a}$ l'image de x dans L. La k–base $1, \sqrt[n]{a}, .., (\sqrt[n]{a})^{n-1}$ de L définit un isomorphisme de k–espace vectoriel

$$(k)^n \xrightarrow{\sim} L,$$

de sorte que $f_a = \times \sqrt[n]{a}$. On note σ le k–automorphisme de L défini par $\sigma.\sqrt[n]{a} = \zeta \sqrt[n]{a}$. On dispose alors d'un ouvert f_a–stable de $\mathbb{P}^{n-1}$

$$T = R_{L/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m \subset \mathbb{P}(L) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^{n-1}$$

qui est un k–tore algébrique. L'isomorphisme $(1-\sigma) : T \xrightarrow{\sim} R^1_{L/k}(\mathbb{G}_m)$ transforme l'action de $f_a = \times \sqrt[n]{a}$ sur T en la multiplication par $(1-\sigma)\sqrt[n]{a} = \zeta^{-1} \in R^1_{L/k}(\mathbb{G}_m)(k)$. Ainsi le sous–groupe $\langle f_a \rangle$ de T engendré par f_a s'identifie au sous–groupe diagonal $\mu_n \hookrightarrow R^1_{L/k}(\mathbb{G}_m)$. On forme alors le diagramme commutatif exact de k–tores algébriques

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
1 & \to & \mu_n & \xrightarrow{i} & R^1_{L/k}(\mathbb{G}_m) & \to & T/\langle f_a \rangle & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \wr & & \\
1 & \to & \mathbb{G}_m & \to & R_{L/k}(\mathbb{G}_m) & \to & \mathrm{R}_{L/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m & \to & 1. \\
 & & {\scriptstyle \times n}\downarrow & & {\scriptstyle N_{L/k}}\downarrow & & & & \\
1 & \to & \mathbb{G}_m & = & \mathbb{G}_m & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 1 & & 1 & & & &
\end{array}$$

Il résulte que le k–tore $T/\langle f_a \rangle$ est un ouvert de l'espace projectif $\mathbb{P}(L)$. On conclut que $T/\langle f_a \rangle$ est une variété k–rationnelle et le corps $k(T)^{f_a} = k(\mathbb{P}^{n-1})^{f_a}$ est transcendant pur sur k. □

Références

[1] M. Rost, *The chain lemma for Kummer elements of degree 3*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328** (1999), 185–190.

[2] J–P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Math. 5, 5–ième édition (1994), Springer–Verlag.

Philippe Gille, UMR 8628 du C.N.R.S., Mathématiques, Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, F-91405 Orsay, France. Courriel : gille@math.u-psud.fr.