Zéro-cycles de degré un sur les espaces homogènes

Mathieu Florence

Abstract

We explain how to build homogeneous spaces of a connected linear algebraic group, having zero-cycles of degree one but no rational point, even on a smooth compactification. Thus, we give a negative answer to a recent question asked by Burt Totaro. Parimala ([Pa]) has independently produced such spaces over fields of the type $k((t))$ (for k a suitable p-adic field), which are projective varieties. We use here a totally different approach: we apply a nonabelian cohomological machinery to a given extension of finite groups which is non-split, but split over every p-Sylow of the base. We give two precise examples: the first and easiest one, over the field $\mathbb{C}((x))((y))$; the second one, which requires a little more work, over a local or global field, and with finite abelian stabilizers. Both are rational varieties. [1]

1 Introduction

Nous nous intéressons dans cet article à la question suivante, posée par Burt Totaro ([To], Question 0.2) :

Question. *Soit G un groupe algébrique lisse connexe défini sur un corps k. Soit X une variété quasi-projective, munie d'une structure d'espace homogène sous G. Supposons qu'il existe un 0-cycle de degré $d > 0$ sur X. Peut-on alors dire que X possède un point dans une extension séparable de k, de degré divisant d ?*

[1]AMS Classification: 14L30

Nous donnons dans cette article une réponse négative à cette question. Plus précisément, nous exposons, sur un corps de caractéristique nulle, une méthode générale de construction d'un espace homogène X, sous un groupe réductif G, à stabilisateurs finis non abéliens, sans point rationnel mais possédant un 0-cycle de degré 1 (théorème 3.1). Nous donnons ensuite deux exemples particuliers: le premier, quasi immédiat, sur le corps $\mathbb{C}((x))((y))$ (section 3.2.1); le second, demandant une étude quelque peu plus poussée, sur un corps local ou un corps de nombres (théorème 3.9).
Dans toute la suite, la lettre k désigne un corps de caractéristique nulle, et $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. On note Γ le groupe de Galois de $\overline{k}/k$. Si X est un schéma défini sur k, nous notons $\overline{X}$ le $\overline{k}$-schéma $X \bigotimes_k \overline{k}$. Par définition, une k-variété X est dite rationnelle si $\overline{X}$ est $\overline{k}$-birationnelle à un espace affine. Par k-groupe, nous entendons un groupe algébrique linéaire défini sur k. Un exemple simple de k-groupe, dont nous faisons usage dans la suite, est le groupe multiplicatif d'une k-algèbre A de dimension finie sur k, noté $GL_1(A)$. Pour toute k-algèbre commutative B, nous avons donc $GL_1(A)(B) = (A \otimes_k B)^*$. Soit G un k-groupe. On note $\mathrm{Z}(G)$ le centre de G; si $H \subset G$ est un k-sous-groupe de G, on note $\mathrm{C}_G(H)$ le centralisateur de H dans G. On note $\mathrm{Aut}(G)$ le groupe d'automorphismes de G, $\mathrm{Inn}(G) = G/\mathrm{Z}(G)$ le sous-groupe distingué formé des automorphismes intérieurs, et $\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ le groupe des automorphismes extérieurs. Si $g \in G(\overline{k})$, l'automorphisme intérieur $x \mapsto gxg^{-1}$ est noté i_g. Soit $\overline{H} \subset \overline{G}$ un $\overline{k}$-sous-groupe de $\overline{G}$, et X un G-espace homogène (à droite). On dit que X est un espace homogène de stabilisateur $\overline{H}$ si X possède un point géométrique dont le stabilisateur est $\overline{H}$. Nous notons $H^1(k, G, \overline{H})$ les classes d'isomorphie de tels espaces.

Cet article n'aurait pas vu le jour sans les conseils et le soutien de Philippe Gille; nous l'en remercions vivement. Nous remercions également Jean-Claude Douai, David Harari, Boris Kunyavskii et Burt Totaro pour d'éclairantes conversations et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Nous remercions enfin Mikhaïl Borovoi et Ofer Gabber pour leurs précieuses suggestions.

2 Cohomologie

Nous établissons danc cette section les résultats de nature cohomologique qui serviront à construire le contre-exemple. Rappelons le fait élémentaire suivant : sur un k-schéma donné, la présence d'un 0-cycle de degré 1 équivaut à l'existence, pour tout p-Sylow S de Γ, d'un point rationnel défini sur le corps des points fixes de S. Nous sommes confrontés dans la suite à une situation analogue en cohomologie galoisienne non abélienne (cf [Sp] pour une exposition de cette théorie). Si $\overline{G}$ est un $\overline{k}$-groupe (non nécessairement défini sur k) et κ un k-lien, nous sommes en effet amenés à considérer l'objet suivant:

Définition. On note $\text{Ш}^2_{syl}(k, \overline{G}, \kappa)$ le sous-ensemble de $H^2(k, \overline{G}, \kappa)$ formé des classes de cohomologie x vérifiant la propriété suivante: il existe une famille d'extensions finies k_i/k, de degrés globalement premiers entre eux, telles que les restrictions $\mathrm{Res}_{k_i/k}(x)$ sont toutes neutres.

Une classe $x \in \text{Ш}^2_{syl}(k, \overline{G}, \kappa)$ peut être caractérisée, de façon équivalente, par la propriété suivante : pour tout nombre premier p et tout p-Sylow S de Γ, $\mathrm{Res}_{k_S/k}(x)$ est neutre, k_S désignant le corps des points fixes de S (cela découle de la conjugaison des p-Sylow et du fait qu'un automorphisme intérieur de Γ induit l'action triviale sur le H^2, cf [Sp], proposition 1.19). Tout comme $H^2(k, \overline{G}, \kappa)$, $\text{Ш}^2_{syl}(k, \overline{G}, \kappa)$ est marqué par l'ensemble des classes neutres. Il est clair que $\text{Ш}^2_{syl}(k, \overline{G}, \kappa)$ ne peut avoir d'intérêt que lorsque $\overline{G}$ n'est pas abélien. Néanmoins, cet ensemble est toujours réduit à l'ensemble des classes neutres dans deux cas particuliers importants:

Proposition 2.1 *Soit G un k-groupe. Soit $\kappa : \Gamma \longrightarrow SOut(\overline{G})$ le lien trivial. Toute classe de $\text{Ш}^2_{syl}(k, \overline{G}, \kappa)$ est neutre lorsque G est l'un des groupes suivants:*
(i) $GL_1(A)$, le groupe multiplicatif d'une k-algèbre de dimension finie,
(ii) $SL_1(A)$, le groupe spécial linéaire d'une algèbre simple centrale.

Démonstration. Occupons-nous d'abord du cas $G = GL_1(A)$. D'après [Bo], proposition 2.3, il nous faut montrer qu'un élément $\alpha \in H^2(k, \mathrm{Z}(GL_1(A)))$ est dans l'image de $H^1(k, PGL_1(A)) \longrightarrow H^2(k, \mathrm{Z}(GL_1(A)))$ si et seulement si sa restriction à des extensions finies k_i de k, de degrés premiers entre eux, l'est. Nous allons effectuer une réduction au cas $A = \mathrm{M}_n(k)$. On se ramène d'abord facilement au cas où A est simple. En effet, appelons R le radical de Jacobson de A. Soit $B = A/R$, c'est une algèbre semi-simple. La projection naturelle $GL_1(A) \longrightarrow GL_1(B)$ identifie $GL_1(B)$ au quotient de $GL_1(A)$ par son radical unipotent (autrement dit, le radical unipotent de $GL_1(A)$ est $1+R$). Dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^1(k, PGL_1(A)) & \xrightarrow{\pi_1} & H^1(k, PGL_1(B)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2(k, \mathrm{Z}(GL_1(A))) & \xrightarrow{\pi_2} & H^2(k, \mathrm{Z}(GL_1(B))), \end{array}$$

π_1 est donc une bijection et π_2 un isomorphisme. Nous pouvons ainsi supposer A semi-simple; A est alors produit d'algèbres simples. Or il est évident que la proposition est vraie pour un produit d'algèbres si et seulement si elle l'est pour chacun des facteurs du produit, on peut donc supposer A simple. Désignons par l le centre de A, c'est un corps. Appelons $\tilde{A}$ l'algèbre A vue comme l-algèbre. Désignant par $R_{l/k}$ le foncteur de restriction des scalaires à la Weil, on a un isomophisme canonique de k-groupes :

$$GL_1(A) \simeq R_{l/k}(GL_1(\tilde{A})).$$

L'isomorphisme de Shapiro, canoniquement compatible au diagramme commutatif précédent, permet donc de se ramener au cas où A est une k-algèbre simple centrale, de dimension n^2. Dans ce cas, $PGL_1(A)$ n'est autre que le groupe des automorphismes de la k-algèbre A, $H^1(\Gamma, PGL_1(A))$ classifie donc les k-formes de A, c'est-à-dire les algèbres simples centrales de rang n^2. Le choix d'un isomorphisme $A \otimes_k \overline{k} \simeq \mathrm{M}_n(\overline{k})$ détermine explicitement une bijection entre $H^1(\Gamma, PGL_1(A))$ et $H^1(\Gamma, PGL_n(k))$ selon la technique habituelle de torsion ([Se1], §5.3). On est donc ramené au problème suivant : soit $x \in Br(k)$ tel que $\mathrm{Res}_{k_i/k}(x)$ est, pour tout i, représenté par une algèbre simple centrale d'indice n. Il nous faut voir que x elle-même est représentée par une algèbre d'indice n. Soit D/k un corps gauche représentant x. On peut écrire $D = D_1 \otimes_k ... \otimes_k D_m$, où D_i est un corps gauche de degré p_i premier, les p_i étant distincts. Le produit tensoriel de deux corps gauches de degrés premiers entre eux étant encore un corps gauche, on en déduit que l'indice de D_i divise n pour tout i, en choisissant j tel que $p_i \nmid d_j$. L'indice de D divise donc n, ce qu'il fallait démontrer. Le cas de $SL_1(A)$, pour une algèbre simple centrale A de degré n, se ramène au précédent de façon très simple, puisque la flèche $H^1(k, PGL_1(A)) \longrightarrow H^2(k, \mathrm{Z}(GL_1(A)))$ se factorise par $H^2(k, \mathrm{Z}(SL_1(A))) = H^2(k, \mu_n)$. $\square$

Soit G un k-groupe, et $\overline{H}$ un sous-groupe de $\overline{G}$. Soit $\overline{N}$ le normalisateur de $\overline{H}$ dans $\overline{G}$. Si $\overline{H}$ est défini sur k, et si G et H sont abéliens, on a la suite exacte $H^1(k, G/H) \longrightarrow H^2(k, H) \longrightarrow H^2(k, G)$. Nous nous proposons de donner l'analogue de cette suite en général. Cela a déjà été fait dans [Sp], proposition 1.27; néanmoins, il semble que la flèche i^2_* n'est bien définie que si $\mathrm{C}_{\overline{G}}(\overline{H}) \subset \mathrm{Z}(\overline{G})$, une condition forte mais vérifiée dans la section 3. Pour construire le contre-exemple, nous devons aussi considérer une classe plus large d'espaces homogènes, faisant intervenir des formes intérieures de G. Dans la suite de cette section, nous expliquons les quelques modifications qu'il faut apporter dans notre contexte à la suite exacte 1.27 de [Sp].
Considérons un couple (G_1, ϕ_1), où G_1 est un k-groupe et $\phi_1 : \overline{G} \longrightarrow \overline{G_1}$ un $\overline{k}$-isomorphisme tel que $a_s = \phi_1^{-1}{}^s\phi_1$ est intérieur pour tout $s \in \Gamma$. Nous identifions (G_1, ϕ_1) et (G_2, ϕ_2) lorsque $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ est défini sur k. Ces couples forment alors un ensemble E, qui n'est en réalité qu'une façon commode pour la suite d'interpréter l'ensemble de cocycles $Z^1(k, \mathrm{Inn}(G))$. Soit donc $(G', \phi) \in E$ et un espace homogène X sous G', dont le stabilisateur d'un point $\overline{x} \in X(\overline{k})$ est $\phi(\overline{H})$. On peut associer à un tel espace homogène X un lien $l' : \Gamma \longrightarrow \mathrm{SAut}(\phi(\overline{H}))$ et une classe de cohomologie dans $H^2(k, \phi(\overline{H}), l')$ dépendant de x (cf [Sp], 1.20). Par transport de structure par ϕ, nous obtenons ainsi un lien $l : \Gamma \longrightarrow \mathrm{SAut}(\overline{H})$ et une classe de cohomologie $\xi \in H^2(k, \overline{H}, l)$. Il est facile de vérifier que, pour tout $\sigma \in \Gamma$, $l(\sigma)$ est la classe d'un semi-automorphisme de la forme $x \mapsto a_\sigma {}^\sigma x a_\sigma^{-1}$, $a_\sigma \in \overline{G}$. Appelons L l'ensemble de tous les liens $\lambda : \Gamma \longrightarrow \mathrm{SAut}(\overline{H})$ jouissant de cette propriété; cet ensemble est en général plus gros que l'ensemble Φ de Springer. Tout comme lui, nous identifions, pour $n \in \overline{N}$, les ensembles $H^2(k, \overline{H}, \lambda)$ et $H^2(k, \overline{H}, i_n \circ \lambda \circ i_n^{-1})$ grâce à i_{n*}^2 (cf [Sp], 1.20). Posons :

$$H^2(k, \overline{H}, \overline{G}) = \left(\coprod_{\lambda \in L} H^2(k, \overline{H}, \lambda) \right) / \overline{N}.$$

Modulo $\overline{N}$, ξ ne dépend pas du point $\overline{x}$ choisi; nous avons donc associé à X une classe bien définie $\delta_1(X) \in H^2(k, \overline{H}, \overline{G})$.
Notons $\kappa : \Gamma \longrightarrow \mathrm{SOut}(\overline{G})$ le lien trivial. Soit $l \in L$. D'après [Sp], 1.18 (où $\lambda = id$ et $\mu = i : \overline{H} \longrightarrow \overline{G}$), nous avons une relation i^2_* entre $H^2(k, \overline{H}, l)$ et $H^2(k, \overline{G}, \kappa)$.

Lemme 2.2 *Supposons que $C_{\overline{G}}(\overline{H}) \subset Z(\overline{G})$. La relation i^2_* est alors une fonction, et l'image par i^2_* d'une classe neutre est une classe neutre.*

Démonstration. Soit $x \in H^2(k, \overline{H}, l)$, et (f, g) un 2-cocycle représentant x. Il existe donc $a_s \in \overline{G}$ vérifiant $f_s(h) = a_s{}^s h a_s^{-1}$, et la condition $f_s \circ f_t = i_{g_{s,t}} \circ f_{st}$ est équivalente à $a_{st}^{-1} g_{s,t}^{-1} a_s{}^s a_t \in \mathrm{C}_{\overline{G}}({}^{st}\overline{H})$. L'hypothèse $\mathrm{C}_{\overline{G}}(\overline{H}) \subset \mathrm{Z}(\overline{G})$ montre alors que $\tilde{f}_s(a) = a_s{}^s a a_s^{-1}$ est un prolongement de f_s à $\overline{G}$, satisfaisant $\tilde{f}_s \circ \tilde{f}_t = i_{g_{s,t}} \circ \tilde{f}_{st}$. Cette même hypothèse implique que $\tilde{f}_s$ ne dépend pas du choix de a_s. Nous pouvons donc associer à x la classe de cohomologie de $(\tilde{f}, g)$ dans $H^2(k, \overline{G}, \kappa)$, classe qui ne dépend pas du choix initial de (f, g). Cette classe est la seule que i_*^2 mette en relation avec x, car, sous les hypothèses de ce lemme, un automorphisme intérieur de $\overline{G}$ est déterminé par sa restriction à $\overline{H}$. Ceci prouve que i_*^2 est une fonction. La dernière affirmation du lemme est immédiate, x étant neutre si et seulement si on peut choisir g égal à 1. □

Sous l'hypothèse de ce lemme, i_*^2 induit une flèche bien définie, toujours notée $i_*^2 : H^2(k, \overline{H}, \overline{G}) \longrightarrow H^2(k, \overline{G}, \kappa)$ (cf [Sp], 1.23). Nous sommes dès lors prêt à formuler le résultat annoncé :

Proposition 2.3 *Supposons que $C_{\overline{G}}(\overline{H}) \subset Z(\overline{G})$. La suite d'ensembles marqués suivante est alors exacte :*

$$\coprod_{(G',\phi)\in E} H^1(k, G', \phi(\overline{H})) \xrightarrow{\delta_1} H^2(k, \overline{H}, \overline{G}) \xrightarrow{i_2^*} H^2(k, \overline{G}, \kappa).$$

De plus, un G'-espace homogène X dans $H^1(k, G', \phi(\overline{H}))$ est d'image neutre par δ_1 si et seulement s'il existe un G'-torseur P et un morphisme G'-équivariant $P \longrightarrow X$.

Démonstration. Soit $x \in H^2(k, \overline{H}, \overline{G})$ d'image neutre dans $H^2(k, \overline{G}, \kappa)$. Prenons un 2-cocycle (f, h) représentant x. Il existe donc un morphisme continu $f'_s : \Gamma \longrightarrow \mathrm{SAut}(\overline{G})$ et $g_s \in \overline{G}$ tels que :

$$\tilde{f}_s(a) = g_s f'_s(a) g_s^{-1},$$

$$h_{s,t} = g_s f'_s(g_t) g_{st}^{-1}.$$

Le 1-cocycle $c_s(a) = f'_s({}^{s^{-1}}a)$ est donc à valeurs dans $\mathrm{Inn}(\overline{G})$. Soit $\overline{X} = \overline{H}\backslash\overline{G}$, avec l'action de Γ définie par ${}^s(\overline{H}a) = \overline{H} g_s f'_s(a)$. Il est aisé de voir que l'action naturelle de $\overline{G}$ sur $\overline{X}$ est Γ-équivariante pour l'action tordue par c de Γ sur $\overline{G}$. Nous avons ainsi construit un espace homogène X sous ${}^cG$, de stabilisateur $\overline{H}$, et il est immédiat de vérifier que son image par δ_1 n'est autre que x. Toutes les autres assertions sont démontrées dans [Sp], 1.27. □

3 Construction de contre-exemples

3.1 Méthode générale

Nous identifions ici un groupe fini B au k-groupe constant qui lui est associé. On a alors une écriture canonique $\mathrm{SAut}(\overline{B}) = \mathrm{Aut}(B) \times \Gamma$.

Théorème 3.1 *Supposons donnés un groupe fini P et une extension (de groupes topologiques) $1 \longrightarrow P \longrightarrow E \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$, non scindée, mais scindée au-dessus de tout p-Sylow de Γ. Il existe alors un k-groupe G' réductif connexe (le groupe multiplicatif d'une forme intérieure de l'algèbre $k[P]$), et un G'-espace homogène X, possédant les propriétes suivantes:*
(i) le stabilisateur d'un point géométrique de X est isomorphe à P,
(ii) X n'a pas de point k-rationnel, et il en est de même de toute compactification lisse de X,
(iii) X possède un 0-cycle de degré 1,
(iv) si le problème de Noether pour P admet une réponse positive, X est une variété rationnelle.

Démonstration. Appelons $\lambda : \Gamma \longrightarrow \mathrm{SOut}(\overline{P})$ le k-lien de E. Nous notons x la classe de E dans $Ш^2_{syl}(k, \overline{P}, \lambda)$. On a un diagramme commutatif évident, fonctoriel en k

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & GL_1(k[P]) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{Aut}(P) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(GL_1(k[P])), \end{array}$$

où les flèches verticales sont données par $g \mapsto i_g$. Ainsi, le lien λ se prolonge de façon naturelle en un lien $\tilde{\lambda} : \Gamma \longrightarrow \mathrm{SOut}(GL_1(\overline{k}[P]))$. Le corps k étant de caractéristique 0, $\overline{k}[P]$ est une algèbre semi-simple, donc $GL_1(\overline{k}[P])$ est réductif. Par un résultat de Douai ([Bo], proposition 3.1), $H^2(k, GL_1(\overline{k}[P]), \tilde{\lambda})$ contient une classe neutre, dont nous choisissons un représentant $(\phi, 1)$, où $\phi : \Gamma \longrightarrow \mathrm{SAut}(GL_1(\overline{k}[P]))$. Le morphisme ϕ se factorise en fait par le groupe des automorphismes semi-linéaires de la $\overline{k}$-algèbre $\overline{k}[P]$: cela découle simplement du fait que la flèche naturelle $\mathrm{Aut}(P) \longrightarrow \mathrm{Aut}(GL_1(k[P]))$ se factorise elle-même par le groupe des automorphismes de la k-algèbre $k[P]$. On obtient ainsi par descente une k-forme A de $k[P]$. Nous allons appliquer les résultats de la section 2 (dont nous conservons les notations) à $G = GL_1(A)$ et à $\overline{H} = \overline{P}$. L'hypothèse $\mathrm{C}_{\overline{G}}(\overline{H}) \subset \mathrm{Z}(\overline{G})$ est ici vérifiée: en effet, un élément de $\overline{k}[P]$ commutant avec P commute bien avec $\overline{k}[P]$ tout entier. De plus, le lien λ est, par construction de A, un élément de L. Par la proposition 2.1, $i_*^2(x)$ est donc neutre. D'après la proposition 2.3, il existe une forme intérieure G' de G (qui est donc tout comme G le groupe multiplicatif d'une k-algèbre de dimension finie) et un espace homogène X sous G', dont l'image par δ_1 est x. Montrons qu'une compactification lisse de X n'a pas de point k-rationnel; autrement dit, que $X(k((t)))$ est vide. Appelons Γ' le groupe de Galois absolu de $k((t))$. Si $X(k((t)))$ était non vide, d'après la proposition 2.3, le pullback de E par la surjection canonique $\Gamma' \longrightarrow \Gamma$ serait scindé. Mais alors, l'extension E elle-même serait scindée, puisque la surjection $\Gamma' \longrightarrow \Gamma$ l'est, ce qui est absurde. Nous remercions Ofer Gabber pour nous avoir signalé cet argument. Démontrons maintenant l'assertion iii). D'après une généralisation du théorème 90 de Hilbert ([Kn], 1.7, exemple 1), G' n'a pas de cohomologie en degré 1. Par le dernier point de la proposition 2.3, X a donc un point rationnel sur toutes les extensions de k correspondant à des p-Sylow de Γ, c'est-à-dire que X possède un 0-cycle de degré 1. Le reste est immédiat, vu l'isomorphisme birationnel $\overline{X} \simeq P \backslash \overline{k}[P]$.$\square$

3.2 Un contre-exemple particulier

Nous expliquons maintenant comment un raffinement de la construction précédente permet, sur un corps local ou sur un corps de nombres, d'obtenir comme contre-exemple un espace homogène sous un groupe spécial linéaire, qui soit une variéte rationnelle.

3.2.1 Une extension de groupes

Dans cette section, nous notons $P = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$, le groupe des quaternions, et $Q = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3$. Nous construisons un exemple d'extension

$$1 \longrightarrow P \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

scindée au-dessus de tout p-Sylow de Q, mais telle qu'aucun sous-groupe abélien de E ne s'envoie de façon surjective sur Q. En particulier, cette extension est non scindée.
L'injection

$$P \xrightarrow{\rho} SL_2(\mathbb{F}_3)$$

$$i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$j \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

fait de P l'unique 2-Sylow de $SL_2(\mathbb{F}_3)$. Nous notons σ l'élément $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_3)$, d'ordre 3. Considérons le produit π des projections $P \longrightarrow P/\mathrm{Z}(P)$ et $SL_2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow SL_2(\mathbb{F}_3)/P$. Le produit $P/\mathrm{Z}(P) \times SL_2(\mathbb{F}_3)/P$ étant isomorphe à Q, nous pouvons identifier π au morphisme explicite suivant, identiquement nul sur $\mathrm{Z}(P) \times P$:

$$P \times SL_2(\mathbb{F}_3) \xrightarrow{\pi} Q$$

$$(i, 1) \mapsto (1, 0, 0),\ (j, 1) \mapsto (0, 1, 0),\ (1, \sigma) \mapsto (0, 0, 1).$$

Appelons E le quotient de $P \times SL_2(\mathbb{F}_3)$ par le sous-groupe distingué à deux éléments engendré par $(-1, -1)$, et ρ le monomorphisme obtenu par composition de $1 \times \rho : P \longrightarrow P \times SL_2(\mathbb{F}_3)$ (1 désignant le morphisme nul) et de la projection canonique $P \times SL_2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow E$. Il est immédiat que π induit par passage au quotient une suite exacte

$$1 \longrightarrow P \xrightarrow{\rho} E \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1. \tag{1}$$

Lemme 3.2 *Les propriétés suivantes sont vérifiées:*
(i) La suite exacte (1) est scindée au-dessus de tout p-Sylow de Q.
(ii) Aucun sous-groupe abélien de E ne se projette de façon surjective sur Q.

Démonstration. C'est un exercice élémentaire. Tout d'abord, le sous-groupe de E engendré par $\overline{(1, \sigma)}$ (resp par $\overline{(i, i)}$ et $\overline{(j, j)}$) se projette isomorphiquement sur le 3-Sylow (resp le 2-Sylow) de Q. Ceci démontre le premier point. Supposons donnés deux éléments x et y de E, dont les images par π sont $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 1)$ respectivement. Montrons alors que x et y ne commutent pas, ce qui prouvera la seconde assertion. De la conjugaison des 3-Sylow de E résulte que l'on peut supposer, quitte à conjuguer x et y par un même élément, que $y = \overline{(j, \sigma)}$. Ecrivant $x = \overline{(i, p)}$, pour $p \in P \subset SL_2(\mathbb{F}_3)$, on constate que x et y commutent si et seulement si $p\sigma p^{-1} = -\sigma$. L'élément de gauche étant d'ordre 3, et celui de droite d'ordre 6, cette égalité est impossible. $\square$

Un premier contre-exemple. Prenons le corps k égal à $\mathbb{C}((x))((y))$. On a alors un isomorphisme $\Gamma \simeq \widehat{\mathbb{Z}} \times \widehat{\mathbb{Z}}$. Choisissons une surjection quelconque

$\Gamma \longrightarrow Q = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/6$. Le lemme précédent assure que le pullback de (1) par cette surjection est non scindé, et l'on peut appliquer le théorème 3.1, obtenant ainsi le premier contre-exemple promis dans l'introduction. L'espace homogène X ainsi construit est une variété rationnelle: en effet, le problème de Noether pour le groupe des quaternions à 8 éléments a une réponse positive (cf [Se2], 4.3).

3.2.2 Propriétés cohomologiques de l'extension (1)

Nous commençons par un lemme élémentaire:

Lemme 3.3 *(i) Le groupe Out(P) est isomorphe à S_3, vu comme groupe des permutations de l'ensemble* $\{\{i,-i\},\{j,-j\},\{k,-k\}\}$.
(ii) La suite exacte $1 \longrightarrow Inn(P) \longrightarrow Aut(P) \xrightarrow{\pi} Out(P) \longrightarrow 1$ *est scindée.*

Démonstration. Il est facile de voir qu'un automorphisme de P induit la permutation triviale si et seulement si il est intérieur. Nous obtenons ainsi une injection naturelle $\mathrm{Out}(P) \xrightarrow{\rho} S_3$. Pour prouver le lemme, il suffit dès lors de construire une section $S_3 \longrightarrow \mathrm{Aut}(P)$ du morphisme $\rho \circ \pi$. Celle-ci s'obtient comme suit. A la transposition $(\{i,-i\},\{j,-j\})$, on associe l'automorphisme de P envoyant i sur $-j$ et j sur $-i$ (et par conséquent k sur $-k$). A la permutation circulaire $(\{i,-i\},\{j,-j\},\{k,-k\})$, on associe l'automorphisme de P envoyant i sur j et j sur k (et par conséquent k sur i). Il est facile de vérifier que l'on définit bien ainsi la section cherchée. □

Considérons l'extension de groupe naturelle suivante, où la première flèche identifie $\mathbb{Z}/2$ au centre de P:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow P \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 1. \tag{2}$$

Cette extension induit une application bord:

$$H^1(k, \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2) = H^1(k, \mathbb{Z}/2) \times H^1(k, \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\delta_P} H^2(k, \mathbb{Z}/2).$$

Cette application, naturellement fonctorielle en k, peut être vue comme un invariant cohomologique au sens de [GMS], chapitre 1 (où l'on prend $k_0 = \mathbb{Q}$).

Lemme 3.4 *L'application δ_P est donnée par la formule:*
$\delta_P\big(x,y\big) = x \cup y + (-1) \cup xy$, *pour tout* $x, y \in k^*/k^{*2}$.

Démonstration. D'après le théorème 16.4 de [GMS], il existe $a, b, c, d \in k^*/k^{*2}$, et $\epsilon \in \mathbb{Z}/2$ tels que :

$$\delta_P\Big(x, y\Big) = a \cup b + c \cup x + d \cup y + \epsilon x \cup y.$$

Il est clair que l'on peut choisir a et b égaux à 1. Suivant le lemme 3.3, S_3 agit sur P, induisant une action de S_3 sur $P/\mathrm{Z}(P) = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. Le fait (évident) que S_3 agisse trivialement sur $Z(P) = \mathbb{Z}/2$ permet d'affirmer que δ_P est invariant par l'action de S_3 induite sur les groupes de cohomologie. Autrement dit, pour tout $\sigma \in S_3$, on a $\delta_P \circ \sigma = \delta_P$. En prenant pour σ une permutation, on en tire $\delta_P\Big(x, y\Big) = \delta_P\Big(y, x\Big)$; on peut donc choisir c égal à d. En prenant pour σ un 3-cycle, on obtient $\delta_P\Big(x, y\Big) = \delta_P\Big(y, xy\Big)$; autrement dit, après un calcul très simple, $c \cup y = \epsilon y \cup y = \epsilon(-1) \cup y$, et ce pour tout $y \in k^*/k^{*2}$. Si ϵ était nul, on en déduirait que δ_P lui-même, vu comme invariant cohomologique, serait nul. Ceci n'est pas le cas: en effet, il est facile de vérifier que le morphisme $x \mapsto \delta_P\Big(x, 0\Big)$ coincide avec la flèche $H^1(k, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^2(k, \mathbb{Z}/2)$ tirée de la suite exacte longue de cohomologie associé à la suite exacte $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathbb{Z}/4 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$. Or il est bien connu que cette flèche est le cup-produit par (-1), qui est un invariant non nul. Ainsi, ϵ est égal à 1, et l'on peut choisir c égal à (-1), ce qui clôt la démonstration du lemme.$\square$

Considérons l'extension (1) de la section 3.2.1. Notre prochain objectif est de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le pull-back de cette extension par un élément de $H^1(k, Q)$ soit scindé.
Composons le lien $\lambda : Q \longrightarrow \mathrm{Out}(P)$ associé à cette extension avec la section $\mathrm{Out}(P) \longrightarrow \mathrm{Aut}(P)$ du lemme 3.3. Nous obtenons ainsi une action de Q sur P; $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \subset Q$ agissant trivialement, et $\mathbb{Z}/3 \subset Q$ par permutation cyclique de i, j, k. Appelons E' le produit semi-direct $P \rtimes Q$ pour cette action, et ξ (resp. n) la classe de l'extension (1) (resp. $1 \longrightarrow P \longrightarrow E' \longrightarrow Q \longrightarrow 1$) dans $H^2(Q, P, \lambda)$. D'après [Sp], proposition 1.17, il existe un unique $\alpha \in H^2(Q, \mathbb{Z}/2)$ tel que $\xi = \alpha.n$. L'injection naturelle $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{i} Q$ induit un isomorphisme $H^2(Q, \mathbb{Z}/2) \simeq H^2(\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$, que nous utiliserons pour identifier ces deux groupes.

Lemme 3.5 *α est la classe de l'extension (2).*

Démonstration. Remarquons que le pull-back de E (resp. E') par i n'est autre que le produit semi-direct $P \rtimes \mathrm{Inn}(P)$ pour l'action naturelle de $\mathrm{Inn}(P)$

sur P (resp le produit $P \times \mathrm{Inn}(P)$). L'assertion à prouver est alors une conséquence du lemme suivant :

Lemme 3.6 *Soit G un groupe fini. Soit κ : $Inn(G) \longrightarrow Out(G)$ le lien trivial. Soit $\mu \in H^2(Inn(G), Z(G))$ la classe de l'extension $1 \longrightarrow Z(G) \longrightarrow G \longrightarrow Inn(G) \longrightarrow 1$. Soit a (resp. b) la classe de l'extension triviale (resp. du produit semi-direct $G \rtimes Inn(G)$ pour l'action naturelle de $Inn(G)$ sur G) dans $H^2(Inn(G), G, \kappa)$. On a la formule :*

$$b = (-\mu).a$$

Démonstration. Soit c : $\mathrm{Inn}(G) \longrightarrow G$ une section (ensembliste) de la projection naturelle. La classe $(-\mu).a$ est représentée par le 2-cocycle $z_1 = (1, c_\sigma c_\tau {c_{\sigma\tau}}^{-1})$, et b par $z_2 = (i_\sigma, 1)$. Il est alors clair que ces cocycles sont équivalents : on a la relation $c.z_1 = z_2$.$\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat promis. Si $z \in H^1(k, \mathbb{Z}/3)$, on note $H \subset \Gamma$ le noyau de z, et ${}^zP$ la forme tordue de P par l'action naturelle de $\mathbb{Z}/3$ sur P donnée par E'. Lorsque $z \neq 0$, on note l l'extension cubique de k correspondante, et σ le générateur de Γ/H dont l'image par z est 1.

Proposition 3.7 *Soit $h = (x, y, z) \in H^1(k, Q) = H^1(k, \mathbb{Z}/2) \times H^1(k, \mathbb{Z}/2) \times H^1(k, \mathbb{Z}/3)$. On a la formule $h^*\Big(\alpha\Big) = \delta_P\Big(x, y\Big) = x \cup y + (-1) \cup xy$.*
Le pull-back de (1) par h est scindé si et seulement si $z = 0$ ou s'il existe $a \in l^*/l^{*2}$ vérifiant $Cor_{l/k}\Big(-a \cup {}^\sigma a\Big) = h^*\Big(\alpha\Big)$.

Démonstration. La première formule découle des lemmes 3.4 et 3.5. Le reste de la proposition est évident si $z = 0$, puisque le 2-Sylow de Q se relève dans E. On suppose donc $z \neq 0$. D'après [Bo], proposition 2.3, le pull-back de (1) par h est scindé si et seulement si $h^*\Big(\alpha\Big)$ est dans l'image du bord $H^1(k, {}^zP/\mathrm{Z}({}^zP)) \xrightarrow{\delta_{{}^zP}} H^2(k, \mathbb{Z}/2)$ que nous allons maintenant calculer. Le Γ-module ${}^zP/\mathrm{Z}({}^zP)$ est isomorphe au noyau N de la suite exacte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow (\mathbb{Z}/2)[\Gamma/H] \xrightarrow{aug} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0.$$

En effet, σ agit sur ${}^zP$ par permutation cyclique de i, j, k. Le morphisme ${}^zP/\mathrm{Z}({}^zP) \longrightarrow (\mathbb{Z}/2)[\Gamma/H]$ donné par $\overline{i} \mapsto (1+\sigma)$ et $\overline{j} \mapsto (\sigma + \sigma^2)$ identifie ainsi ${}^zP/\mathrm{Z}({}^zP)$ à N.
La suite exacte longue de cohomologie associée montre alors que $H^1(k, N)$

est isomorphe au noyau du morphisme $H^1(k,(\mathbb{Z}/2)[\Gamma/H]) \longrightarrow H^1(k,\mathbb{Z}/2)$, c'est-à-dire la corestriction $H^1(l,\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{Cor} H^1(k,\mathbb{Z}/2)$. Le composé $\mathrm{Cor}_{l/k} \circ \mathrm{Res}_{l/k}$ étant l'identité de $H^1(k,\mathbb{Z}/2)$, la flèche δ_{z_P} s'identifie au composé $\mathrm{Ker}(l^*/l^{*2} \xrightarrow{N} k^*/k^{*2}) = \mathrm{Ker}(H^1(k,(\mathbb{Z}/2)[\Gamma/H]) \longrightarrow H^1(k,\mathbb{Z}/2)) \xrightarrow{Res}$ $\mathrm{Ker}(H^1(l,(\mathbb{Z}/2)[\Gamma/H]) \longrightarrow H^1(l,\mathbb{Z}/2)) \simeq H^1(l,\mathbb{Z}/2{\times}\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\delta_P} H^2(l,\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{Cor}$ $H^2(k,\mathbb{Z}/2)$,
où l'isomorphisme du milieu est donné par la projection sur deux facteurs (le choix de ces facteurs est sans importance). D'après le lemme 3.4, pour $a \in \mathrm{Ker}(l^*/l^{*2} \xrightarrow{N} k^*/k^{*2})$, on a $\delta_{z_P}\Big(a\Big) = Cor_{l/k}\Big(a \cup {}^{\sigma}a + (-1) \cup a\,{}^{\sigma}a\Big) = Cor_{l/k}\Big(-a \cup {}^{\sigma}a\Big)$. Nous avons ainsi démontré la proposition, avec la condition supplémentaire $a \in \mathrm{Ker}(l^*/l^{*2} \xrightarrow{N} k^*/k^{*2})$. Il est facile de voir que cette condition est en fait superflue: en effet, l'élément $Cor_{l/k}\Big(-a \cup {}^{\sigma}a\Big)$ n'est pas modifié si l'on remplace a par $a\,{}^{\sigma}a$, et la norme de ce dernier élément est toujours un carré. □

Comme conséquence du calcul de δ_{z_P}, nous obtenons le:

Corollaire 3.8 *Supposons que k est un corps local, de corps résiduel κ. Si la caractéristique de κ est différente de 2, on a $\delta_{z_P} = 0$. Pour que le pull-back de (1) par h soit scindé, il faut et il suffit donc que $h^*\Big(\alpha\Big) = 0$.*

Démonstration. Soit $a \in \mathrm{Ker}(l^* \xrightarrow{N} k^*/k^{*2})$. Ecrivons $a = \pi^r u$, avec π une uniformisante de l et u une unité; r est donc pair. On a $Cor_{l/k}\Big((a) \cup ({}^{\sigma}a)\Big) = Cor_{l/k}\Big((\pi^r u) \cup ({}^{\sigma}\pi^r\,{}^{\sigma}u)\Big) = Cor_{l/k}\Big((u) \cup ({}^{\sigma}u)\Big) = 0$.□

3.2.3 Le contre-exemple sur un corps p-adique ou sur un corps de nombres

Dans cette section, k est soit un corps p-adique, avec $p \neq 2$, soit un corps de nombres. On suppose que k contient les racines quatrièmes de l'unité. Nous allons montrer le

Théorème 3.9 *Il existe une algèbre de quaternions D/k, et un espace homogène X sous $PGL_1(D)$, à stabilisateurs isomorphes à $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, sans point k-rationnel, mais possédant un 0-cycle de degré 1. De plus, X est une variété rationnelle, et une compactification lisse de X ne peut pas posséder de point k-rationnel.*

Démonstration. Nous donnons la démonstration lorsque k est un corps de nombres; le lecteur pourra aisément se convaincre qu'elle contient celle où k est p-adique. Choisissons $x, y \in H^1(k, \mathbb{Z}/2)$ tels que l'image locale de $\gamma := \delta_P\big(x, y\big) = x \cup y$ en une place ultramétrique ν de k, dont le corps résiduel n'est pas de caractéristique 2, soit non nulle. Choisissons $z \in H^1(k, \mathbb{Z}/3)$ tel que ν soit inerte pour l'extension l/k. Notons $h = (x, y, z)$ l'élément de $H^1(k, Q)$ ainsi construit. Appelons F le pull-back de l'extension (1) par h, elle est donc non scindée d'après le corollaire 3.8. Notons H l'algèbre (déployée) des quaternions usuels sur k. Pour construire l'espace homogène X, suivons maintenant la méthode du théorème 3.1 à l'extension F, en la modifiant quelque peu, de façon à obtenir un espace homogène non pas sous le groupe multiplicatif d'une k-algèbre, mais sous le groupe spécial linéaire d'une algèbre de quaternions. Le théorème 3.1 pourrait s'appliquer sans changement, cela dit, les modifications mineures que nous allons faire permettent de se rapprocher d'un exemple minimal. Remplaçons donc $k[P]$ par H, et $GL_1(k[P])$ par $SL_1(H)$, le morphisme $P \longrightarrow SL_1(H)$ étant l'injection naturelle. On laisse au lecteur le soin de vérifier que les arguments utilisés restent valables dans cette nouvelle situation, avec les modifications évidentes qui s'imposent. On peut même ici se passer du recours à [Bo], proposition 3.1, en prenant pour $\tilde{\lambda}$ le composé $\Gamma \xrightarrow{\lambda} \mathrm{SOut}(\overline{P}) \xrightarrow{s} \mathrm{SAut}(\overline{P}) \longrightarrow \mathrm{SAut}(\overline{SL_1(H)})$, où s est naturellement induite par la section $\mathrm{Out}(P) \longrightarrow \mathrm{Aut}(P)$ du lemme 3.3. Le groupe G' ainsi obtenu est de la forme $SL_1(D)$, pour une algèbre simple centrale D. En vertu du principe de Hasse, G' étant semi-simple simplement connexe et k un corps de nombres totalement imaginaire, tout G'-torseur est trivial. Plus précisément, G' est ici le groupe spécial linéaire d'une k-algèbre simple, et il suffit de combiner un théorème d'Eichler ([Kn], 5.4) à la surjectivité de la norme réduite pour les algèbres simples sur un corps local ([Kn], 4.3, lemme 1). D'après la démonstration de la rationalité de $P\backslash\mathbb{Q}[P]$ figurant dans [Se2], 4.3, l'espace homogène X obtenu est une variété rationnelle. Pour terminer la démonstration, il reste à constater que le centre de $\overline{G'}$ est exactement le centre de P; par suite, X est en fait un $PGL_1(D)$-espace homogène, à stabilisateurs isomorphes à $P/\mathrm{Z}(P) = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.□

Bibliographie

[Bo] M. Borovoi. — *Abelianization of the second nonabelian Galois Cohomology*, Duke Math. J. **72** (1993), 217-239.

[GMS] S. Garibaldi, A. Merkurjev, J.-P. Serre. — *Cohomological invariants in Galois Cohomology*, University Lecture Series (Providence, R.I.) **28** (2003).

[Kn] M. Kneser. — *Lectures on Galois Cohomology of classical groups*, Lecture Notes, Tata Institute (1969).

[Pa] R. Parimala. — *Homogeneous varieties- zero cycles of degree one versus rational points*, prépublication, janvier 2004.

[Se1] J.-P. Serre. — *Cohomologie Galoisienne*, Lecture Notes in Math. 5, 5ième édition (1994), Springer-Verlag.

[Se2] J.-P. Serre. — *Topics in Galois Theory*, Research Notes in Math. 1 (1992), AK Peters Ltd.

[Sp] T.A. Springer. — *Nonabelian H^2 in Galois Cohomology*, in *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups*, Proc. Symp. Pure Math. **9**, Amer. Math. Soc. (1966), 164-182.

[To] B. Totaro. — *Splitting fields for E_8-torsors*, Duke Math. J., à paraître.