Groupe de Picard et groupe de Brauer des compactifications lisses d'espaces homogènes

Jean-Louis Colliot-Thélène et Boris È. Kunyavskiĭ

Introduction

Soient k un corps de caractéristique nulle, $\overline{k}$ une clôture algébrique. Soit g le groupe de Galois de $\overline{k}$ sur k. Etant donnée une k-variété algébrique Z, on note $\overline{Z} = Z \times_k \overline{k}$. A toute k-variété projective, lisse et géométriquement connexe Z, on associe le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(Z)$ et le g-module défini par le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(\overline{Z})$. Si Z_1 et Z_2 sont deux telles k-variétés k-birationnellement équivalentes, les modules galoisiens $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_1)$ et $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_2)$ sont isomorphes à addition près de g-modules de permutation (de type fini) ([CT/San2, Prop. 2.A.1]), et les groupes $\mathrm{Br}(Z_1)$ et $\mathrm{Br}(Z_2)$ sont isomorphes ([Gr, III.7.3, p.138]). Si $\overline{Z}$ est unirationnelle, alors $\mathrm{Pic}(\overline{Z})$ est un groupe abélien libre de type fini, et le quotient de $\mathrm{Br}(Z)$ par l'image de $\mathrm{Br}(k)$ est un sous-groupe du groupe fini $H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{Z}))$, égal à ce groupe si l'ensemble $Z(k)$ des points k-rationnels de Z est non vide, et aussi si k est un corps p-adique ou un corps de nombres (Prop. 1.1). Ces invariants ont été appliqués à l'étude k-birationnelle des surfaces rationnelles (Manin) et des tores algébriques (Voskresenskiĭ). Ils ont ensuite été utilisés dans l'étude des points rationnels des compactifications lisses de tores et de leurs espaces principaux homogènes ([CT/San1]). Plus récemment, ils ont été étudiés pour les compactifications lisses de groupes algébriques linéaires ([CT/K], [B/K1], [B/K2], [CT2]).

Dans cet article, nous nous intéressons aux compactifications lisses d'espaces homogènes *non nécessairement principaux* de groupes algébriques linéaires.

Soient G un k-groupe semi-simple simplement connexe et X/k un espace homogène de G. Le *stabilisateur géométrique*, c'est-à-dire le groupe d'isotropie d'un $\overline{k}$-point de $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$ est bien défini à $\overline{k}$-isomorphisme non unique près. On *note* $\overline{H}$ ce groupe. Dans tout cet article, on se limite au cas où *ce stabilisateur est un groupe connexe*.

Dans cette situation, il y a un k-tore naturellement associé au G-espace homogène X. Une définition en est donnée par Borovoi dans [Bo2, 4.1]. En voici une autre. Comme X est géométriquement intègre, le corps k est algébriquement clos dans le corps des fonctions $k(X)$ de X, donc $\overline{k}(X) = k(X) \otimes_k \overline{k}$ est le corps des fonctions de $\overline{X}$, et le groupe de Galois de $\overline{k}(X)$ sur $k(X)$ s'identifie au groupe de Galois g de $\overline{k}$ sur k. Si l'on étend le corps de base de k à $k(X)$, le point générique de X permet d'identifier $X_{k(X)} = X \times_k k(X)$ au quotient de $G_{k(X)}$ par un $k(X)$-sous-groupe fermé connexe H_0, groupe qui sur $\overline{k}(X)$ est isomorphe à $\overline{H} \times_{\overline{k}} \overline{k}(X)$. Si l'on prend le quotient du $k(X)$-groupe H_0 par son radical unipotent, puis le quotient du groupe obtenu par son groupe dérivé, on obtient un $k(X)$-tore T_0 qui sur $\overline{k}(X)$ vient de $\overline{k}$, et qui est donc déployé par l'extension $\overline{k}(X)$ sur $k(X)$. Le groupe des caractères de T_0 est donc de façon naturelle un g-réseau, donc le dual définit un unique k-tore T tel que $T \times_k k(X) \simeq T_0$. On dira que T est *le k-tore associé au G-espace homogène X*. Le g-module $\hat{T}$ des caractères de $\overline{T}$ est aussi le groupe des caractères $\hat{H}$ de $\overline{H}$. Lorsque X possède un point k-rationnel, le choix d'un k-point $x \in X(k)$ détermine un k-groupe algébrique H_x, le fixateur de x, satisfaisant $H_x \times_k \overline{k} \simeq \overline{H}$. Si l'on quotiente H_x par son radical unipotent, puis le quotient obtenu par son groupe dérivé, on obtient un k-tore H_x^{tor}, le plus grand quotient torique de H_x, qui est isomorphe au k-tore T associé au G-espace homogène $X = G/H_x$.

Soit X_c une k-compactification lisse de X. La $\overline{k}$-variété $\overline{X}_c$ est unirationnelle, le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$ est donc un g-module $\mathbb{Z}$-libre de type fini et le quotient du groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X_c)$ par l'image du groupe $\mathrm{Br}(k)$ est un sous-groupe du groupe fini $H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}_c))$.

Nous établissons le théorème A ci-dessous (Théorème 3.4) et discutons les conjectures B et C (§4 et §6). Nous discutons aussi un autre invariant, à savoir l'ensemble des classes de R-équivalence sur les k-points de X_c. C'est l'objet du §5. Le théorème A était une conjecture faite au §5 de [CT/K], motivée par les résultats de Borovoi [Bo2] sur le principe de Hasse et l'approximation faible pour les espaces homogènes définis sur un corps de nombres. Les conjectures B et C sont nouvelles. Nous établissons la conjecture B lorsque le stabilisateur géométrique est un tore (Théorème 4.4). Dans le cas général, nous montrons que la conjecture C implique la conjecture B.

A tout g-module continu M et tout entier naturel i on associe le groupe

$$Ш^i_\omega(k, M) = \mathrm{Ker}[H^i(g, M) \to \prod_h H^i(h, M)],$$

où h parcourt les sous-groupes fermés procycliques de g.

Théorème A *Soient k un corps de caractéristique nulle, G un k-groupe semi-simple simplement connexe, X une k-variété espace homogène de G, de stabilisateur géométrique connexe. Soit X_c une k-compactification lisse de X. Soit T le k-tore associé au G-espace homogène X. Le quotient de Brauer* $\mathrm{Br}(X_c)$ *par l'image du groupe* $\mathrm{Br}(k)$ *s'injecte dans le groupe* $Ш^1_\omega(k, \hat{T})$, *et est isomorphe à ce dernier groupe si $X(k) \neq \emptyset$ ou si k est un corps de nombres.*

Conjecture B *Soient k un corps de caractéristique nulle, G un k-groupe semi-simple simplement connexe, X une k-variété espace homogène de G, de stabilisateur géométrique connexe. Soit X_c une k-compactification lisse de X. Le g-module* $\mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$ *est un g-module flasque, c'est-à-dire que pour tout sous-groupe fermé $h \subset g$, on a* $H^1(h, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Pic}(\overline{X}_c), \mathbb{Z})) = 0$, *soit encore* $\mathrm{Ext}^1_h(\mathrm{Pic}(\overline{X}_c), \mathbb{Z}) = 0$.

Conjecture C *Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K, de corps résiduel κ. Soit G un K-groupe semi-simple simplement connexe et soit E/K un G-espace homogène de stabilisateur géométrique connexe et de tore associé trivial. Soit X un A-schéma propre, régulier, intègre, dont la fibre générique contient E comme ouvert dense. Alors il existe une composante de multiplicité 1 de la fibre spéciale de X/A qui est géométriquement intègre sur son corps de base κ.*

L'hypothèse que le tore associé est trivial équivaut au fait que le quotient du stabilisateur géométrique $\overline{H}$ par son radical unipotent est un groupe semi-simple (connexe).

Le théorème A est équivalent à une forme faible de la conjecture B, celle où l'on se limite aux sous-groupes h fermés procycliques. C'est une forme faible de la conjecture C qui nous permet d'établir le théorème A. Cette forme faible est établie au §3, en partant d'un résultat de Borovoi sur les corps p-adiques ([Bo1], Thm. 7.2), et au prix d'un assez long détour arithmétique (Propositions 1.5, 1.6 et Appendice A).

Pour X un espace *principal* homogène d'un k-groupe linéaire connexe, des énoncés proches du théorème A sont établis dans [CT/K] et [B/K1], et la conjecture B est établie dans [B/K2] (Theorem 3.2).

§1. Préliminaires

La cohomologie employée est la cohomologie étale, qui, sur un corps, donne la cohomologie galoisienne. On supposera le lecteur familier avec la théorie fine des tores algébriques ([CT/San1], [Vos]), en particulier avec les notions de tore quasi-trivial, de tore flasque, et avec les divers types de résolutions flasques (voir aussi [CT/San3]). On utilisera librement des résultats sur les groupes linéaires connexes quelconques que l'on peut trouver dans [San]. On utilisera librement la notion de R-équivalence sur les points k-rationnels d'une variété algébrique définie sur un corps k (voir [CT/San1], [Vos]). Enfin on utilisera librement la conséquence suivante du théorème d'Hironaka : si k est un corps de caractéristique zéro et $f : X \to Y$ est un k-morphisme de k-variétés quasi-projectives lisses intègres, il existe un k-morphisme $f_c : X_c \to Y_c$ de k-variétés projectives lisses intègres étendant f (cf. [B/K1], 1.2.2).

Proposition 1.1 *Soient k un corps, $\overline{k}$ une clôture séparable de k et $g = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Soit X une k-variété géométriquement intègre telle que $\overline{k}^{\times} \simeq \overline{k}[X]^{\times}$, où $\overline{k}[X]^{\times}$ est le groupe des fonctions inversibles sur $\overline{X}$. La suite spectrale de Leray pour le faisceau $\mathbb{G}_m$ et la projection $X \to \mathrm{Spec}(k)$ donne naissance à une suite exacte naturelle*

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})^g \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{X})] \to H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^3(g, \overline{k}^{\times}).$$

La flèche $H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^3(g, \overline{k}^{\times})$ est nulle dans chacun des cas suivants : $X(k) \neq \emptyset$; k est un corps p-adique ou réel ; k est un corps de nombres.

Démonstration C'est une conséquence bien connue de la suite spectrale de Leray pour la topologie étale, le morphisme $X \to \mathrm{Spec}(k)$ et le faisceau $\mathbb{G}_m$, et de la nullité de $H^3(g, \overline{k}^{\times})$ pour chacun des corps cités. $\square$

Proposition 1.2 (Sansuc [San], Prop. 6.10) *Soient k un corps de caractéristique zéro, H un k-groupe linéaire connexe, Y une k-variété lisse géométriquement connexe et $f : X \to Y$ un torseur sur Y sous H. On a alors une suite exacte*

$$0 \to \overline{k}[Y]^{\times} \to \overline{k}[X]^{\times} \to \hat{H} \to \mathrm{Pic}(\overline{Y}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}),$$

où $\hat{H} = \mathrm{Hom}_{\overline{k}-\mathrm{groupes}}(\overline{H}, \mathbb{G}_{m,\overline{k}})$ est le groupe des caractères de $\overline{H}$. $\square$

Proposition 1.3 *Soient k un corps de caractéristique zéro et X/k une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit F/k une extension de corps, avec k algébriquement clos dans F. Soient $\overline{k} \subset \overline{F}$ des clôtures algébriques de k et F. Soit $g = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ et $G = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Supposons en outre que le groupe $\mathrm{Pic}(X \times_k \overline{k})$ est un groupe abélien de type fini sans torsion. Alors :*

(i) Le groupe de Galois de $\overline{F}$ sur le corps composé $L = \overline{k}.F$ agit trivialement sur le G-module $\mathrm{Pic}(X \times_F \overline{F})$. La flèche naturelle $\mathrm{Pic}(X \times_k \overline{k}) \to \mathrm{Pic}(X \times_F \overline{F})$ est un isomorphisme de g-modules.

(ii) Chacune des propriétés suivantes vaut pour le g-module $\mathrm{Pic}(X \times_k \overline{k})$ si et seulement si elle vaut pour le G-module $\mathrm{Pic}(X \times_F \overline{F})$: être un module de permutation, être un facteur direct d'un module de permutation, être un module flasque.

(iii) Les groupes $H^1(g, \mathrm{Pic}(X \times_k \overline{k}))$ et $H^1(G, \mathrm{Pic}(X \times_F \overline{F}))$ sont isomorphes.

(iv) Le quotient de $\mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(X \times_k \overline{k})]$ par l'image $\mathrm{Br}(k)$ s'injecte dans le quotient de $\mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X_F) \to \mathrm{Br}(X \times_F \overline{F})]$ par l'image de $\mathrm{Br}(F)$.

Démonstration L'hypothèse que $\mathrm{Pic}(X \times_k \overline{k})$ est un groupe de type fini sans torsion équivaut à la combinaison de deux faits : le groupe de cohomologie cohérente $H^1(X, O_X)$ est nul et le groupe de Néron-Severi de $X \times_k \overline{k}$ est sans torsion. La nullité de $H^1(X, O_X)$ équivaut au fait que la variété de Picard de X est triviale. Le groupe de Picard de $X \times_k \overline{k}$ coïncide donc avec le groupe de Néron-Severi de $X \times_k \overline{k}$, de même pour $X \times_F \overline{F}$, et il est bien connu que le groupe de Néron-Severi ne change pas par extension de corps de base algébriquement clos (ceci se déduit facilement du théorème analogue pour la cohomologie étale à coefficients de torsion). Ainsi les injections naturelles

$$\mathrm{Pic}(X \times_k \overline{k}) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X \times_F L) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X \times_F \overline{F})$$

sont des isomorphismes. Ceci établit l'énoncé (i), qui implique immédiatement l'énoncé (ii). L'énoncé (iii) résulte de la suite de restriction-inflation et de la nullité de $H^1(h, M)$ pour M un groupe abélien sans torsion équipé d'une action triviale d'un groupe h (profini). L'énoncé (iv) résulte de (iii) et de la proposition 1.1.

Remarque 1.3.1 Par un résultat de Serre, l'hypothèse que $\mathrm{Pic}(X \times_k \overline{k})$ est un groupe de type fini sans torsion est satisfaite si la $\overline{k}$-variété $X \times_k \overline{k}$ est unirationnelle, ce qui est certainement le cas pour une compactification lisse d'un espace homogène d'un groupe linéaire connexe, ces derniers étant $\overline{k}$-birationnels à un espace affine.

Remarque 1.3.2 L'intérêt de la proposition 1.3 est que, pour établir par exemple l'une des propriétés voulues pour X/k, on peut supposer $X(k) \neq \emptyset$. Dans la proposition ci-desssus, il suffit en effet de prendre pour F le corps des fonctions $k(X)$, car l'on dispose alors du point générique. C'est "l'astuce du passage au point générique". Il existe d'autres variantes. Par exemple dans [B/K2], on considère une compactification lisse X d'un groupe algébrique réductif connexe G non nécessairement quasi-déployé, et l'on passe au corps des fonctions de la variété des sous-groupes de Borel de G, ce qui a pour effet de quasi-déployer G.

Pour le théorème suivant, on renvoie à [Bog] et [CT/San4] (Thm. 9.13).

Théorème 1.4 (Bogomolov). *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, G un k-groupe semi-simple simplement connexe et $H \subset G$ un sous-groupe fermé connexe. Soit X une compactification lisse du quotient G/H. Alors* $\mathrm{Br}(X) = 0$. □

Soient k un corps de caractéristique zéro, X et Y deux k-variétés lisses géométriquement connexes, $f : X \to Y$ un k-morphisme propre à fibre générique géométriquement intègre. Considérons les assertions :

(A) La flèche naturelle $\mathrm{Br}(Y) \to \mathrm{Br}(X)$ est un isomorphisme.

(B) Pour tout point P de codimension 1 de Y, de fibre $f^{-1}(P) = \sum_i e_i P_i$, où les P_i sont des points de codimension 1 de X, la flèche

$$\sum_i e_i \,\mathrm{res}_{k(P),k(P_i)} : H^1(k(P), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \bigoplus_i H^1(k(P_i), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

est injective.

Proposition 1.5 *Si pour tout modèle $X_0/Y_0/k_0$ de $X/Y/k$ sur un corps k_0 de type fini sur le corps premier, l'une des assertions (A) ou (B) ci-dessus vaut, alors elle vaut pour $X/Y/k$.*

Démonstration C'est évident pour (A), à cause des propriétés de passage à la limite inductive pour la cohomologie étale. Pour (B), c'est un peu lourd à dire mais quand même pas très compliqué. On considère un élément dans le noyau de $\sum_i e_i \,\mathrm{res}_{k(P),k(P_i)}$. Il n'y a qu'un nombre fini de corps intervenant dans cet énoncé. □

Proposition 1.6 *Soient k un corps de nombres, K le corps des fractions d'une k-algèbre A lisse et géométriquement connexe sur k, et soient X et Y deux K-variétés lisses géométriquement connexes, et $f : X \to Y$ un K-morphisme propre à fibre générique géométriquement intègre. Soit $\mathcal{X} \to \mathcal{Y} \to$* $\mathrm{Spec}(A)$ *un modèle de $X/Y/K$, avec $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ k-variétés lisses géométriquement* *intègres, avec $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ propre. L'énoncé (B) pour le k-morphisme $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ implique l'énoncé (B) pour le K-morphisme $X \to Y$.*

Démonstration C'est évident, car les points de codimension 1 de Y définissent des points de codimension 1 de $\mathcal{Y}$. $\square$

§2 Quotients de tores

Proposition 2.1 *Soit k un corps, et soient G_i , $i = 1, 2$, deux k-groupes linéaires connexes spéciaux, c'est-à-dire tels que pour tout corps F contenant k, on ait $H^1(F, G_i) = 1$. Soient H un k-groupe algébrique aucune hypothèse sur H et $H \subset G_i$ deux plongements comme sous-groupes fermés. Soit $X_i = G_i/H$.*

(i) On a une équivalence k-birationnelle entre $G_2 \times_k X_1$ et $G_1 \times_k X_2$.

(ii) Si G_1 et G_2 sont des variétés k-rationnelles, alors les k-variétés X_1 et X_2 sont stablement k-birationnellement équivalentes.

(iii) Supposons k de caractéristique nulle. Sous les hypothèses de (ii), soit $X_{1,c}$, resp. $X_{2,c}$ une k-compactification lisse de X_1, resp. X_2. Alors les g-modules $\mathrm{Pic}(\overline{X}_{1,c})$ et $\mathrm{Pic}(\overline{X}_{2,c})$ sont isomorphes à addition près de g-modules de permutation, et les groupes $\mathrm{Br}(X_{1,c})$ et $\mathrm{Br}(X_{2,c})$ sont isomorphes.

Démonstration On considère le plongement diagonal $H \to G_1 \times_k G_2$ et les projections sur chacun des facteurs. Ceci fait de $(G_1 \times G_2)/H$ un torseur sur G_1/H sous G_2 et un torseur sur G_2/H sous G_1. Comme les groupes G_i sont spéciaux, ces torseurs sont génériquement triviaux. Ainsi $(G_1 \times G_2)/H$ est k-birationnel à $G_2 \times_k (G_1/H)$ et à $G_1 \times_k (G_2/H)$. Ceci établit les points (i) et (ii). L'énoncé (iii) en résulte ([Gr]; [CT/San 2] Prop. 2.A.1 p. 461). $\square$

Remarque Les groupes suivants, ainsi que les produits quelconques de tels groupes, sont spéciaux, et leur k-variété sous-jacente est k-rationnelle : les tores quasi-triviaux, les groupes SL_n/k (déployés) et les groupes Sp_{2n}/k. Pour toute k-algèbre simple centrale A, le groupe GL_A/k est spécial et k-rationnel. Sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, c'est un résultat de Grothendieck que tout groupe semi-simple spécial est un produit de groupes SL_n/k et de groupes Sp_{2n}/k. Sur un corps de caractéristique zéro quelconque, on peut en déduire que tout k-groupe spécial est un produit de descendus à la Weil de tels groupes.

Un k-groupe semi-simple spécial est donc k-rationnel. Si deux k-tores T et T' ont leur produit $T \times_k T'$ quasi-trivial, alors ces tores sont des groupes spéciaux, mais la k-variété sous-jacente à T n'est pas nécessairement k-rationnelle.

Proposition 2.2 *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit $1 \to T \to P \to Q \to 1$ une suite exacte de k-tores, avec P quasi-trivial. Soit Q_c une k-compactification lisse du k-tore Q. Soit $1 \to T \to F \to P_1 \to 1$ une suite exacte de k-tores avec F flasque et P_1 quasi-trivial.*

(i) Les g-modules $\mathbb{Z}$-libres de type fini $\hat{F}$ et $\mathrm{Pic}(\overline{Q}_c)$ sont isomorphes à addition près de modules de permutation, en particulier $\mathrm{Pic}(\overline{Q}_c)$ est un g-module flasque.

(ii) On a

$$\mathrm{Br}(Q_c)/\mathrm{Br}(k) = H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{Q}_c)) = H^1(k, \hat{F}) = Ш^1_\omega(k, \hat{T}) = Ш^2_\omega(k, \hat{Q}).$$

(iii) $Q_c(k)/R = Q(k)/R = H^1(k, F)$.

Démonstration D'après ([CT/San3], (1.3.2)), pour tout k-tore T il existe une suite exacte $1 \to T \to F \to P_1 \to 1$ du type indiqué. Formons l'expulsé (en anglais "push-out") de $T \to P$

et $T \to F$. Ceci donne naissance à un diagramme commutatif de suites exactes de k-tores :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & & 1 & & 1 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & T & \to & P & \to & Q & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 1 & \to & F & \to & N & \to & Q & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & P_1 & = & P_1 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 1 & & 1 & & & & \end{array}$$

Comme les tores P et P_1 sont quasi-triviaux, la suite médiane verticale est scindée, d'où une suite exacte

$$1 \to F \to P \times P_1 \to Q \to 1.$$

Cette dernière suite est une résolution flasque du tore Q. La proposition 6 p. 189 de [CT/San1] donne alors (i). La proposition 1.1 donne la première égalité dans (ii). La second résulte de (i) et de l'annulation de $H^1(g, \hat{P})$ pour un g-module de permutation $\hat{P}$. Les deux dernières égalités de (ii) s'établissent en considérant les suites exactes de caractères associées aux suites exactes de tores de l'énoncé, et en utilisant d'une part l'annulation mentionnée à l'instant, d'autre part l'annulation de $Ш^2_\omega(k, \hat{P})$ pour $\hat{P}$ un g-module de permutation. Quant à (iii), c'est une application du Théorème 2 p. 199 et de la Proposition 13 p. 203 de [CT/San1]. $\square$

Soit $T \hookrightarrow SL_n$ un plongement (de k-groupes) d'un k-tore T dans un k-groupe $SL_n = SL_{n,k}$. Il est facile de définir un homomorphisme injectif $T \hookrightarrow P$ de T dans un k-tore quasi-trivial P. Appliquant la proposition 2.1 à $H = T$, $G_1 = SL_n$ et $G_2 = P$, et en utilisant les propositions 1.1 et 2.1, on obtient une démonstration du théorème A et de la conjecture B dans le cas particulier du SL_n-espace homogène $X = SL_n/T$.

§3. Démonstration du théorème A

Proposition 3.1 *Soient k un corps de caractéristique zéro, $\overline{k}$ une clôture algébrique, $g = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, G un k-groupe semi-simple simplement connexe, X un k-espace homogène sous G à stabilisateur géométrique $\overline{H}$ connexe. Soit T le k-tore associé à cet espace homogène. Soit X_c une k-compactification lisse de X. Alors :*

(i) La flèche naturelle $k^\times \to k[X]^\times$ est un isomorphisme.

(ii) On a un isomorphisme naturel de g-modules $\hat{T} \simeq \mathrm{Pic}(\overline{X})$.

(iii) On a un plongement naturel $H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}_c)) \hookrightarrow H^1(g, \hat{T})$, et ce plongement induit un isomorphisme $Ш^1_\omega(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}_c)) \simeq Ш^1_\omega(g, \hat{T})$.

(iv) On a $\mathrm{Br}(\overline{X}_c) = 0$.

Si de plus $\overline{H}^{tor} = \overline{T} = 1$, par exemple si $\overline{H}$ est semi-simple, alors :

(v) On a $\mathrm{Pic}(X) = 0$.

(vi) Le g-module $\mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$ *est un module de permutation.*
(vii) La flèche naturelle $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X_c)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration Le choix d'un $\overline{k}$-point de $\overline{X}$ fait de $\overline{G}$ un torseur sur $\overline{X}$ sous le groupe connexe $\overline{H}$. La proposition 1.2 donne la suite exacte

$$0 \to \overline{k}[X]^\times \to \overline{k}[G]^\times \to \hat{H} \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{G}),$$

soit encore, puisque $\hat{H} = \hat{T}$

$$0 \to \overline{k}[X]^\times \to \overline{k}[G]^\times \to \hat{T} \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{G}).$$

L'hypothèse sur G garantit $\overline{k}^\times = \overline{k}[G]^\times$ et $\mathrm{Pic}(\overline{G}) = 0$. Ainsi d'une part $\overline{k}^\times = \overline{k}[X]^\times$, et donc $k^\times = k[X]^\times$, d'autre part la flèche $\hat{T} \to \mathrm{Pic}(\overline{X})$ est un isomorphisme. La méthode du changement de corps de base de k à $k(X)$ permet de voir que la flèche $\hat{T} \to \mathrm{Pic}(\overline{X})$ est g-équivariante. Ceci établit les points (i) et (ii). Comme on a $\overline{k}^\times = \overline{k}[X]^\times$, et que X_c est lisse, on a la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Div}_\infty(\overline{X}_c) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}_c) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to 0,$$

où le module $\mathrm{Div}_\infty(\overline{X}_c)$ est engendré par les diviseurs à support en dehors de X. Si $\hat{P}$ est un g-module de permutation, alors $H^1(g, \hat{P}) = 0$ et $Ш^2_\omega(g, \hat{P}) = 0$. De la suite exacte ci-dessus on tire donc une injection

$$H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}_c)) \hookrightarrow H^1(g, \hat{T})$$

et un isomorphisme

$$Ш^1_\omega(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}_c)) \simeq Ш^1_\omega(g, \hat{T}),$$

ce qui établit le point (iii). Quant au point (iv), c'est une simple application du théorème 1.4 (Bogomolov).

Supposons maintenant $T = 1$. D'après (ii) on a alors $\mathrm{Pic}(\overline{X}) = 0$. La suite exacte ci-dessus montre alors que $\mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$ est un module de permutation, donc $H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}_c)) = 0$. De la proposition 1.1 appliquée à X on déduit alors que $\mathrm{Pic}(X) = 0$ et que l'application $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{X})]$ est surjective, a fortiori en est-il de même de l'application $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X_c) \to \mathrm{Br}(\overline{X}_c)]$ (on pourrait aussi appliquer la proposition 1.1 à X_c). Le point (iv) donne alors l'énoncé (vii). □

Théorème 3.2 *Soient k un corps de caractéristique zéro, G un k-groupe semi-simple simplement connexe et $\overline{H} \subset \overline{G}$ un $\overline{k}$-groupe connexe avec $\overline{H}^{tor} = 1$. Soit $f : X \to Y$ un k-morphisme propre dominant de k-variétés lisses géométriquement intègres. Supposons qu'il existe $U \subset X$ et $V \subset Y$ des ouverts tels que $f(U) = V$ et que le morphisme $f : U \to V$ fasse de U un espace homogène sur V sous G_V de stabilisateurs géométriques isomorphes à $\overline{H}$. Alors* $f^* : \mathrm{Br}(Y) \to \mathrm{Br}(X)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration La proposition 3.1 (vii) appliquée à la fibre générique de f montre que la flèche $\mathrm{Br}(k(Y)) \to \mathrm{Br}(X_{k(Y)})$ est un isomorphisme. Comme Y est lisse, $\mathrm{Br}(Y)$ s'injecte dans $\mathrm{Br}(k(Y))$, et donc la flèche $\mathrm{Br}(Y) \to \mathrm{Br}(X)$ est injective. Montrons que la condition (B) du §1 est satisfaite pour f. Dans les réductions du §1, passage d'un corps quelconque à un corps de type fini sur un corps de nombres (Prop. 1.5), puis passage à un modèle sur une algèbre de type fini sur un corps de nombres (Prop. 1.6), on peut préserver la donnée de $U \to V$. Pour établir que la condition (B) vaut pour $f : X \to Y$ sous les hypothèses du théorème, il suffit donc de l'établir lorsque k est un corps de nombres.

Sous les hypothèses ci-dessus, pour toute place finie v de k, l'application induite $X(k_v) \to Y(k_v)$ est surjective : ceci résulte du théorème de Borovoi ([Bo1], Theorem 7.2 (ii)) selon lequel un k_v-espace homogène sous un k_v-groupe semi-simple simplement connexe de stabilisateur géométrique un groupe $\overline{H}$ satisfaisant $\overline{H}^{tor} = 1$ possède un point k_v-rationnel. D'après l'appendice A, ceci implique la condition (B) sur un corps de nombres. (Note : Lorsque $\overline{H}$ est un groupe réductif, donc semi-simple sous l'hypothèse $\overline{H}^{tor} = 1$, le théorème de Borovoi peut se déduire de résultats antérieurs de Kneser, Springer et Douai).

Nous avons ainsi établi la condition (B) sur le corps k initial. Soit alors $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$. Sa restriction à la fibre générique $X_{k(Y)}$ vient de $\beta \in \mathrm{Br}(k(Y))$.

Soit P un point de codimension 1 de Y, et soit $f^{-1}(P) = \sum_i e_i P_i$. On a le diagramme commutatif bien connu (voir [CT/San4], Lemma 5.5) :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}(k(X)) & \rightarrow & \bigoplus_i H^1(k(P_i), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \uparrow f^* & & \uparrow \sum_i e_i \, \mathrm{res}_{k(P),k(P_i)} \\ \mathrm{Br}(k(Y)) & \rightarrow & H^1(k(P), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des applications résidus, sur X pour la flèche supérieure, sur Y pour la flèche inférieure. Comme $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$, tous les résidus de α en les points de codimension 1 de X sont nuls, et du diagramme ci-dessus on déduit, prenant en compte la condition (B) déjà établie, qu'il en est de même pour β. Ainsi le résidu de $\beta \in \mathrm{Br}(k(Y))$ en tout point de codimension 1 de la k-variété lisse Y est nul. Par le théorème de pureté pour le groupe de Brauer ([Gr], III, §6), ceci implique $\beta \in \mathrm{Br}(Y)$. $\square$

Remarque 3.2.1 Pour établir l'énoncé purement algébrique du théorème 3.2, nous passons par un détour arithmétique : utilisation du théorème cité de Borovoi [Bo1] sur les corps p-adiques, et utilisation de l'appendice A, qui implique une réduction au cas des corps de nombres.

Appelons *bon corps de dimension cohomologique* ≤ 2 un corps satisfaisant les trois propriétés suivantes.

(a) k est de caractéristique nulle et la dimension cohomologique de k est au plus 2 ;

(b) sur toute extension finie de k, indice et exposant des algèbres simples centrales coïncident ;

(c) la dimension cohomologique de l'extension abélienne maximale de k est au plus 1 (cette condition n'étant utilisée que lorsque les groupes semi-simples considérés ont des facteurs de type E_8).

Il vaut la peine de remarquer que le théorème de Borovoi vaut plus généralement sur un tel corps. Le lecteur vérifiera en effet que le seul point où la démonstration du théorème 7.2 (ii) de [Bo1] ne vaut a priori pas pour un corps satisfaisant simplement (a) est le lemme 5.7 de [Bo1]. Que ce lemme vaut pour tout corps satisfaisant les hypothèses (a), (b), (c) est le contenu du théorème 2.1 de [CTGiPa].

Les conditions (a), (b), (c) sont satisfaites par les corps de nombres totalement imaginaires. Les conditions (a) et (b) sont satisfaites par les corps de fonctions de deux variables sur les complexes (pour la condition (b), c'est un résultat récent de de Jong).

Une construction géométrique

La construction suivante est faite par Borovoi au §4.2 de [Bo2]. Soient G/k semi-simple simplement connexe et H un k-sous-groupe fermé connexe. Soit $T = H^{tor}$. Soit H_1 le noyau de $H \to T$. C'est un k-groupe connexe extension d'un k-groupe semi-simple par un k-groupe unipotent. Soit $T \subset P$ un plongement de T dans un k-tore quasi-trivial. Soient $X = G/H$ et $Q = P/T$. Soit Z le quotient de $G \times P$ par l'action diagonale de H.

D'un côté Z est un torseur sur X sous le k-tore quasi-trivial P, donc Z est k-birationnel au produit de P (ouvert d'un espace affine) par X. D'un autre côté Z est un G_Q-espace homogène sur Q dont les stabilisateurs géométriques sont isomorphes au groupe $\overline{H}_1$.

Soient Z_c, Q_c des k-compactifications lisses de Z et Q munies d'un morphisme $f : Z_c \to Q_c$ étendant la projection $Z \to Q$.

Théorème 3.3 *Soient G un k-groupe semi-simple simplement connexe, $H \subset G$ un k-sous-groupe fermé connexe et $T = H^{tor}$. Soit X_c une k-compactification lisse de $X = G/H$. Le quotient $\mathrm{Br}(X_c)/\mathrm{Br}(k)$ est isomorphe à $Ш^1_\omega(k, \hat{T})$.*

Démonstration Si l'on applique le théorème 3.2 au morphisme propre $Z_c \to Q_c$ qui étend le morphisme $U = Z \to V = Q$, on obtient que la flèche naturelle $\mathrm{Br}(Q_c) \to \mathrm{Br}(Z_c)$ est un isomorphisme. D'après la proposition 2.2 (ii), on a $\mathrm{Br}(Q_c)/\mathrm{Br}(k) \simeq Ш^1_\omega(k, \hat{T})$. Par ailleurs, comme Z_c est k-birationnel au produit d'un espace projectif et de X_c, le groupe $\mathrm{Br}(X_c)$ est isomorphe à $\mathrm{Br}(Z_c)$. □

Théorème 3.4 (Théorème A) *Soient G un k-groupe semi-simple simplement connexe, X un espace homogène sous G de stabilisateur géométrique un groupe connexe, T le k-tore associé. Soit X_c une k-compactification lisse de X. Alors*
(i) $H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}_c)) \simeq Ш^1_\omega(g, \hat{T})$.
(ii) Pour tout sous-groupe fermé procyclique $h \subset g$, on a $H^1(h, \mathrm{Pic}(\overline{X}_c)) = 0$.
(iii) Pour tout sous-groupe fermé procyclique $h \subset g$, $H^1(h, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Pic}(\overline{X}_c), \mathbb{Z})) = 0$.
(iv) Le quotient de Brauer $\mathrm{Br}(X_c)$ par l'image du groupe $\mathrm{Br}(k)$ s'injecte dans le groupe $Ш^1_\omega(k, \hat{T})$, et est isomorphe à ce dernier groupe si $X(k) \neq \emptyset$ ou si k est un corps de nombres.

Démonstration Le $k(X)$-tore $T \times_k k(X)$ est le k-tore associé au $G_{k(X)}$-espace homogène $X_{k(X)}$. Par la proposition 1.3 et les remarques qui la suivent, pour établir le théorème on peut donc supposer $X(k) \neq \emptyset$. Le point (i) est alors précisément le théorème 3.3. Le point (ii) résulte immédiatement de la formule (i). Pour tout groupe profini h et tout h-réseau N, il y a une dualité bien connue entre les groupes abéliens finis $H^1(h, N)$ et $H^1(h, \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z}))$ ([CE], chap. XII, §6). Les points (ii) et (iii) sont donc équivalents. Le point (iv) résulte de (i), de la proposition 1.1 et du théorème 1.4. □

Remarque 3.4.1 On vérifie (périodicité de la cohomologie des groupes finis cycliques et dualité pour la cohomologie de Tate des groupes finis à coefficients dans des réseaux, ci-dessus mentionnée) que l'énoncé (ii) équivaut à l'annulation de $H^1(h, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Pic}(\overline{X}_c), \mathbb{Z}))$ pour tout sous-groupe fermé procyclique $h \subset g$. L'énoncé (ii) est ainsi plus faible que la conjecture B.

Remarque 3.4.2 Une fois utilisé le théorème 1.4 (Bogomolov), c'est l'énoncé (ii) qui implique le théorème A. Nous ne savons pas établir cet énoncé sans passer par le long détour arithmétique.

Corollaire 3.5 *Soit k un corps de nombres. Soient G un k-groupe semi-simple simplement connexe, X un espace homogène sous G de stabilisateur géométrique un groupe connexe. Soit X_c une k-compactification lisse de X. Soit F le k-tore de groupe des caractères $\hat{F} = \mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$. Le groupe $H^1(k, F)$ est fini.*

Démonstration (bien connue) Soit K/k une extension finie galoisienne, de groupe G, déployant le k-tore F. Pour v place de k non ramifiée dans K et w place de K au-dessus de v, l'extension locale K_w/k_v, de groupe $G_w \subset G$, est cyclique. Le théorème 3.4 implique $H^1(k_v, \hat{F}) = H^1(G_w, \hat{F}) = 0$. Par la dualité du corps de classes local, cela donne $H^1(k_v, F) = 0$ pour toute telle place v. Par la théorie du corps de classes global, le groupe $Ш^1(k, F)$ est un groupe fini (dual de $Ш^2(k, \hat{F})$). Comme il n'y a qu'un nombre fini de places de k ramifiées dans K, et que pour toute place v et tout k_v-tore T le groupe $H^1(k_v, T)$ est fini, on conclut que $H^1(k, F)$ est fini. □

§4. La conjecture C implique la conjecture B

Commençons par rappeler l'énoncé de la conjecture B.

Conjecture B *Soient G un k-groupe semi-simple simplement connexe, X un espace homogène de G à stabilisateur géométrique connexe et X_c une k-compactification lisse de X. Le $\mathfrak{g}$-module* $\mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$ *est un $\mathfrak{g}$-module flasque, c'est-à-dire que pour tout sous-groupe fermé $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, on a $H^1(\mathfrak{h}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Pic}(\overline{X}_c), \mathbb{Z})) = 0$, soit encore* $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{h}}(\mathrm{Pic}(\overline{X}_c), \mathbb{Z}) = 0$.

Théorème 4.1 *Soit k un corps de caractéristique zéro, soit G un k-groupe semi-simple simplement connexe et soit X un espace homogène de G, de stabilisateur géométrique $\overline{H}$ connexe. Soit X_c une k-compactification lisse de X. Admettons la validité de la conjecture C. Alors le groupe de Picard* $\mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$ *est un module flasque.*

Démonstration D'après la proposition 1.3 et les remarques subséquentes, le changement de base de k au corps des fonctions de X permet de se ramener au cas où $X(k) \neq \emptyset$, i.e. $X = G/H$ avec H un k-sous-groupe fermé connexe de G. (Cette remarque vaut aussi pour la Conjecture B.)

Soit $T = H^{tor}$ et notons, comme au §3, H_1 le noyau de $H \to T$. Soit

$$1 \to T \to P \to Q \to 1$$

une suite exacte de k-tores, avec P quasi-trivial.

Reprenons la construction géométrique précédant l'énoncé du théorème 3.3. On définit $Z = (G \times P)/H$. Soit $f : Z_c \to Q_c$ un k-morphisme propre de k-variétés projectives et lisses étendant $Z \to Q = P/T$. Comme Z est un torseur sur $X = G/H$ sous le k-tore quasi-trivial P, les modules galoisiens $\mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$ et $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_c)$ sont égaux à addition près de modules de permutation.

Il existe un ouvert Q_0 de Q_c, contenant Q, de complémentaire dans Q_c un fermé de codimension au moins 2, tel que toutes les fibres de $f : Z_0 = f^{-1}(Q_0) \to Q_0$ soient équidimensionnelles de dimension $\dim(Z) - \dim(Q)$.

Il y a un nombre fini de points de codimension 1 de Q_c dont la fibre n'est pas géométriquement intègre. Sous la conjecture C, on peut en chaque tel point fixer une composante de multiplicité 1 géométriquement intègre de la fibre. Soit $F \subset Z_c$ le fermé (propre) qui est la réunion des adhérences des autres composantes de ces fibres. Soit $Z_1 \subset Z_0$ l'ouvert de Z_0, et donc de Z_c, complémentaire de $F \cap Z_0$ dans Z_0. On a donc le diagramme de morphismes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
Z & \subset & Z_1 & \subset & Z_0 & \subset & Z_c \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow f \\
Q & & & & Q_0 & \subset & Q_c.
\end{array}$$

Soit $f_1 : Z_1 \to Q_c$ la restriction de f à Z_1. En tout point de codimension 1 de Q_c, la fibre de f_1 est non vide et géométriquement intègre. On en conclut que toute fonction inversible sur l'ouvert $\overline{Z}_1$ de la $\overline{k}$-variété projective, lisse, intègre $\overline{Z}_c$ est une constante. Comme $\overline{Z}_c$ est lisse, la restriction $\rho : \mathrm{Pic}(\overline{Z}_c) \to \mathrm{Pic}(\overline{Z}_1)$ est surjective. Le noyau de ρ est engendré par le groupe abélien libre sur les points de codimension 1 de $\overline{Z}_c$ non situés dans $\overline{Z}_1$, soit M. L'énoncé ci-dessus sur les fonctions inversibles implique que le noyau de ρ est en fait *égal* à ce groupe abélien. En bref, on a la suite exacte naturelle

$$0 \to M \to \mathrm{Pic}(\overline{Z}_c) \to \mathrm{Pic}(\overline{Z}_1) \to 0 \qquad (4.1)$$

où M est le g-module de permutation de base les points de codimension 1 de $\overline{Z}_c$ non situés dans $\overline{Z}_1$.

Si l'on montre que $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_1)$ est flasque, ceci suffira à montrer que le terme médian $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_c)$ est flasque (car les deux extrêmes le sont). En fait on aura plus : comme une extension d'un g-module flasque par un g-module de permutation est scindée, on aura montré que le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_c)$ coïncide avec le g-module flasque $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_1)$ à addition près de modules de permutation.

Soit $K = \overline{k}(Q)$ le corps de fonctions de $\overline{Q}$. Soit $\overline{Z}_{c,K} = \overline{Z}_{1,K}$ la fibre de $\overline{f}_1$ au-dessus du point générique de $\overline{Q}$. Comme toutes les fibres de f_1 aux points de codimension 1 de Q_c sont géométriquement intègres, la restriction à la fibre générique donne naissance à la suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to \mathrm{Pic}(\overline{Q}_c) \to \mathrm{Pic}(\overline{Z}_1) \to \mathrm{Pic}(\overline{Z}_{c,K}) \to 0 \qquad (4.2)$$

où la flèche $\mathrm{Pic}(\overline{Q}_c) \to \mathrm{Pic}(\overline{Z}_1)$ est f_1^*. Le module $\mathrm{Pic}(\overline{Q}_c)$ est flasque, car Q est un k-tore (Voskresenskiĭ, voir [CT/San1]).

La K-variété $Z_{c,K}$ est une K-compactification lisse de Z_K, qui est un espace homogène sous G_K de stabilisateur géométrique $\overline{H}_1$ qui est un groupe satisfaisant $\overline{H}_1^{tor} = 1$. D'après la proposition 3.1, on a $K^\times = K[Z_K]^\times$ et $\mathrm{Pic}(Z_K) = 0$. On en déduit que le g-module $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_{c,K})$ est le module de permutation sur les points de codimension 1 de $\overline{Z}_{c,K}$ non situés dans $\overline{Z}_K$.

Le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_1)$ apparaît donc comme le terme médian d'une suite exacte courte dont les termes extrêmes sont flasques. Il est donc flasque. Il en est de même de $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_c)$ (suite exacte (4.1) ci-dessus)).

Ceci suffit à établir le théorème, mais on va montrer que l'on a un résultat plus précis.

En faisant la rétrotirette (en anglais, "pull-back") de la suite (4.1) par la flèche f_1^*, et en utilisant la suite (4.2), on obtient le diagramme commutatif de suites exactes suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\overline{Q}_c) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\overline{Z}_1) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\overline{Z}_{c,K}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\overline{Z}_c) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\overline{Z}_{c,K}) \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0 \\
 & M \arrow[u] \arrow[r, equal] & M \arrow[u] & & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

La flèche naturelle $f^* : \mathrm{Pic}(\overline{Q}_c) \to \mathrm{Pic}(\overline{Z}_c)$ est un relèvement de la flèche $f_1^* : \mathrm{Pic}(\overline{Q}_c) \to \mathrm{Pic}(\overline{Z}_1)$. Ainsi la suite verticale de gauche est scindée, on obtient une suite exacte

$$0 \to M \oplus \mathrm{Pic}(\overline{Q}_c) \to \mathrm{Pic}(\overline{Z}_c) \to \mathrm{Pic}(\overline{Z}_{c,K}) \to 0 \qquad (4.3)$$

où la flèche $\mathrm{Pic}(\overline{Q}_c) \to \mathrm{Pic}(\overline{Z}_c)$ est la flèche de restriction naturelle f^*, et où les modules M et $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_{c,K})$ sont de permutation.

D'après la proposition 3.1, l'application $\mathrm{Br}(k(Q)) \to \mathrm{Br}(Z_{c,k(Q)})$ est une injection (on utilise le fait que $\overline{H}_1^{tor} = 1$). L'application $f^* : \mathrm{Br}(Q_c) \to \mathrm{Br}(Z_c)$ est donc aussi injective, et il en est de même (Proposition 1.1) de $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{Q}_c)) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{Z}_c))$. Ceci vaut en remplaçant k par une extension finie quelconque de k.

La démonstration du lemme suivant est laissée au lecteur.

Lemme 4.2 *Soient g un groupe fini et $0 \to A \to B \to C \to 0$ une suite exacte de g-réseaux. Supposons que C est de permutation et que pour tout sous-groupe $h \subset g$, l'application induite $H^1(h, A) \to H^1(h, B)$ est injective (et donc un isomorphisme). Alors la suite est scindée.*

En appliquant ce lemme à la suite exacte (4.3), on voit que cette suite est scindée. On a donc établi la proposition 4.3 ci-dessous, qui précise l'énoncé du théorème 4.1. □

Proposition 4.3 *Sous la conjecture C, avec les notations introduites dans la démonstration ci-dessus, la flèche naturelle $f^* : \mathrm{Pic}(\overline{Q}_c) \to \mathrm{Pic}(\overline{Z}_c)$ est une injection scindée de g-réseaux flasques à conoyau un g-module de permutation.* □

Théorème 4.4 *Soient k un corps de caractéristique zéro, $\overline{k}$ une clôture algébrique, $g = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, G un k-groupe semi-simple simplement connexe, X un k-espace homogène sous G à stabilisateur géométrique un tore. Soit X_c une k-compactification lisse de X. Le g-module $\mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$ est un g-module flasque.*

Démonstration On reprend la démonstration du théorème 4.1. On a ici $H = T$ et $H_1 = 1$, et la fibration $(G \times P)/H \to P/T$ fait de $(G \times P)/H$ un *torseur* sur $Q = P/T$ sous le k-groupe semi-simple simplement connexe G. Le cas particulier de la conjecture C requis est alors connu : c'est la proposition 6.3 ci-dessous (conséquence de la théorie de Bruhat-Tits). La proposition 4.3 vaut donc inconditionnellement dans ce cas, et donc aussi la conjecture B. □

§5. R-équivalence

Dans ce paragraphe, nous utiliserons une propriété fonctorielle simple des torseurs universels ([CT/San2]). Soit $f : X \to Y$ un k-morphisme de k-variétés lisses, projectives, géométriquement intègres. Soit $M \in X(k)$ et $N = f(M) \in Y(k)$. Supposons que les modules galoisiens $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ et $\mathrm{Pic}(\overline{Y})$ sont libres, de type fini sur $\mathbb{Z}$. Soient S_X et S_Y les k-tores duaux de ces g-réseaux. A la flèche $f^* : \mathrm{Pic}(\overline{Y}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})$ correspond un k-homomorphisme de k-tores $S_X \to S_Y$. Soit $\mathcal{T}_X$ le torseur universel sur X de fibre triviale en M et soit $\mathcal{T}_Y$ le torseur universel sur Y de fibre triviale en N. On a alors un isomorphisme de S_Y-torseurs sur X :

$$\mathcal{T}_X \times^{S_X} S_Y \simeq f^*(\mathcal{T}_Y).$$

Ceci résulte immédiatement de la définition des torseurs universels ([CT/San2], p. 408) et de la fonctorialité de la suite (2.0.2) (ibid.). Ceci implique que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} X(k) & \to & H^1(k, S_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y(k) & \to & H^1(k, S_Y), \end{array}$$

où les flèches horizontales sont données par évaluation des torseurs universels $\mathcal{T}_X$ et $\mathcal{T}_Y$ sur les k-points. Rappelons par ailleurs que les flèches horizontales passent au quotient par la R-équivalence ([CT/San2], Prop. 2.7.2 p. 444).

Soient k un corps, G un k-groupe semi-simple simplement connexe et $H \subset G$ un k-sous-groupe fermé connexe. Soient $X = G/H$, X_c une k-compactification lisse, $\hat{F} = \mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$. On a $\mathrm{Br}(X_c)/\mathrm{Br}(k) = H^1(g, \hat{F})$.

Soit $\mathcal{T} \to X_c$ le torseur universel sur X_c de fibre triviale en le point marqué de $G/H \subset X_c$ – le point marqué est le k-point image de $e \in G(k)$. C'est un torseur sur X_c sous le k-tore F. On a une flèche d'évaluation associée $X_c(k) \to H^1(k, F)$, qui induit une flèche

$$X_c(k)/R \to H^1(k, F).$$

Ici $X_c(k)/R$ désigne le quotient de $X_c(k)$ par la R-équivalence.

On dispose par ailleurs d'un accouplement naturel $X_c(k)/R \times H^1(g, \hat{F}) \to \mathrm{Br}(k)$ obtenu en identifiant $H^1(g, \hat{F})$ avec le sous-groupe de $\mathrm{Br}(X_c)$ formé des éléments s'annulant sur le point image de $e \in G(k)$ dans $G/H \subset X_c$. On a un accouplement naturel de cup-produit $H^1(k, F) \times H^1(g, \hat{F}) \to \mathrm{Br}(k)$, induisant une flèche composée $X_c(k)/R \to H^1(k, F) \to \mathrm{Hom}(H^1(g, \hat{F}) \to \mathrm{Br}(k))$, c'est-à-dire un accouplement $X_c(k)/R \times H^1(g, \hat{F}) \to \mathrm{Br}(k)$. Cet accouplement coïncide avec celui défini ci-dessus ([CT/San2], Prop. 2.7.10 p. 448).

Théorème 5.1 *Soit k un bon corps de dimension cohomologique ≤ 2.*
(i) Si k est un corps p-adique, la flèche $X_c(k)/R \to H^1(k, F)$ est surjective.
(ii) Si H est un k-tore, la flèche $X_c(k)/R \to H^1(k, F)$ est surjective.
(iii) La conjecture C implique que la flèche $X_c(k)/R \to H^1(k, F)$ est surjective.

Démonstration Pour la définition d'un bon corps de dimension cohomologique ≤ 2, voir la remarque 3.2.1. La construction géométrique utilisée aux §§ 3 et 4, dont on garde les notations, permet de ramener la proposition pour X à la proposition pour Z. On dispose alors de $f : Z_c \to Q_c$ induisant le G_Q-espace homogène $f : Z \to Q$ dont tout stabilisateur géométrique est isomorphe au groupe connexe $\overline{H}$ satisfaisant $\overline{H}^{tor} = 1$.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z_c(k)/R & \to & H^1(k, F_{Z_c}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_c(k)/R & \to & H^1(k, F_{Q_c}) \end{array}$$

où F_{Z_c}, resp. F_{Q_c}, est le k-tore dual de $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_c)$, resp. $\mathrm{Pic}(\overline{Q}_c)$, et où les flèches horizontales sont données par les torseurs universels triviaux aux points marqués évidents de Z_c et Q_c. Sous les hypothèses du théorème, nous voulons montrer que la flèche $Z_c(k)/R \to H^1(k, F_{Z_c})$ est surjective.

Par la théorie des k-tores ([CT/San1]) on sait que la flèche $Q_c(k)/R \to H^1(k, F_{Q_c})$ est un isomorphisme et que la flèche $Q(k) \to Q_c(k)/R$ est surjective.

Pour k un bon corps de dimension cohomologique ≤ 2, le théorème de Borovoi ([Bo1] 7.2 (ii), avec le complément indiqué à la remarque 3.2.1) assure que la flèche $Z(k) \to Q(k)$ est surjective. Ainsi la flèche $Z_c(k)/R \to Q_c(k)/R \simeq H^1(k, F_{Q_c})$ est surjective. Pour établir le théorème, il suffit de montrer que sous les diverses hypothèses envisagées, la flèche $H^1(k, F_{Z_c}) \to H^1(k, F_{Q_c})$ est un isomorphisme.

D'après le théorème 3.2, sur un corps quelconque de caractéristique zéro, la flèche naturelle $\mathrm{Br}(Q_c)/\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(Z_c)/\mathrm{Br}(k)$ est un isomorphisme. La proposition 1.1 assure alors que la flèche naturelle

$$H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{Q}_c)) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{Z}_c))$$

est un isomorphisme. Lorsque k est un corps p-adique, pour tout k-tore T l'accouplement de cup-produit $H^1(k,T)\times H^1(g,\hat{T}) \to \mathrm{Br}(k) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est une dualité parfaite de groupes finis. Ainsi, dans ce cas, la flèche naturelle $H^1(k, F_{Z_c}) \to H^1(k, F_{Q_c})$ est bijective. Ceci achève d'établir le point (i).

Pour k un corps quelconque, si H est un tore, la proposition 4.3 vaut de façon inconditionnelle (voir le théorème 4.4), et donc la flèche $H^1(k, F_{Z_c}) \to H^1(k, F_{Q_c})$ est une bijection. Ceci achève d'établir le point (ii).

Pour k un corps quelconque, sans hypothèse sur H autre que la connexité, la conjecture C implique (Proposition 4.3) que la flèche $H^1(k, F_{Z_c}) \to H^1(k, F_{Q_c})$ est une bijection. Ceci achève d'établir le point (iii). $\square$

Question 5.2 *Sous les hypothèses du théorème 5.1, la flèche $X_c(k)/R \to H^1(k,F)$ est-elle une bijection ?*

Au vu du corollaire 3.5, ce résultat impliquerait la finitude de $X_c(k)/R$ lorsque k est un corps de nombres totalement imaginaire (pour k un corps p-adique, la finitude de $X_c(k)/R$ est facile à établir).

La question 5.2 a une réponse affirmative lorsque le sous-groupe fermé connexe H est normal dans G (Gille, [G] et appendice de [B/K2] ; Thm. 6.2 de [CT2]).

Le premier cas à étudier est celui où k est un corps p-adique et H est un groupe semi-simple. Dans ce cas, au vu de la proposition 3.1, la question est :

Soient k un corps p-adique, G un k-groupe semi-simple simplement connexe, $H \subset G$ un k-sous-groupe fermé connexe, semi-simple. Soit X_c une k-compactification lisse de $X = G/H$. La R-équivalence sur $X_c(k)$ est-elle triviale ?

D'après un résultat général de Kollár [K], la question équivaut à celle de la trivialité de la R-équivalence sur l'ouvert $G/H = X \subset X_c$.

Remarque Sur un corps p-adique, on ne dispose pas à ce jour d'un exemple de variété (géométriquement) rationnellement connexe pour laquelle la R-équivalence est plus fine que l'équivalence de Brauer.

§**6. Autour de la conjecture C**

Rappelons-en l'énoncé.

Conjecture C *Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K, de corps résiduel κ. Soit G un K-groupe semi-simple simplement connexe et soit E/K un espace homogène sous G de stabilisateur géométrique connexe et de tore associé trivial. Soit X un A-schéma propre, régulier, intègre, dont la fibre générique contient E comme ouvert dense. Alors il existe une composante de multiplicité 1 de la fibre spéciale de X/A qui est géométriquement intègre sur son corps de base κ.*

On peut faire les remarques suivantes.

1) Au moins en caractéristique résiduelle zéro, l'existence d'une composante de multiplicité 1 est garantie par le fait que le hensélisé strict K^{nr} de K est un corps de dimension cohomogique 1, et donc $E(K^{nr}) \neq \emptyset$ – mais ceci vaudrait pour tout espace homogène. La question est, sous

l'hypothèse supplémentaire que le stabilisateur géométrique est extension d'un groupe semi-simple connexe par un groupe unipotent, de trouver une telle composante *géométriquement intègre*.

2) Lorsque K est un corps p-adique, la conjecture est connue, c'est une conséquence d'un théorème de Borovoi ([Bo1], Thm. 7.2) généralisant le cas des espaces principaux homogènes de groupes semi-simples simplement connexes, dû à Kneser. Ce résultat de Borovoi *motive* la conjecture C.

Proposition 6.1 *Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K, de corps résiduel κ. Soit X/K une k-variété propre et lisse géométriquement intègre, et soient $\mathcal{X}_1/A$ et $\mathcal{X}_2/A$ deux A-schémas propres, réguliers, connexes de fibre générique X/K. Si pour l'un de ces modèles il existe une composante de multiplicité 1 de la fibre spéciale qui est géométriquement intègre, alors il en est de même pour l'autre modèle.*

Démonstration Soit $x \in \mathcal{X}_1$ le point générique d'une composante Y de multiplicité 1 de la fibre spéciale de $\mathcal{X}_1/A$, tel que le corps κ soit algébriquement clos dans le corps des fonctions $F(Y)$ de cette composante. Soit B l'anneau local de $x \in \mathcal{X}_1$. C'est un anneau de valuation discrète de rang 1, de corps résiduel $F(Y)$. On peut noter encore x le point de $\mathrm{Spec}(B)$ correspondant à l'idéal maximal de B. Comme B est un anneau de valuation discrète et $\mathcal{X}_2/A$ est propre, l'application rationnelle de $\mathcal{X}_1$ vers $\mathcal{X}_2$ induite par l'isomorphisme entre les fibres génériques induit un A-morphisme dominant $\mathrm{Spec}(B) \to \mathcal{X}_2$. Soit $y \in \mathcal{X}_2$ l'image de x. Soit C l'anneau local de $\mathcal{X}_2$ en y. Comme $\mathcal{X}_2$ est régulier, c'est un anneau local régulier, en particulier factoriel (mais pas nécessairement de dimension 1). On a alors des homomorphismes d'anneaux locaux $A \to C \to B$, l'homomorphisme composé $A \to B$ n'étant autre que l'homomorphisme évident. Soit π une uniformisante de A, puis $\pi_C = u.\prod_{i=1}^r \rho_i^{n_i}$, avec les $n_i > 0$, une décomposition de l'image de π dans C : ici u est une unité de C, chaque ρ_i appartient à l'idéal maximal de C et est irréductible. Cette décomposition correspond à la description de la fibre spéciale de $\mathcal{X}_2/A$ au voisinage du point y. On a alors l'égalité $\pi_B = u_B.\prod_{i=1}^r (\rho_{i,B})^{n_i}$ dans B, et l'image $\rho_{i,B}$ de $\rho_i \in C$ dans B appartient à l'idéal maximal de B. L'hypothèse initiale de multiplicité 1 sur $\mathcal{X}_1$ assure que l'image de π dans B a valuation 1. Ainsi $r = 1$ et $n_1 = 1$, c'est-à-dire que π_C est un élément irréductible de l'anneau local régulier C. Ainsi la fibre spéciale de $\mathcal{X}_2/A$ au voisinage du point y n'a qu'une composante, de multiplicité 1, soit Z. Son corps résiduel $F(Z)$ est le corps des fractions de C/π_C. L'homomorphisme composé $A \to C \to B$ induit un homomorphisme composé $A/\pi \to C/\pi_C \to B/\pi_B$, soit encore $\kappa \to C/\pi_C \to F(Y)$, et donc des plongements de corps $\kappa \subset F(Z) \subset F(Y)$. Comme κ est algébriquement clos dans $F(Y)$, il l'est aussi dans $F(Z)$. □

Le théorème suivant, qui repose sur la théorie de Bruhat et Tits, est démontré par P. Gille dans l'appendice B.

Théorème 6.2 *Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe. Soit A/k un anneau de valuation discrète, de corps de fractions K et de corps résiduel κ. On suppose que le groupe $G \times_k \kappa$ est quasi-déployé. Soit X/K un torseur sous G/K. Alors X/K admet un modèle lisse $\mathcal{X}/A$ dont la fibre spéciale est géométriquement connexe.* □

Cette fibre spéciale étant lisse, elle est donc géométriquement intègre.

La proposition suivante est un simple corollaire de ce théorème.

Proposition 6.3 *Soit k un corps de caractéristique zéro, soit G un k-groupe semi-simple simplement connexe, soit Y une k-variété géométriquement intègre, soit $X \to Y$ un G_Y-torseur. Soit $X_c \to Y_c$ étendant $X \to Y$, avec X_c, Y_c projectives, lisses et géométriquement connexes.*

Alors pour tout point P de codimension 1 de Y_c, de corps résiduel $k(P)$, la fibre $X_{c,P}/k(P)$ contient une composante de multiplicité 1 géométriquement intègre.

Démonstration Soit K le corps des fonctions de la variété des sous-groupes de Borel de G. Le corps k est algébriquement clos dans K. Les K-variétés lisses $X_{c,K} = X_c \times_k K$ et $Y_{c,K} = Y_c \times_k K$ sont donc géométriquement intègres, et si P est un point de codimension 1 de Y_c, il existe un unique point de codimension 1 de $Y_{c,K}$, qu'on notera P_K, s'envoyant sur P par le morphisme $Y_{c,K} \to Y_c$. Si $k(P)$ désigne le corps résiduel en $P \in Y_c$, le corps résiduel $K(P)$ de $P_K \in Y_{c,K}$ est le corps des fractions de l'anneau intègre $k(P) \otimes_k K$. Soit $\sum_{i=1}^r n_i D_i$ le diviseur de X_c défini par la fibre en P. On a ici $n_i > 0$ et D_i intègre (mais pas nécessairement géométriquement intègre). Le diviseur de $X_{c,K}$ défini par la fibre en P_K est $\sum_{i=1}^r n_i D_{i,K}$, où $D_{i,K} = D_i \times_k K$. Comme k est algébriquement clos dans K, chaque $D_{i,K}$ est intègre.

La combinaison de la proposition 6.1 et du théorème 6.2 assure que pour le diviseur $\sum_{i=1}^r n_i D_{i,K}$, il existe i avec $n_i = 1$ et $K(P)$ algébriquement clos dans le corps des fonctions de $D_{i,K}$. Ceci implique que $k(P)$ est algébriquement clos dans le corps des fonctions de D_i. □

Nous devons à M. Borovoi l'observation que les méthodes du présent article permettent d'établir le théorème suivant.

Théorème 6.4 *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soient G_i , $i = 1, 2$, deux k-groupes semi-simples simplement connexes. Soit H un k-groupe algébrique linéaire connexe qui se plonge comme sous-groupe fermé dans chacun d'eux. Soit $X_i = G_i/H$ et soit $X_{i,c}$ une k-compactification lisse de X_i. Alors les g-modules $\mathrm{Pic}(\overline{X}_{1,c})$ et $\mathrm{Pic}(\overline{X}_{2,c})$ sont isomorphes à addition près de g-modules de permutation, et les groupes $\mathrm{Br}(X_{1,c})$ et $\mathrm{Br}(X_{2,c})$ sont isomorphes.*

Démonstration Soit $H \hookrightarrow G_1 \times_k G_2$ le plongement diagonal, et soit $Z = (G_1 \times_k G_2)/H$ le quotient par ce plongement diagonal. La projection de $G_1 \times_k G_2$ sur le premier facteur induit un morphisme $Z \to X_1$ qui fait de Z un torseur sur X_1 sous G_2. Dans ce qui suit, notons $G = G_2$ et $X = X_1$. D'après Hironaka, il existe une k-compactification lisse Z_c de Z équipée de k-morphismes $Z_c \to X_{1,c}$ et $Z_c \to X_{2,c}$ étendant les projections naturelles $Z \to X_1$ et $Z \to X_2$. La démonstration du théorème 4.1 pour le morphisme $Z_c \to Q_c$, qui mène à la proposition 4.3, s'applique ici à $Z_c \to X_{1,c}$: on observera en effet que le rôle de la conjecture C dans la proposition 4.3 est d'assurer que pour tout point P de codimension 1 de Q_c, la fibre $Z_{c,P}/k(P)$ contient une composante de multiplicité 1 géométriquement intègre. Pour le morphisme $Z_c \to X_{1,c}$ ici considéré, cet énoncé est assuré par la proposition 6.3 ci-dessus, le groupe G_2 étant semi-simple simplement connexe. La proposition 4.3 dans le présent contexte assure donc que le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_c)$ est isomorphe à la somme directe de $\mathrm{Pic}(\overline{X}_{1,c})$ et d'un module de permutation. Le même argument appliqué à la projection $Z_c \to X_{2,c}$ montre que $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_c)$ est isomorphe à la somme directe de $\mathrm{Pic}(\overline{X}_{2,c})$ et d'un module de permutation. Ceci établit la première assertion de l'énoncé. La seconde s'en déduit en utilisant la proposition 1.1 et le théorème 1.4. □

Remerciements

P. Gille nous a communiqué le théorème 6.2 et a bien voulu en rédiger une démonstration (Appendice B). Nous devons à M. Borovoi le théorème 6.4.

B. Kunyavskiĭ remercie l'Université Paris-Sud de l'avoir invité en septembre 2004. C'est lors de ce séjour que les idées principales du présent article sont apparues.

Pour sa recherche, B. Kunyavskiĭ a aussi bénéficié du soutien partiel du Ministère de l'Absorption (Israël), de l'Institut Emmy Noether (Fondation Minerva), de la Fondation Israélienne des Sciences (ISF) fondée par l'Académie Israélienne des Sciences et des Lettres (le programme Centre d'Excellence "Group-theoretic Methods in the Study of Algebraic Varieties") et du réseau européen HPRN-CT-2002-00287.

Appendice A

Surjectivité p-adique pour presque tout p et groupe de Brauer

J.-L. Colliot-Thélène

Soient k un corps de nombres, X et Y des variétés projectives et lisses, géométriquement connexes, et $f : X \to Y$ un k-morphisme dominant. Si toutes les fibres de f sont géométriquement intègres, ou plus généralement si pour tout point $M \in Y$ la fibre $f^{-1}(M)$ contient une composante Δ de multiplicité 1 qui est une $k(M)$-variété géométriquement intègre, alors on sait que pour presque toute place v de k, la projection induite $X(k_v) \to Y(k_v)$ est surjective.

Je me propose de donner dans cette note une réciproque partielle, et de montrer par un exemple qu'on ne peut espérer plus quand on se place au niveau des points rationnels.

Théorème A.1 *Soient k un corps de nombres et $f : X \to Y$ un k-morphisme propre de k-variétés lisses connexes, à fibre générique géométriquement intègre. Soit $M \in Y$ un point de codimension 1, et soit $f^{-1}(M) = \sum_i e_i \Delta_i$ la décomposition du diviseur $f^{-1}(M)$ de X en composantes irréductibles. Notons k_M le corps résiduel de Y en M et $k_{M,i}$ la clôture intégrale de k_M dans le corps des fonctions $k(\Delta_i)$ de la k-variété intègre Δ_i. Si le noyau de l'application*

$$\rho_M : H^1(k_M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \prod_{i \in I_M} H^1(k_{M,i}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

où la flèche $H^1(k_M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(k_{M,i}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est $e_i \mathrm{Res}_{k_M, k_{M,i}}$, est non nul, alors il existe une infinité de places v de k telles que l'application induite $f_v : X(k_v) \to Y(k_v)$ ne soit pas surjective.

Démonstration. Supposons le noyau en question non nul. Quitte à remplacer Y par un voisinage étale convenable du point M (ce qui est loisible du point de vue de la conclusion du théorème) et X par l'image réciproque de X sur cet ouvert étale, notant $F \subset Y$ l'adhérence de M dans Y, et $U \subset Y$ le complémentaire de F, on se ramène à la situation suivante : il existe une algèbre d'Azumaya A sur $Y \setminus F$ dont l'image réciproque sur X est non ramifiée en codimension 1, donc définit une classe dans le groupe de Brauer-Grothendieck de X. Il est connu que le groupe de Brauer-Grothendieck de la k-variété lisse X coïncide avec le groupe de Brauer-Azumaya. Quitte à remplacer A par une algèbre d'Azumaya équivalente sur Y, on trouve ainsi un schéma de Severi-Brauer $Z \to X$ dont la restriction $Z_U \to X_U$ définit une classe dans $\mathrm{Br}(X_U)$ image réciproque d'un élément de $\mathrm{Br}(U)$ qui ne provient pas de $\mathrm{Br}(Y)$.

Soit alors $\tilde{Z} \to \tilde{X} \to \tilde{Y}$ un modèle de $Z \to X \to Y$ au-dessus d'un ouvert (non vide) T de l'anneau O_k des entiers du corps de nombres k. Ici $\tilde{Z}$ est un schéma de Severi-Brauer sur $\tilde{X}$, et le T-morphisme $\tilde{X} \to \tilde{Y}$ est propre. Pour toute place v de T, l'application induite sur les points O_v-entiers $\tilde{Z}(O_v) \to \tilde{X}(O_v)$ est surjective (tout schéma de Severi-Brauer sur un corps fini est trivial).

Supposons que pour presque toute place v de k, donc de T, l'application $f_v : X(k_v) \to Y(k_v)$ soit surjective. Comme $\tilde{X} \to \tilde{Y}$ est un morphisme propre, il en résulte que pour le même ensemble de places v de T, l'application $\tilde{X}(O_v) \to \tilde{Y}(O_v)$ est surjective. Ainsi l'application composée $\tilde{Z}(O_v) \to \tilde{X}(O_v) \to \tilde{Y}(O_v)$ est surjective. Ceci implique que pour presque toute place v de T, en tout point de $U(k_v) \cap \tilde{Y}(O_v)$, l'algèbre A s'annule. Mais comme A est ramifiée sur F, ceci contredit un théorème de Harari ([Ha], Théorème 2.1.1 ; [CT1], Théorème 1.3).

Le théorème peut s'énoncer encore ainsi :

Théorème A.2 *Soient k un corps de nombres et $f : X \to Y$ un k-morphisme propre de k-variétés lisses connexes, à fibre générique géométriquement intègre. Si pour presque toute place*

v de k, l'application induite $f_v : X(k_v) \to Y(k_v)$ est surjective, alors tout élément du groupe de Brauer du corps des fonctions de Y qui devient non ramifié sur X est non ramifié sur Y.

Un exemple

Soit k un corps de caractéristique différente de 2, et soient $a, b \in k^\times$. Considérons l'équation

$$(x^2 - ay^2)(u^2 - bv^2)(z^2 - abw^2) = t \neq 0. \qquad (1)$$

La projection f sur la coordonnée t fait de cette variété affine E un espace principal homogène sur la k-variété $\mathbf{G}_{m,k}$ sous le k-tore T défini par

$$(x^2 - ay^2)(u^2 - bv^2)(z^2 - abw^2) = 1.$$

Soit $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ un k-morphisme de k-variétés propres, lisses, géométriquement intègres compactifiant le morphisme $f : E \to \mathbf{G}_{m,k}$. Soit $O \in \mathbf{P}^1_k$ le point (k-rationnel) défini par $t = 0$.

Assertion 1 *Soit $\Delta \subset X$ une composante irréductible du diviseur $f^{-1}(O)$. Alors on a l'une des deux possibilités :*
(i) La multiplicité de Δ dans $f^{-1}(O)$ est paire.
(ii) Au moins l'un de a, b, ab est un carré dans le corps des fonctions de Δ.

Démonstration. Soit ω la valuation discrète de rang 1 du corps des fonctions de X associée au diviseur $\Delta \subset X$. Si (ii) n'est pas satisfait, alors chacune des valuations $\omega(x^2 - ay^2)$, $\omega(u^2 - bv^2)$, $\omega(z^2 - abw^2)$ est paire. Il en est donc de même de $\omega(t) > 0$. Ainsi la multiplicité de Δ dans $f^{-1}(O)$ est paire (strictement positive). $\square$

Si donc aucun de a, b, ab n'est un carré dans k, alors la fibre de f en O ne contient aucune composante de multiplicité 1 géométriquement intègre. L'argument vaut aussi pour les composantes de $f^{-1}(\infty)$.

Soit maintenant k est un corps de nombres, et soient $a, b \in k^\times$. Soit $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ comme ci-dessus.

Assertion 2. *Pour presque toute place v de k, l'application induite $X(k_v) \to \mathbf{P}^1(k_v)$ est surjective.*

Démonstration. Soit v une place de k. Comme l'image de $X(k_v)$ dans $\mathbf{P}^1(k_v)$ est fermée, pour établir l'assertion de surjectivité pour une place v, il suffit de montrer que $\mathbf{G}_m(k_v)$ est dans l'image. En toute place v finie non dyadique telle que a et b soient des unités, soit a, soit b, soit ab est un carré dans k_v. Pour tout $t_0 \in k_v^\times$, on peut donc résoudre l'équation

$$(x^2 - ay^2)(u^2 - bv^2)(z^2 - abw^2) = t_0$$

dans k_v. $\square$

On a donc une situation de surjectivité sur k_v pour presque toute place v de k, sans que pour autant toute fibre contienne une composante de multiplicité 1 géométriquement intègre.

Sur un modèle évident $X/\mathbf{P}^1_k$ on voit qu'au-dessus de tout point de $\mathbf{P}^1_k$ différent de O et de ∞, la fibre contient une composante de multiplicité 1 géométriquement intègre, et qu'en chacun des points O et de ∞, il existe dans la fibre trois composantes de multiplicité 1 telles que les clôtures intégrales de k dans ces composantes soient $k(\sqrt{a}), k(\sqrt{b}), k(\sqrt{ab})$. L'application de restriction diagonale

$$H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(k(\sqrt{a}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times H^1(k(\sqrt{b}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times H^1(k(\sqrt{ab}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

a un noyau trivial. On comparera ce fait, les assertions 1 et 2 et le théorème A.2.

Appendice B

Une application de la théorie de Bruhat et Tits

P. Gille

Soit k un corps de caractéristique nulle.

Proposition B.1. *Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe. Soit A/k un anneau de valuation discrète, de corps de fractions K et de corps résiduel κ. On suppose que le groupe $G \times_k \kappa$ est quasi-déployé. Soit X/K un torseur sous G/K. Alors X/K admet un modèle lisse $\mathcal{X}/A$ dont la fibre spéciale est géométriquement connexe.*

Démonstration : On note $\widehat{A}$ (resp. $\widehat{K}$) le complété de A (resp. K). On note $\widehat{X} = X \otimes_A \widehat{A}$. Soit $\gamma = [X] \in H^1(K, G)$ (resp. $\widehat{\gamma} = [\widehat{X}] \in H^1(\widehat{K}, G)$) la classe d'isomorphie du G–torseur X (resp. $\widehat{X}$). Le groupe $G \times_k \kappa$ est quasi-déployé, donc le groupe $G \times_k \widehat{K}$ est quasi-déployé d'après le lemme de Hensel. Suivant le corollaire 3.15 de [BT2], il existe un schéma en groupes parahorique $\widehat{\mathbf{P}}/\widehat{A}$, lisse, de fibre générique $G \times_k \widehat{K}$, tel que

$$\widehat{\gamma} \in \mathrm{Im}\Big(H^1_{ét}(\widehat{A}, \widehat{\mathbf{P}}) \to H^1(\widehat{K}, G)\Big).$$

Le $\widehat{A}$-schéma en groupes $\widehat{\mathbf{P}}$ est affine. La proposition D.4, Chapitre 6.2 de [BLR] (p. 147) montre que l'isomorphisme $\widehat{\mathbf{P}} \times_{\widehat{A}} \widehat{K} \cong G \otimes_k \widehat{K}$ définit un A–schéma en groupes affines $\mathbf{P}$ de fibre générique G_K et tel que $\mathbf{P} \times_A \widehat{A} \cong \widehat{\mathbf{P}}$. Par descente, le schéma $\mathbf{P}$ est lisse sur A. Le lemme de recollement de Harder ([H], Lemma 4.1.3) énonce que le diagramme commutatif suivant d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccc} H^1_{ét}(A, \mathbf{P}) & \longrightarrow & H^1_{ét}(\widehat{A}, \mathbf{P}) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ H^1(K, G) & \longrightarrow & H^1(\widehat{K}, G). \end{array}$$

est cartésien. Par suite, $\gamma \in \mathrm{Im}\Big(H^1_{ét}(A, \mathbf{P}) \to H^1(K, G)\Big)$. En d'autres mots, il existe un torseur $\mathcal{X}/A$ sous P/A tel que $\mathcal{X} \times_A K \cong X$. Le schéma $\mathcal{X}$ est lisse sur A. Sur une clôture séparable κ_s de κ, on a un isomorphisme $\mathcal{X} \times_A \kappa_s \cong \mathbf{P} \times_A \kappa_s = \widehat{\mathbf{P}} \times_{\widehat{A}} \kappa_s$ avec la fibre spéciale du groupe parahorique $\widehat{\mathbf{P}}$. Puisque G est simplement connexe, la proposition 4.6.32 page 137 de [BT1] indique que le groupe $\widehat{\mathbf{P}}/\widehat{A}$ est connexe (i.e. ses fibres sont des groupes algébriques connexes). On conclut que la fibre spéciale de $\mathcal{X}$ est géométriquement connexe. $\square$

Remarque Cette méthode ne peut pas fonctionner sans l'hypothèse de quasi-déploiement sur G_κ. Par exemple, si X/K est un torseur sous un groupe G/K de type E_8, F_4, G_2 (un tel groupe est son propre groupe d'automorphismes), alors X représente le schéma des isomorphismes $\mathrm{Isom}_{gr}(X(G), G)$, où $X(G)$ désigne le groupe tordu par automorphismes intérieurs. Avec la théorie de Bruhat-Tits, les K–groupes $X(G)$ et G admettent des A-modèles $P_1/A, P_2/A$ (uniques si les groupes sont anisotropes) mais en général, le schéma $\mathrm{Isom}_{gr}(P_1, P_2)$ n'est pas plat sur A. En d'autres mots, les groupes $X(G)/K$ et G/K peuvent être ramifiés de façon totalement différente.

BIBLIOGRAPHIE

[Bog] F. A. Bogomolov, Brauer group for invariant fields of algebraic groups, Mat. Sb. **180** (1989) 279–293 ; transl. Math. USSR-Sb. **66** (1990) 285–299.

[Bo1] M. Borovoi, Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology, Duke Math. J. **72** (1993) 217–239.

[Bo2] M. Borovoi, The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer, J. reine angew. Math. (Crelle) **473** (1996) 181–194.

[B/K1] M. Borovoi et B. Kunyavskiĭ, Formulas for the unramified Brauer group of a principal homogeneous space of a linear algebraic group, J. Algebra **225** (2000) 804–821.

[B/K2] M. Borovoi et B. Kunyavskiĭ, Arithmetical birational invariants of linear algebraic groups over two-dimensional geometric fields (with an appendix by P. Gille), J. Algebra **276** (2004) 292–339.

[BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud, *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge Bd. **21**, Springer (1990).

[BT1] F. Bruhat et J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local II, Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée. Publ. Math. IHES **60** (1984) 197–376.

[BT2] F. Bruhat et J. Tits, Groupes algébriques sur un corps local III. Compléments et application à la cohomologie galoisienne, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **34** (1987), 671–698.

[CE] H. Cartan et S. Eilenberg, Homological algebra, Princeton, 1956.

[CT1] J.-L. Colliot-Thélène, Points rationnels sur les fibrations, in Higher Dimensional Varieties and Rational Points, Bolyai Society Mathematical Series, vol. **12**, Springer-Verlag, 2003, edited by K. J. Böröczky, J. Kollár and T. Szamuely, pp. 171–221.

[CT2] J.-L. Colliot-Thélène, Résolutions flasques des groupes réductifs connexes, C. R. Acad. Sc. Paris Sér. I **339** (2004) 331–334.

[CTGiPa] J.-L. Colliot-Thélène, P. Gille et R. Parimala, Arithmetic of linear algebraic groups over 2-dimensional geometric fields, Duke Math. J. **121** (2004) 285–341.

[CT/K] J.-L. Colliot-Thélène et B. Kunyavskiĭ, Groupe de Brauer non ramifié des espaces principaux homogènes des groupes linéaires, J. Ramanujan Math. Soc. **13** (1998) 37–49.

[CT/San1] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La R-équivalence sur les tores, Ann. Sc. E.N.S. **10** (1977) 175–229.

[CT/San2] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles, II, Duke Math. J. **54** (1987) 375–492.

[CT/San3] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, Principal homogeneous spaces under flasque tori : applications, J. Algebra **106** (1987) 148–205.

[CT/San4] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer group), notes from the 9th ELAM, Santiago de Chile, July 1988 ; revised version, January 2005.

[G] P. Gille, Cohomologie des groupes quasi-déployés sur des corps de dimension $\leq$ 2, Compositio Math. **125** (2001) 283–325.

[Gr] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer, I, II, III, in *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 46–188.

[Ha] D. Harari, Méthode des fibrations et obstruction de Manin, Duke Math. J. **75** (1994) 221–260.

[H] G. Harder, Halbeinfache Gruppenschemata über Dedekindringen, Invent. math. **4** (1967), 165–191.

[K] J. Kollár, Specialization of zero cycles, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 40 (2004) 689–708.

[San] J.-J. Sansuc, Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres, J. reine angew. Math. **327** (1981) 12–80.

[Vos] V. E. Voskresenskiĭ, Algebraic groups and their birational invariants, Translations of Mathematical Monographs **179** (1998), American Mathematical Society.

Jean-Louis Colliot-Thélène,

C.N.R.S.,
UMR 8628, Mathématiques,
Bâtiment 425,
Université de Paris-Sud,
F-91405 Orsay
France

courriel : colliot@math.u-psud.fr

Boris È. Kunyavskiĭ
Bar-Ilan University
Department of Mathematics
52900 Ramat-Gan
Israel

e-mail : kunyav@macs.biu.ac.il