HALBEINFACHE WURZELELEMENTE IN CHEVALLEY-GRUPPEN

ANDREI A. SEMENOV $^{\flat}$, NIKOLAI A. VAVILOV $^{\sharp}$

$^{\flat,\sharp}$ Fakultät für Mathemathik und Mechanik
Staatliche Universität Sankt-Petersburg
Petrodvoretz, 198904, Rußland
und
$^{\flat}$ Institut für Mathematik II
Freie Universität Berlin
14195 Berlin, Deutschland
und
$^{\sharp}$ Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
33615 Bielefeld, Deutschland

ABSTRACT. In this paper we study the Bruhat decomposition of semisimple long root elements in Chevalley groups. First we discuss some problems on the description of subgroups in Chevalley groups which motivate this study. We state explicit results about the Weyl factors in the Bruhat decomposition of long root tori. It turns out that these elements are not more complicated than in a Chevalley group of type D_4 (Satz 1). We explicitly list possibilities for the Weyl factor (Satz 2) and study interrelations between Weyl factors of the semisimple long root elements from the same one-dimensional torus. It turns out that all elements from a given

---

Key words and phrases. Chevalley-Gruppen, Bruhat-Zerlegung, halbeinfache Wurzelelemente, Wurzeltori.

Die Autoren sind *Freie Universität Berlin*, *Alexander von Humboldt-Stiftung* und *SFB 343 an der Universität Bielefeld* für die Unterstützung sehr dankbar.

Die Russische Fassung dieses Artikels ist in die "Russische Mathematische Doklady" eingereicht.

long root torus, except at most three of them lie in the same Bruhat cell (Satz 3), we can explicitly determine the possible degeneration (Satz 4). We give also some information concerning the Borel factors (Satz 5) and the generalization to all elements from a fundamental SL_2 corresponding to a long root (Satz 6).

Einführung

In diesem Artikel betrachten wir die halbeinfachen langen Wurzelelemente in Chevalley-Gruppen. Es sei Φ ein reduziertes irreduzibles Wurzelsystem und P ein Gitter zwischen dem Gewichtegitter $P(\Phi)$ und dem Wurzelgitter $Q(\Phi)$. Weiter sei K ein Körper. Diesen Daten entspricht eine Chevalley-Gruppe $G = G_P(\Phi, K)$, siehe [B], [C1], [Hu], [St]. Sei $T = T_P(\Phi, K)$ ein zerfallender maximaler Torus in G und $B = B_P(\Phi, K)$ eine Borel-Untergruppe, die T enthält. Im folgenden spielt P eigentlich keine Rolle und wird in den Bezeichnungen unterdrückt. Wir können alles auf den Fall von einfach zusammenhängenden $G = G_{\mathrm{sc}}$ (d.h. auf den Fall $P = P(\Phi)$) reduzieren. Mit $W = W(\Phi)$ bezeichnet man die Weyl-Gruppe von Φ. Dann gilt die Bruhat-Zerlegung $G = BWB$.

In dieser Arbeit formulieren wir Resultate über die Bruhat-Zerlegung von halbeinfachen Wurzelelementen $xh_\alpha(\varepsilon)x^{-1}$, wo $\alpha \in \Phi$ eine lange Wurzel ist (etwa die maximale Wurzel δ), $\varepsilon \in K^*$ ein invertierbares Element von K ist und $x \in G$ ist. Es gelingt uns, ganz konkret zu bestimmen, welche Bruhat-Zellen ein *langer Wurzeltorus*

$$Q_x = \left\{ y(\epsilon) = xh_\delta(\epsilon)x^{-1},\ \epsilon \in K^* \right\}, \qquad x \in G,$$

schneidet. Erstens reduzieren wir das Problem auf den Fall D_4 der achtdimensionalen orthogonalen Gruppe (Satz 1). Alle weiteren Ergebnisse werden durch konkrete Rechnungen in dieser Gruppe bewiesen, gelten jedoch für alle Chevalley-Gruppen. In Satz 2 bestimmen wir alle möglichen Weyl-Faktoren in Bruhat-Zerlegungen von halbeinfachen langen Wurzelelementen. Satz 3 besagt, daß alle Elemente eines langen Wurzeltorus bis auf die Identität und höchstens zwei weitere Elemente zur selben Bruhat-Zelle gehören. Mit Hilfe von Satz 4 kann man diese Ausartungen ganz explizit beschreiben. Satz 5 enthält einige Informationen über die Borel-Faktoren in dieser Bruhat-Zerlegung. Satz 6 schließlich ist eine Verallgemeinerung von Satz 1 auf alle Elemente einer fundamentalen $(\mathrm{P})\,\mathrm{SL}(2, K)$, die einer langen Wurzel entspricht.

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung von [V5], [V7], [V8], [VS], [Se1]. Die Sätze 1, 3 und 5 waren schon in diesen Publikationen enthalten. Die Sätze 2, 4 und 6 dagegen werden hier erstmals veröffentlicht (siehe [Se2]). Der künftige Artikel [SV] soll die ausführlichen Beweisen dieser und verwandter Resultate darstellen.

Bezeichnungen

Sei wie oben $G = G(\Phi, K)$ eine Chevalley-Gruppe von Typ Φ über einem Körper K und $T = T(\Phi, K)$ ein zerfallender maximaler Torus. Jeder Wurzel $\alpha \in \Phi$ und