Formes quadratiques de hauteur et de degré 2

Bruno Kahn

1991 Mathematics Subject classification : 11E04

Abstract

We classify quadratic forms of height 2 and degree 2 in the sense of Knebusch [14, 15] over any field of characteristic $\neq 2$, completing the earlier results of Knebusch and Fitzgerald. Such an anisotropic form is either excellent, or a 6-dimensional 'Albert form' or an 8-dimensional form of a certain type. We also give partial results for forms of degree > 2. We then show that forms of height 2 and degree ≤ 2 (at least the non-excellent ones) can be parametrised, up to similitude, by cohomological invariants. Does this phenomenon extend to higher heights and degrees ?

Dans cet article, on classifie les formes quadratiques de hauteur et de degré 2 sur un corps commutatif quelconque (de caractéristique $\neq 2$). Le résultat principal est le suivant :

Théorème. *Soient F un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$ et q une forme quadratique anisotrope sur F, de hauteur et de degré 2 au sens de Knebusch* [14, 15]. *Alors,*
(i) soit q est excellente ;
(ii) soit $\dim(q) = 8$ *et $q \cong q_1 \otimes \theta$, où θ est une 1-forme de Pfister et $c(q) \neq 0$;*
(iii) soit q est une "forme d'Albert" (de dimension 6).
Réciproquement, toute forme anisotrope de type (ii) ou (iii) est de hauteur et de degré 2.

Remarque. Les cas (i), (ii) et (iii) s'excluent mutuellement.

Une partie substantielle de ce résultat a été obtenue auparavant par Knebusch [15] et Fitzgerald [9] ; nous en donnons de nouvelles démonstrations, de nature cohomologique. Leur travail implique que toute forme de hauteur et de degré 2 qui n'est pas du type (i) ou (iii) de l'énoncé est de dimension ≤ 26. La preuve qu'une telle forme est en fait une forme d'Albert est une application simple du théorème de réduction d'indice de Merkurjev [18], qui ne semble pas avoir été observée auparavant. Elle montre une fois de plus la puissance de ce théorème.

Pour les résultats "classiques" de la théorie algébrique des formes quadratiques, on renvoie à [16] ou [24]. La plupart des notations utilisées dans cet article se trouvent dans ces ouvrages ; on les précise au §1 pour la commodité du lecteur. Les notions de hauteur et de degré d'une forme quadratique sont rappelées au §2, où l'on donne également les résultats généraux de Knebusch les concernant et une version plus précise de l'énoncé ci-dessus (théorèmes 2.10 et 2.11). Au §3, on rappelle la démonstration de Fitzgerald du théorème 2.10 a) (concernant la partie (ii) du théorème ci-dessus) et on en donne deux autres, reposant sur les résultats de [1] et [17]. La démonstration du théorème 2.11 (partie

(iii) du théorème ci-dessus), comme indiqué, utilise [18]. Au §4, on considère les formes quadratiques de hauteur 2 et de degré > 2 et on donne des généralisations partielles des résultats du §2. On y donne en particulier une discussion sommaire du problème de la "descente" des formes de Pfister, étroitement lié à ces questions.

Le thème final de cet article est de montrer comment les invariants cohomologiques associés aux formes quadratiques, réellement ou encore conjecturalement, peuvent servir d'outil pour des problèmes de classification tels que celui des formes de hauteur et de degré donné. Outre le fait que les démonstrations cohomologiques du théorème de Fitzgerald données au §3 se généralisent au degré 3 et conjecturalement aux degrés supérieurs, alors que ce n'est pas *a priori* le cas de la sienne, on montre au §5 que les formes non excellentes de hauteur 2 et de degré ≤ 2 peuvent être *paramétrées*, à similitude près, par certains invariants cohomologiques dépendant du type de la forme en question (dans le cas des formes excellentes, on a une paramétrisation au moyen de formes de Pfister, qui correspondent conjecturalement à des invariants cohomologiques, voir corollaire 5.1 et conjecture 5). On arrive ainsi à une division des formes quadratiques de petite hauteur et de petit degré en classes définies par des invariants "discrets" (hauteur, degré, type au sens du §2), au sein desquelles elles se comportent comme des "familles continues" (*i.e.* sont paramétrées par une famille de classes de cohomologie galoisienne d'un type fixé), généralisant la manière dont les formes de Pfister de degré n sont paramétrées par les symboles de degré n (conjecturalement pour $n \geq 6$). Ce phénomène persiste-t-il en hauteur et degré plus grands ?

Ce travail a été achevé au cours d'un séjour à l'Université de Bielefeld en décembre 1993. J'ai plaisir à remercier Ulf Rehmann et le Sonderforschungsbereich 343 "diskrete Strukturen in der Mathematik" pour leur hospitalité et l'atmosphère de travail détendue qu'ils entretiennent. Je remercie également Jürgen Hurrelbrink et Markus Rost pour des discussions au cours du colloque de K-théorie algébrique d'Oberwolfach (juin 1993), qui ont conduit à ces résultats, Cornelius Greither pour avoir suggéré l'expression "forme dominante" en traduction de "leading form" et Adrian Wadsworth pour une simplification de l'énoncé de la proposition 5.1.

Tous les corps considérés dans cet article sont de caractéristique $\neq 2$. Sauf mention expresse du contraire, toutes les formes quadratiques sont non dégénérées.