Topologisch endengleiche Bäume in unendlichen Graphen

Kerstin Waas

Zusammenfassung

Ein Ziel der unendlichen Graphentheorie besteht darin, die Endenstruktur eines Graphen durch möglichst einfache Teilgraphen darzustellen. Da Bäume bzw. Wälder eine sehr einfache Endenstruktur haben, interessiert man sich insbesondere dafür, welche Graphen einen endengleichen Spannbaum oder zumindest einen endengleichen Wald besitzen. Berücksichtigt man zusätzlich die topologische bzw. uniforme Struktur des Endenraums, so stellt sich folgende Frage: Welche Graphen besitzen einen gleichmäßig oder zumindest topologisch endengleichen Wald? Wir werden in dieser Arbeit zeigen, daß jeder zusammenhängende Graph mit metrisierbarem uniformem Endenraum, dessen $K_{\aleph_0}$ und dicke $TK_{\aleph_0}$ nur zu endlich vielen Enden gehören, einen gleichmäßig endengleichen Wald besitzt.

Einleitung

Wir betrachten in dieser Arbeit die Endenstruktur von unendlichen Graphen. Ein *Ende* eines Graphen G besteht hierbei aus sämtlichen Strahlen von G, die dasselbe Konvergenzverhalten aufweisen. Formal definieren wir diesen Begriff durch eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Strahlen von G: Zwei Strahlen von G heißen äquivalent, wenn keine endliche Eckenmenge aus G diese beiden Strahlen trennnt. Die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation nennen wir *Enden* und die Menge aller Enden von G den *Endenraum* $\Omega(G)$.
Ein Ziel der unendlichen Graphentheorie besteht darin, die Endenstruktur eines Graphen durch möglichst einfache Teilgraphen darzustellen. Wir bezeichnen daher einen Teilgraphen H eines Graphen G als *endengleich*, wenn sich die Endenstrukturen der beiden Graphen bijektiv entsprechen. Der Teilgraph H heißt topologisch bzw. gleichmäßig endengleich, wenn H die Endenstruktur von G nicht nur bijektiv repräsentiert, sondern auch deren topologische bzw. uniforme Struktur erhält.
Da in einem Baum offensichtlich nur solche Strahlen äquivalent sind, die gemeinsame Teilstrahlen besitzen, stellen endengleiche Bäume oder Wälder die Endenstruktur eines Graphen auf besonders einfache Weise dar. Von Interesse ist daher folgende Frage [H1], [D1]: Besitzt jeder zusammenhängende Graph einen endengleichen Spannbaum oder zumindest einen endengleichen Wald? Gegenbeispiele von Thomas / Seymour [T/S] und Thomassen [Th] zeigen, daß dies nicht der Fall ist. Halin [H1] bewies jedoch, daß jeder abzählbare zusammenhängende Graph einen endengleichen Spannbaum besitzt.
Berücksichtigt man zusätzlich die uniforme bzw. topologische Struktur des Endenraums, so stellt sich folgende Frage [D1]: Welche Graphen besitzen einen gleichmäßig

oder zumindest topologisch endengleichen Wald? Eine Antwort auf diese Frage gibt ein Resultat von Diestel [D1]: Jeder normale Spannbaum eines zusammenhängenden Graphen ist gleichmäßig endengleich. Aus den Untersuchungen von Halin und Jung über die Existenz von normalen Spannbäumen folgt daher, daß jeder abzählbare Graph [Ju], jeder Graph, der keinen $TK_{\aleph_0}$ enthält [H2], und jeder Graph, der weder einen $K_{\aleph_0}$ noch dicken $TK_{\aleph_0}$ enthält [H2], einen gleichmäßig und damit auch topologisch endengleichen Wald besitzt. Hierbei bezeichnen wir einen abzählbar unendlichen vollständigen Graphen als $K_{\aleph_0}$; unter einem dicken $TK_{\aleph_0}$ verstehen wir einen unterteilten $K_{\aleph_0}$, dessen Hauptecken paarweise durch $\aleph_1$ unabhängige Wege verbunden sind.

Da der topologische Endenraum eines beliebigen Waldes metrisierbar ist, ist insbesondere der topologische Endenraum eines Graphen mit topologisch endengleichem Wald metrisierbar. Es stellt sich daher die Frage, ob auch die Umkehrung gilt: Besitzt jeder Graph mit metrisierbarem topologischem Endenraum einen topologisch endengleichen Wald ?

Für jeden metrisierbaren uniformen Raum ist der zugehörige topologische Raum ebenfalls metrisierbar. Daher ist auch folgende schwächere Version dieser Frage von Interesse: Besitzt jeder Graph mit metrisierbarem uniformem Endenraum einen gleichmäßig endengleichen Wald ?

Diese Fragestellung werden wir in dieser Arbeit untersuchen. Wir werden zeigen, daß jeder zusammenhängende Graph mit metrisierbarem uniformem Endenraum, dessen $K_{\aleph_0}$ und dicke $TK_{\aleph_0}$ nur zu endlich vielen Enden gehören, einen gleichmäßig endengleichen Wald besitzt.

Dazu betrachten wir einen beliebigen zusammenhängenden Graphen, welcher diese Voraussetzungen erfüllt. Induktiv werden wir die $K_{\aleph_0}$ und dicken $TK_{\aleph_0}$ aus diesem Graphen entfernen, gleichzeitig aber die uniforme Endenstruktur erhalten. Aufgrund der oben erwähnten Ergebnisse von Halin [H2] und Diestel [D1] besitzt der betrachtete Graph somit einen gleichmäßig endengleichen Baum.

Kapitel 1

1.1 Graphentheoretische Begriffe und Notationen

Sämtliche graphentheoretische Begriffe, die in dieser Arbeit nicht explizit definiert werden, sind im Sinne der Definitionen von Halin [H3] zu verstehen.

Für einen Graphen G bezeichnen wir mit $V(G)$ die Eckenmenge, mit $E(G)$ die Kantenmenge von G.

Unter einem *Strahl* eines Graphen G verstehen wir einen einseitig unendlichen Weg aus G. Einen unendlichen zusammenhängenden Teilgraphen eines Strahls T nennen wir *Teilstrahl* von T.

Zwei Strahlen T, T' aus G bezeichnen wir als *(enden-)äquivalent*, in Zeichen $T \sim T'$, falls unendlich viele paarweise disjunkte T-T'-Wege in G existieren. Mit anderen