Inhaltsverzeichnis

Einleitung **2**

1 Polytope **6**

1.1 Grundlegende Begriffe 6
1.2 Gale-Diagramme 7
1.3 Fehlschnitt-Diagramme 11

2 Coxeter-Polytope im hyperbolischen Raum **16**

2.1 Spitzwinklige Polyeder im hyperbolischen Raum 17
2.2 Coxeter-Diagramme 19
2.3 Arithmetische Spiegelungsgruppen 21

3 Zur Realisierbarkeit von Polytopen als hyperbolische Coxeter-Polytope **22**

3.1 Zur Coxeter-Realisierbarkeit 23
3.2 Zur hyperbolischen Realisierbarkeit 28

4 Kompakte, hyperbolische Coxeter-Polytope mit $d+2$ Facetten **32**

5 Die maximale Dimension kompakter, hyperbolischer Coxeter-Polytope mit $d+3$ Facetten **40**

6 Grundkörper hyperbolischer, arithmetischer Coxeter-Polytope **51**

6.1 Klassifikation einfacher, 3-freier d-Polytope mit weniger als $d+6$ Facetten 52
6.2 Beweis der Theoreme 57

7 Beispiele quadratischer Grundkörper **65**

Abstract

The description of simple polytopes by Gale diagrams and ‚missing-cuts' (the dual of ‚missing-faces') is used for an investigation of compact hyperbolic Coxeter polytopes bounded by only a few facets:

Section 4 contains a list of all compact hyperbolic Coxeter polytopes the combinatorial type of which is the product of two simplices of dimension greater 1. Together with results of Kaplinskaja ([Ka]) this completes the classification of compact hyperbolic d-polytopes with $d+2$ facets.

In section 5 it is proved that compact hyperbolic Coxeter d-polytopes with $d+3$ facets exist only for $d \leq 8$ and that the example of Bugaenko ([Bu3]) for $d = 8$ is unique.

Due to a result of Nikulin ([Ni2],[Ni3]), the degree of the ground field of arithmetic Coxeter d-polytopes, $d \geq 10$, is bounded. In section 6 this is shown to be true also for $d = 9$ and for all d-polytopes bounded by at most $d+4$ facets.

The last section provides examples of arithmetic Coxeter polytopes with ground fields $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$ and $\mathbb{Q}(\sqrt{21})$.

Einleitung

Bezeichnen wir im folgenden den hyperbolischen Raum der Dimension d mit $\mathbb{H}^d$.

Ein Polyeder P im $\mathbb{H}^d$, das von endlich vielen Hyperebenen $H_1, \ldots, H_n$ berandet wird, heißt Coxeter-Polyeder, wenn für je zwei Hyperebenen H_i, H_j mit $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ der eingeschlossene Winkel, der in P liegt, von der Form $\frac{\pi}{k}$ für ein $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ ist.

Die Gruppe, die von den Spiegelungen an den Hyperebenen H_i erzeugt wird, ist diskret und hat P als einen Fundamentalbereich. Man erhält jede diskrete, endlich erzeugte Spiegelungsgruppe auf diese Weise: Der hyperbolische Raum wird durch die zu den Spiegelungen invarianten Hyperebenen in Coxeter-Polyeder unterteilt, von denen jedes ein Fundamentalbereich der Gruppe ist.

Diskrete Spiegelungsgruppen, deren Fundamentalbereiche von endlichem Volumen sind, heißen kristallographisch. Gegenstand dieser Arbeit sind kompakte Coxeter-Polyeder. Da ihr Volumen insbesondere endlich ist, sind die Ergebnisse in den Rahmen der Klassifikation kristallographischer Spiegelungsgruppen einzuordnen.

Zur Terminologie ist zu bemerken, daß alle Polyeder im $\mathbb{H}^d$ mit endlichem Volumen die konvexe Hülle endlich vieler Punkte im Abschluß $\overline{\mathbb{H}^d}$ des $\mathbb{H}^d$ sind. Die Ecken, die in $\overline{\mathbb{H}^d} \setminus \mathbb{H}^d$ liegen, heißen ‚Ecken im Unendlichen' oder auch ‚Spitzen'. Es macht also Sinn, auch in diesen Fällen den Sprachgebrauch der Polytope zu übernehmen. Dementsprechend meinen wir im folgenden mit einem Polytop immer ein Polyeder mit endlichem Volumen im $\mathbb{H}^d$ und mit einem kompakten Polytop ein solches, daß kompakt bezüglich des $\mathbb{H}^d$ ist, also insbesondere keine Spitzen besitzt.

Die Unterscheidung zwischen kompakten und nicht kompakten Coxeter-Polytopen