Generalized Dirichlet forms and associated Markov processes [1]

Wilhelm Stannat[2]

Abstract - We prove that for a certain class of bilinear forms satisfying some regularity conditions which include quasi-regular Dirichlet forms (cf. [3]) and time dependent Dirichlet forms (cf. [5]) as particular cases there exists an associated strong Markov process having nice sample path properties. These forms, called generalized Dirichlet forms, are the sum of a coercive part and a perturbation (e.g. the time derivative in the time dependent case), so that in general neither the sector condition is fulfilled by the sum nor is the associated L^2-semigroup analytic. A wide variety of new examples can be treated in this extended framework of Dirichlet forms including fractional diffusion operators and transformations of time dependent Dirichlet forms by α-excessive functions h (h-transformations).

Formes de Dirichlet généralisées et processus de Markov associés

Résumé - Nous construisons des processus standard spéciaux associés à certaines formes bilinéaires qui satisfont à quelques conditions de régularité. La classe de ces formes que nous appelons formes de Dirichlet généralisées, contient les formes de Dirichlet quasi régulières (cf. [3]) aussi bien que les formes de Dirichlet dépendant du temps (cf. [5]). Une forme de Dirichlet généralisée est la somme d'une forme coercive et d'une perturbation (par exemple la dérivation par rapport au temps dans le cas des formes de Dirichlet dépendant du temps). Donc en général les formes ne sont pas coercives, et les semigroupes associés ne sont pas non plus analytiques. Nous pouvons traiter de nombreux exemples nouveaux dont des opérateurs de diffusions fractionnaires et la transformée d'une forme de Dirichlet dépendant du temps par une fonction α-excessive.

[1] Diese Arbeit erscheint in: C. R. Acad. Sci. Paris

[2] Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, Postfach 100131, 33501 Bielefeld

Version française abrégée - Soit E une espace topologique de Hausdorff, dont la tribu borélienne $\mathcal{B}$ est engendrée par l'ensemble $C(E)$ des fonctions continues. Soit m une mesure positive σ-finie, telle que l'espace de Hilbert (réel) $\mathcal{H} = L^2(E, \mathcal{B}, m)$ soit séparable. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ une forme coercive sur $\mathcal{H}$. Alors l'espace $\mathcal{V}$ muni du produit scalaire $\tilde{\mathcal{A}}_1(u, v) := 1/2(\mathcal{A}(u, v) + \mathcal{A}(v, u)) + (u, v)_{\mathcal{H}}$ est aussi un espace de Hilbert réel et séparable. Nous identifions $\mathcal{H}$ à son dual. Alors $\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'$ densément et continûment.

Soit Λ un opérateur linéaire de domaine $D(\Lambda, \mathcal{V}') \subset \mathcal{V}'$ satisfaisant aux conditions suivantes:

D1 (i) $(\Lambda, D(\Lambda, \mathcal{V}'))$ est le générateur d'un semigroupe $(U_t)_{t \geq 0}$ fortement continu d'opérateurs bornés sur $\mathcal{V}'$.

(ii) On peut restreindre $(U_t)_{t \geq 0}$ à un semigroupe fortement continu de contractions sur $\mathcal{H}$ et à un semigroupe fortement continu d'opérateurs bornés sur $\mathcal{V}$.

Nous désignons par $(\Lambda, D(\Lambda, \mathcal{V}))$ le générateur du semigroupe sur $\mathcal{V}$. L'opérateur dual $(\hat{\Lambda}, D(\hat{\Lambda}, \mathcal{V}'))$ de $(\Lambda, D(\Lambda, \mathcal{V}))$ satisfait aussi aux conditions D1.

Désignons respectivement par $\mathcal{F}$ et $\hat{\mathcal{F}}$ les espaces de Hilbert $D(\Lambda, \mathcal{V}') \cap \mathcal{V}$ muni de la norme $\| u \|_{\mathcal{F}}^2 := \| u \|_{\mathcal{V}}^2 + \| \Lambda u \|_{\mathcal{V}'}^2$ et $D(\hat{\Lambda}, \mathcal{V}') \cap \mathcal{V}$ muni de la norme $\| u \|_{\hat{\mathcal{F}}}^2 := \| u \|_{\mathcal{V}}^2 + \| \hat{\Lambda} u \|_{\mathcal{V}'}^2$ (où $\| \cdot \|_{\mathcal{V}}$ et $\| \cdot \|_{\mathcal{V}'}$ sont les normes dans $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$).

Soit $\mathcal{E}$ la forme

$$\mathcal{E}(u, v) := \begin{cases} \mathcal{A}(u, v) - \langle \Lambda u, v \rangle, & u \in \mathcal{F}, v \in \mathcal{V} \\ \mathcal{A}(u, v) - \left\langle \hat{\Lambda} v, u \right\rangle, & u \in \mathcal{V}, v \in \hat{\mathcal{F}}, \end{cases}$$

et soit $\mathcal{E}_\alpha(u, v) := \mathcal{E}(u, v) + \alpha(u, v)_{\mathcal{H}}$ pour $\alpha > 0$.

Pour $\alpha > 0$ il existe des bijections linéaires et continues $W_\alpha : \mathcal{V}' \to \mathcal{F}$ et $\hat{W}_\alpha : \mathcal{V}' \to \hat{\mathcal{F}}$, telles que $\mathcal{E}_\alpha(W_\alpha f, u) = \langle f, u \rangle = \mathcal{E}_\alpha(u, \hat{W}_\alpha f)$, $\forall f \in \mathcal{V}', u \in \mathcal{V}$ (cf. [2], p. 248, théorème 1.1). Les restrictions $(G_\alpha)_{\alpha > 0}$ et $(\hat{G}_\alpha)_{\alpha > 0}$ de $(W_\alpha)_{\alpha > 0}$ et $(\hat{W}_\alpha)_{\alpha > 0}$ à $\mathcal{H}$ sont des résolvantes fortement continues de contractions sur $\mathcal{H}$. On a $\lim_{\alpha \to \infty} \alpha G_\alpha f = f$ et $\lim_{\alpha \to \infty} \alpha \hat{G}_\alpha f = f$ aussi bien dans $\mathcal{V}$ pour $f \in \mathcal{V}$ que dans $\mathcal{F}$ (ou $\hat{\mathcal{F}}$) pour $f \in \mathcal{F}$ (ou $\hat{\mathcal{F}}$).