Asynchrone Iterationsverfahren
zur
Lösung linearer Gleichungssysteme
auf
massiv parallelen Multiprozessorrechnern

Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Mathematik
der Universität Bielefeld

vorgelegt von
Klaus Jürgens

im Juni 1994

Einleitung

Iterative Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme sind ein wichtiges Werkzeug bei der numerischen Behandlung partieller Differentialgleichungen. Die einfachste, nichttriviale Aufgabe aus diesem Bereich ist das sogenannte "Modellproblem", das in die Klasse der elliptischen Randwertprobleme gehört.
Gesucht ist die Lösung der Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y) \text{ für } (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) &= \varphi(x,y) \text{ für } (x,y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

auf dem Gebiet $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Zu gegebener Funktion $f(x,y)$ und gegebenen Randwerten $\varphi(x,y)$ soll die Funktion $u(x,y)$ auf dem Inneren von Ω berechnet werden. Δ bezeichnet in der obigen Gleichung den Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Überzieht man das Gebiet Ω mit einem äquidistanten Gitter der Schrittweite $h = \frac{1}{N}$, so erhält man die diskrete Punktmenge

$$\Omega_h = \{(x,y) = (ih, jh) \quad | \quad 1 \le i,j \le N-1\}$$

als Teilmenge von Ω. Approximiert man die Poisson-Gleichung durch Differenzenquotienten, so ist die Diskretisierung der Differentialgleichung über dem Gitter Ω_h durch die Gleichungen

$$\frac{1}{h_2}(4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}) = f_{i,j}$$

für $1 \le i,j \le N-1$ gegeben. Hier wurden die Abkürzungen $u(ih,jh) = u_{i,j}$ bzw. $f(ih,jh) = f_{i,j}$ gewählt. Unter Berücksichtigung der Randwerte entsprechen die Diskretisierungen einem linearen Gleichungssystem $Au = f$ in $(N-1)^2$ Unbekannten $u_{i,j}$. Für eine lexikografische Anordnung der Unbekannten erhält die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems die Blockstruktur

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} T & -I_{N-1} & & & \\ -I_{N-1} & T & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & T & -I_{N-1} \\ & & & -I_{N-1} & T \end{bmatrix}$$