# Weak Sobolev spaces and Markov uniqueness of operators

Andreas Eberle

ABSTRACT. We introduce the notion of a generalized differential on an abstract measure space and construct corresponding strong and weak Sobolev spaces. We show that the validity of a "weak equals strong"–theorem, i. e. the coincidence of the weak and strong Sobolev space, implies Markov uniqueness for the diffusion operator corresponding to the generalized differential. Applications include a necessary and sufficient condition for Markov uniqueness for finite–dimensional, locally strictly elliptic diffusion operators, and an abstract condition for Markov uniqueness for Ornstein–Uhlenbeck operators on path spaces of compact Riemannian manifolds.

# Espaces de Sobolev faibles et unicité markovien d'opérateurs de diffusion

RÉSUMÉ. On introduit la notion d'une différentielle généralisée sur un espace mesuré abstrait, et on construit des espaces de Sobolev forts et faibles correspondants. On démontre que la validité d'un théorème "faible = fort", c'est à dire la coïncidence des espaces de Sobolev faible et fort, implique l'unicité markovien de l'opérateur de diffusion associé à la différentielle généralisée. Comme des applications, on obtient une condition nécessaire et suffisante pour l'unicité markovien d'opérateurs de diffusion localement strictement elliptiques en dimension finie, et une condition abstraite pour l'unicité markovien d'opérateur d'Ornstein–Uhlenbeck sur l'espace des chemins d'une variété riemannienne compacte.

VERSION FRANÇAISE ABRÉGÉE. — 1. On fixe un espace mesuré $\sigma$–fini $(E, \mathcal{B}, m)$, tel que $L^2(E;m)$ soit séparable, et une algèbre $\mathcal{A}$ de fonctions bornées de carré intégrable sur $E$, qui engendre $\mathcal{B}$ et qui est dense dans $L^2(E;m)$. Soient $H = (H_z)_{z\in E}$ un champ mesurable d'espaces hilbertiens réels, et $L^2(E,H;m)$ l'intégrale hilbertienne des $H_z$. Nous noterons $(\bullet,\bullet)_z$ le produit scalaire de $H_z$.

DÉFINITION. *Un opérateur linéaire* $d : \mathcal{A} \to L^2(E,H;m)$ *s'appelle* **différentielle généralisée par rapport à** $H = (H_z)_{z\in E}$ *si*

*(i)* $(df, df). \in L^2(E;m)$ *pour tout* $f \in \mathcal{A}$.

*(ii)* $d(f\cdot g) = f\cdot dg + g\cdot df$ *pour tous* $f, g \in \mathcal{A}$.

*(iii) L'espace vectoriel* $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ *engendré par* $\{f\, dg\,;\ f,g\in\mathcal{A}\}$ *est dense dans* $L^2(E,H;m)$.

*(iv) Pour tout* $g \in \mathcal{A}$, *il existe une fonction* $u \in L^2(E;m)$ *telle que*

$$\int (df, dg).\, dm \;=\; -\int f\, u\, dm \qquad \text{pour tout } f \in \mathcal{A}.$$

Si $d$ est une différentielle généralisée, alors $(d, \mathcal{A})$ est un opérateur fermable de $L^2(E;m)$ dans $L^2(E,H;m)$, $\mathcal{A}$ est contenu dans le domaine du **"laplacien généralisé"** $-d^*d$, et $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ est contenu dans le domaine de l'adjoint $d^*$. La restriction $(d^*, \mathcal{L}(\mathcal{A}))$ est un opérateur densement défini de $L^2(E,H;m)$ dans $L^2(E;m)$. Soient $(d, H_0^{1,2}(d))$ la fermeture de $(d, \mathcal{A})$, et $(\hat{d}, W^{1,2}(d))$ l'adjoint de $(d^*, \mathcal{L}(\mathcal{A}))$.

DÉFINITION. *Les espaces* $H_0^{1,2}(d)$ *et* $W^{1,2}(d)$ *sont appelés* **espace de Sobolev fort** *resp.* **faible** *par rapport à* $d$.

L'opérateur $(\hat{d}, W^{1,2}(d))$ prolongue $(d, H_0^{1,2}(d))$. Les espaces $H_0^{1,2}(d)$ et $W^{1,2}(d)$, munis du produit scalaire $(u,v)_{1,2,d} := \int (uv + (\hat{d}u, \hat{d}v).)\, dm$, sont des espaces hilbertiens.

2. Soit $L : \mathcal{A} \to L^2(E;m)$ un opérateur linéaire symétrique négatif sur $L^2(E;m)$, tel que $Lf \in L^1(E;m)$ et $\int Lf\, dm = 0$ pour tout $f \in \mathcal{A}$. Nous supposerons que $L$ possède **la propriété de diffusion**, c'est–à–dire le **carré du champ** $\Gamma(f,g) := (\, L(fg) - f\,Lg - g\,Lf\,)/2 \;\; (f,g \in \mathcal{A})$ est une dérivation de chacun de ses arguments. Alors on peut montrer qu' il existe un champ mesurable d'espaces hilbertiens $(H_z)_{z \in E}$ et une différentielle généralisée $d : \mathcal{A} \to L^2(E,H;m)$ tels que $Lf = -d^*df$ pour tout $f \in \mathcal{A}$. Bien qu'il y ait plusieurs telles différentielles généralisées, les espaces $H_0^{1,2}(d)$ et $W^{1,2}(d)$, et les produits scalaires $(\bullet, \bullet)_{1,2,d}$ sont toujours les mêmes, v. 2.1. On fixe une telle différentielle $d$.

Soit $(L^0, D(L^0))$ l'extension de Friedrichs de l'opérateur $(L, \mathcal{A})$. On peut déduire de la propriété de diffusion pour $L$ que le semi–groupe $(\exp(tL^0))_{t \geq 0}$ est **sous–markovien**, c.à.d. $0 \leq \exp(tL^0)u \leq 1$ pour tous $t \geq 0$ et $u \in L^2(E;m)$ tel que $0 \leq u \leq 1$.

THÉORÈME. *Soit* $(L, D(L))$ *une extension autoadjointe négative de* $(L, \mathcal{A})$, *qui est le générateur d'un semi–groupe sous–markovien, et soit* $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ *la forme bilinéaire fermée associée. Alors on a* $H_0^{1,2}(d) \subset D(\mathcal{E}) \subset W^{1,2}(d)$, $\mathcal{E}(u,u) = \int (du, du).\, dm$ *pour tout* $u \in H_0^{1,2}(d)$ , *et* $\mathcal{E}(u,u) \geq \int (\hat{d}u, \hat{d}u).\, dm$ *pour tout* $u \in D(\mathcal{E})$.

COROLLAIRE. *Si* $H_0^{1,2}(d) = W^{1,2}(d)$, *alors* $(L, \mathcal{A})$ *est* **Markov–unique**, *i.e.* $(L^0, D(L^0))$ *est la seule extension autoadjointe négative de* $(L, \mathcal{A})$ *qui est le générateur d'un semi–groupe sous–markovien.*

3. Nous considérons trois applications: a) Soient $E$ un ensemble ouvert dans $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{A} := C_0^\infty(E)$, $\varphi \in H^{1,2}_{loc}(E;dx)$ tel que $\varphi > 0$ p.p., $m := \varphi^2 dx$, et $a^{ij} \in H^{1,2}_{loc}(E;m) \cap L^\infty_{loc}(E;dx)$ $(1 \leq i,j \leq n)$ tels que $(a^{ij})_{i,j=1}^n$ soit symétrique et localement strictement elliptique (v. (3.1)). Si $H_z$ est le co–espace tangent $T_z^*E \cong \mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire $(a^{ij}(z))_{i,j}$, alors la différentielle ordinaire $d$ est une différentielle généralisée par rapport au champ mesurable $H = (H_z)_{z \in E}$. Le laplacien généralisé correspondant est donné par (3.2). On donne une description explicite de l'espace de Sobolev faible $W^{1,2}(d)$ et on montre que