Canonical Dirichlet operator and distorted Brownian motion on Poisson spaces

S. Albeverio Yu.G. Kondratiev M.Röckner

Abstract

We derive the precise relation of the *internal* differential geometry of Poisson spaces developed in [1] to the corresponding *external* geometry given by the associated Fock structure. In particular, we identify the (internal) Laplace-Beltrami operator $H^{\Gamma}_{\pi_\sigma}$ on Poisson space as the second quantization of the Laplacian on $\mathbb{R}^d$. Furthermore, the diffusion process generated by $H^{\Gamma}_{\pi_\sigma}$, which is a kind of distorted Brownian motion on the configuration space, is described explicitly. All this generalizes to the case where the underlying Euclidean space $\mathbb{R}^d$ is replaced by an (infinite-dimensional) manifold.

L'opérateur de Dirichlet canonique et le mouvement Brownien tordu sur les espaces de Poisson

Résumé — Une relation précise est établie entre la "géométrie différentielle intrinsèque" des espaces de Poisson développée dans la note précédante [1] et la "géométrie extérieure" associée à la structure de Fock correspondante. En particulier, l'opérateur de Laplace-Beltrami $H^{\Gamma}_{\pi_\sigma}$ (intrinsèque) sur l'espace de Poisson est identifié avec la deuxième quantisation du Laplacien sur $\mathbb{R}^d$. De plus, le processus de diffusion engendré par $H^{\Gamma}_{\pi_\sigma}$ est identifié. Tous les résultats ont une généralisation au cas où $\mathbb{R}^d$ est remplacé par une variété (de dimension finie ou infinie).

1 La structure de Fock des espaces de Poisson

Soit Γ l'ensemble de toutes les configurations localement finies dans $\mathbb{R}^d$. Γ est vu comme un sous-espace fermé de l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ des mesures de Radon sur $\mathbb{R}^d$ avec la topologie de la convergence vague. Soit $\sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ de la forme $d\sigma(x) = \rho(x)\,dm(x)$, m étant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $\rho = \phi^2$, $\phi \in H^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $\phi(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^d$. Soit π_σ la mesure de Poisson d'intensité σ sur Γ. Soit $\mathcal{F}C_b^\infty$ l'espace des fonctions cylindriques lisses et bornées. Nous considérons $L^2(\sigma)$ comme espace tangent à Γ dans un point $\gamma \in \Gamma$ et définissons le gradient de Fock ∇^F par

$$(\nabla^F f)(\gamma, x) = f(\gamma + \varepsilon_x) - f(\gamma), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ f \in \mathcal{F}C_b^\infty$$

comme élément de $L^2(\pi_\sigma) \otimes L^2(\sigma)$. La dérivée dans la direction φ est définie par

$$(\nabla^F_\varphi f)(\gamma) \equiv (\nabla^F f(\gamma, \cdot), \varphi(\cdot))_{L^2(\sigma)}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ (espace de Schwartz).

Il y a une correspondance unitaire entre $L^2(\pi_\sigma)$ et l'espace de Fock symétrique Exp $L^2(\sigma)$ donnée par $f(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{\pi_\sigma}(f^{(n)};\gamma)$, $Q_n^{\pi_\sigma}(f^{(n)};\gamma)$ étant le n-ple intégrale stochastique de $f^{(n)}$ par rapport au processus de Poisson engendré par la mesure de Poisson π_σ, voir [10].

2 Deuxième quantisation, opérateur de Dirichlet canonique et mouvement Brownien tordu

Théorème: Soit A un opérateur positif autoadjoint dans $L^2(\sigma)$ et soit D un domaine d'essentielle auto-adjonction pour A. Alors l'image $H_{\pi_\sigma,A}$ de la deuxième quantisation de A dans l'espace $L^2(\pi_\sigma)$ est essentiellement autoadjointe et positive sur $\mathcal{F}C_b^\infty$ et la forme bilinéaire correspondante est

$$(H_{\pi_\sigma,A}f,g)_{L^2(\pi_\sigma)} = \int_\Gamma (\nabla^F f, A\nabla^F g)_{L^2(\sigma)}\, d\pi_\sigma \ .$$

Soit H_σ l'opérateur donné sur D par

$$(H_\sigma\ \varphi) = -\Delta\varphi(x) - < \nabla \log \rho(x), \nabla\varphi(x) > \ .$$

Si H_σ est essentiellement autoadjoint sur D, alors $H_{\pi_\sigma}^\Gamma = H_{\pi_\sigma,H_\sigma}$, où $H_{\pi_\sigma}^\Gamma$ est l'opérateur de Dirichlet correspondant à la forme de Dirichlet canonique $\mathcal{E}_{\pi_\sigma}^\Gamma$ sur l'espace de Poisson.

Nous associons à $H_{\pi_\sigma}^\Gamma$ un processus de Markov X ayant Γ comme espace des états ("mouvement brownien tordu " sur Γ). X est en fait le processus de diffusions associé (au sens de [8]) avec la forme de Dirichlet canonique $\mathcal{E}_{\pi_\sigma}^\Gamma$ sur l'espace de Poisson.

—————————

1 Fock structure of Poisson spaces

Let $\Gamma \equiv \Gamma_{\mathbb{R}^d}$ be the set of all locally finite configurations in $\mathbb{R}^d$:

$$\Gamma = \{\gamma \subset \mathbb{R}^d \mid |\gamma \cap K| < \infty \text{ for any compact } K \subset \mathbb{R}^d\}.$$

We will identify γ with the (integer-valued) measure $\sum_{x\in\gamma} \varepsilon_x$. Then for any $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ we have a functional $\Gamma \ni \gamma \mapsto < \varphi, \gamma > = \sum_{x\in\gamma} \varphi(x) \in \mathbb{R}$. The space Γ is endowed with the vague topology.

Let $d\sigma(x) := \rho(x)dm(x)$, where m is the Lebesgue measure on $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, and $\rho = \phi^2$ with $\phi \in H_{loc}^{1,2}(\mathbb{R}^d)$, $\phi > 0$. We recall that the Poisson measure π_σ (with intensity measure σ) on $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma))$ is defined via its Laplace transform by

$$\int_\Gamma e^{<\varphi,\gamma>} d\pi_\sigma(\gamma) = \exp[\int_{\mathbb{R}^d} (e^{\varphi(x)} - 1) d\sigma(x)],\ \varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)\ . \qquad (1.1)$$

In the following we will use a well-known isomorphism between the Poisson space $L^2(\pi_\sigma) := L^2(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), \pi_\sigma)$ and a Fock space in an essential way.