Differential geometry of Poisson spaces

S. Albeverio Yu.G. Kondratiev M.Röckner

Abstract

We identify the differential geometry of the Poisson measure over $\mathbb{R}^d$. We prove an integration by parts formula and determine explicitly the corresponding gradient, divergence, Dirichlet form, generalized Laplacian and heat semigroup. We also briefly describe immediate generalizations, for example to Poisson measures over (infinite dimensional) manifolds or other random fields (resp. Gibbs measures).

Géometrie différentielle des espaces de Poisson

Résumé — La géométrie différentielle associée à une mesure de Poisson sur $\mathbb{R}^d$ est décrite. Une formule d'intégration par parties est donnée, ainsi qu'une description des opérateurs gradient et divergence, la forme de Dirichlet, l'opérateur de Laplace généralisé et le semigroupe de la chaleur correspondants. Une brève discussion de généralisations au cas des mesures de Poisson des variétés infini-dimensionelles et à d'autres champs aléatoires (ou mesures de Gibbs) est donnée.

Version française abrégée —

1 Dérivées, intégration par partie

Soit Γ l'ensemble de toutes les configurations localement finies dans $\mathbb{R}^d$. Nous identifions $\gamma \in \Gamma$ avec la mesure $\sum_{x\in\gamma} \varepsilon_x$ et considérons Γ comme étant topologiquement un sous-ensemble fermé de l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ des mesures de Radon sur $\mathbb{R}^d$ avec la topologie de la convergence vague. Soit $\sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ de la forme $d\sigma(x) = \rho(x)dm(x)$ (m = mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$), $\rho > 0$ m-p.p., $\sqrt{\rho} \in H^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Soit π_σ la mesure de Poisson avec mesure d'intensité σ sur Γ. Une application $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ définit une transformation de Γ par $\gamma \mapsto \psi\ \gamma = \sum_{x\in\gamma} \varepsilon_{\psi x}$. Soit $\psi_{t,v}$ le groupe à un paramètre de difféomorphismes de $\mathbb{R}^d$ engendré par le champ de vecteurs $v \in C_0^1(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d)$. La dérivée directionelle $\nabla_v^\Gamma f$ de $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ le long de v est définie par $(\nabla_v^\Gamma f)(\gamma) \equiv \frac{d}{dt} f(\psi_{t,v} v)|_{t=0}$, par exemple pour les f dans l'ensemble dense $\mathcal{F}C_b^\infty$ de $L^2(\Gamma; \pi_\sigma)$ (fonctions cylindriques lisses).

Nous définissons la dérivée logarithmique $\beta_v^{\pi_\sigma}$ de π_σ le long de v par

$$\beta_v^{\pi_\sigma}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} [< \beta^\sigma(x), v(x) >_{\mathbb{R}^d} + \mathrm{div}(v(x))]\, d\gamma(x) ,$$

avec $\beta^\sigma \equiv \frac{\nabla\rho}{\rho}$ ($\beta^\sigma \equiv 0$ sur $\{\rho = 0\}$). On a alors (intégration par parties), sur $\mathcal{F}C_b^\infty$:

$$\nabla_v^{\Gamma^*} = \nabla_v^\Gamma - \beta_v^{\pi_\sigma} .$$

2 Le gradient et la forme de Dirichlet canonique

Nous définissons l'espace tangent $T_\gamma(\Gamma)$ au point $\gamma \in \Gamma$ comme l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d; \gamma)$. Le gradient intrinsèque ∇^Γ d'une fonction $f \in \mathcal{F}C_b^\infty$ est, par définition, tel que $(\nabla_v^\Gamma f)(\gamma) = \langle \nabla^\Gamma f(\gamma), v \rangle_{T_\gamma(\Gamma)}$ pour tous les $v \in C_0^1(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d)$.

Nous définissons par dualité div^Γ sur les champs de vecteurs. On a alors pour tout champ de vecteurs de la forme $V(\gamma, x) = g(\gamma)v(x)$, $g \in \mathcal{F}C_b^\infty$, $v \in C_0^1(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}^\Gamma V)(\gamma) &= < \nabla^\Gamma g(\gamma), v >_{T_\gamma(\Gamma)} \\ &\quad + < \mathrm{div} v, \gamma > g(\gamma) + < \beta^\sigma, v >_{T_\gamma(\Gamma)} \ g(\gamma) \ .\end{aligned}$$

La forme de Dirichlet engendrée par le gradient intrinsèque ∇^Γ est définie pour $f, g \in \mathcal{F}C_b^\infty$ par

$$\mathcal{E}_{\pi_\sigma}^\Gamma(f,g) := \int_\Gamma < \nabla^\Gamma f(\gamma), \nabla^\Gamma g(\gamma) >_{T_\gamma(\Gamma)} \ d\pi_\sigma(x) \ .$$

On montre que $\mathcal{E}_{\pi_\sigma}^\Gamma$ est fermable et sa fermeture est une forme de Dirichlet sur $L^2(\Gamma; \pi_\sigma)$. Le générateur correspondant $H_{\pi_\sigma}^\Gamma$ coïncide avec l'extension de Friedrichs de $\Delta^\Gamma f(\gamma) + < \mathrm{div}(\nabla^\Gamma f(\gamma, \cdot)), \gamma > + \langle < \beta^\sigma, \nabla^\Gamma f(\gamma) >_{\mathbb{R}^d}, \gamma \rangle$, Δ^Γ étant définie sur $\mathcal{F}C_b^\infty$ par $\mathrm{Tr}_{T_\sigma(\Gamma)\otimes T_\gamma(\Gamma)}(\nabla^\Gamma \nabla^\Gamma)$. T_t^Γ, le semigroupe de la chaleur correspondant, peut être calculé sur un ensemble dense comme suit:

$$T_t^\Gamma \exp[\langle \log(1+\varphi), \gamma \rangle] = \exp[< \log(1 + e^{-tH_\sigma}\varphi, \gamma >] \ ,$$

pour π_σ-p.t. $\gamma \in \Gamma$, H_σ étant l'extension de Friedrichs de la restriction de $(-\Delta - \langle \beta^\sigma, \nabla \rangle)$ à $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

L'enveloppe linéaire des fonctions $\exp\langle \ \langle \log(1+\varphi), \cdot \rangle$, $\varphi \in H_0^{1,2}(\mathbb{R}^d; \sigma)$, $\varphi > -1$, est un domaine d' autoadjonction essentielle pour $H_{\pi_\sigma}^\sigma$.

Nous avons donc trouvé un analogue naturel pour l'espace de Poisson des objects géometriques du calcul de Malliavin. Deux applications de ces idées en analyse stochastique, et en théorie des champs, sont en préparation.

———————————

1 Derivatives and integration by parts

Let $\Gamma \equiv \Gamma_{\mathbb{R}^d}$ be the set of all locally finite configurations in $\mathbb{R}^d$:

$$\Gamma := \{\gamma \subset \mathbb{R}^d \mid |\gamma \cap K| < \infty \ \text{ for any compact } K \subset \mathbb{R}^d\}.$$

We will indentify γ with the (positive integer-valued) measure $\sum_{x\in\gamma} \varepsilon_x$. Then for any $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ we have a functional $\Gamma \ni \gamma \mapsto < \varphi, \gamma > = \sum_{x\in\gamma} \varphi(x) \in \mathbb{R}$. The space Γ is endowed with the vague topology.

Let $d\sigma(x) := \rho(x)dm(x)$, where m is Lebesgue measure on $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, and $\rho > 0$ m-a.e. such that $\rho^{\frac{1}{2}} \in H_{loc}^{1,2}(\mathbb{R}^d)$. We recall that the Poisson measure π_σ (with intensity measure σ) on $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma))$ is defined via its Laplace transform by

$$\int_\Gamma e^{<\varphi,\gamma>} d\pi_\sigma(\gamma) = \exp[\int_{\mathbb{R}^d} (e^{\varphi(x)} - 1) d\sigma(x)], \ \varphi \in C_0(\mathbb{R}^d) \ . \tag{1.1}$$