Uniqueness of Gibbs states on loop lattices

S. Albeverio Yu.G. Kondratiev M. Röckner

T.V. Tsikalenko

Abstract — We prove uniqueness of Gibbs states for certain quantum lattice systems with unbounded spins, based on Dobrushin's fundamental uniqueness criterion. The necessary estimates for the Vasershtein distance between one-point conditional distributions, with boundary conditions differing only at one site, are obtained from the Log-Sobolev inequality which holds on the infinite dimensional single spin (= loop) spaces. Detailed proofs are contained in [2] resp. [3]. The latter deals with the more general case of nonharmonic pair potentials with possibly infinite radius of interaction.

Unicité des états de Gibbs sur des réseaux de lacets

Résumé — Une preuve de l'unicité des états de Gibbs pour certains réseaux quantiques de spins non bornés est donnée. La preuve utilise le critère fondamental de Dobrushin, les estimations nécessaires de la distance de Vasershtein des distributions conditionées à un point, avec des conditions aux bords qui diffèrent en un seul point, étant obtenues en utilisant l'inégalité de Sobolev logarithmique dans l'espaces des lacets. Les preuves détaillées sont contenues dans [2] et [3] (le cas plus général de potentiels à deux corps non harmoniques avec portée infinie est aussi étudié).

Version française abrégée —

1 Représentation des états de Gibbs quantiques

On considére un système d'oscillateurs anharmoniques quantiques avec Hamiltonien heuristique donné par

$$H := -\frac{1}{2m}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\Delta_k + \frac{a^2}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}x_k^2 + \sum_{\{k,j\}\subset\mathbb{Z}^d}J(k-j)U(x_k-x_j) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}V(x_k).$$

$m > 0$ est la masse, $U \in C^2(\mathbb{R}^1)$ l'interaction à deux corps convexe, satisfaisant à (1.3), J une fonction d'intensité, positive, nulle en zéro. De plus, $a^2 > 0$ et $V = V_0 + W$, où $V_0 \in C^2(\mathbb{R}^1)$ satisfait à (1.4) et $W \in C_b(\mathbb{R}^1)$, avec $\delta(W) := \sup_{\mathbb{R}^1} W - \inf_{\mathbb{R}^1} W$.

Nous étudions les états de Gibbs quantiques (à température $1/\beta$, $\beta > 0$) au moyen de la mesure euclidienne de Gibbs ν_β sur un réseau de lacets Ω_β ν_β est définie comme mesure de probabilité sur Ω_β satisfaisant aux équations DLR formulées au moyen de la spécification locale $\pi_{\beta,\Lambda}$, $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$, associée à l'Hamiltonien H et décrite par (1.5)–(1.7). On appelle ν_β tempérée si $(\int \|\omega_k\|_\beta d\nu_\beta(\omega))_{k\in\mathbb{Z}^d} \in S'(\mathbb{Z}^d)$, $\omega = (\omega_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} \in \Omega_\beta$.

2 Unicité des états de Gibbs

Le résultat principal est le suivant:
Théorème 2.1 *Soit*

$$\frac{e^{\beta\delta(W)}b_+^2}{b_-^2 + \widetilde{J}^{-1}(a^2+b^2)} < 1,$$

$b_\pm$ resp. b étant les constantes apparaissant en (1.3) resp. (1.4) et où $\widetilde{J} := \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} J(k)$. Alors l'ensemble des mesures de Gibbs tempérées est constitué par un seul point.

La preuve est basée sur le critère de Dobrushin [5], [6] et une évaluation de la distance de Vasershtein des probabilités conditionnelles "en un point", données par (2.2), (2.3). Cette estimation à son tour est une conséquence de l'inégalité de Sobolev logarithmique démontrée en [2].

Le résultat d'unicité s'étend au cas d'interactions à deux corps sans invariance de translation et à des anharmonicités plus générales, la condition suffisante pour l'unicité étant alors (3.2).

———————

1 Temperature loop space representation for quantum Gibbs states

Let $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, be the integer lattice with the Euclidean distance $|k-j|$, $k, j \in \mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$. By $S(\mathbb{Z}^d)$ and $S'(\mathbb{Z}^d)$ we denote the mutually dual spaces of fastly decreasing resp. slowly increasing sequences over $\mathbb{Z}^d$.

We consider a translation invariant system of interacting quantum anharmonic oscillators with the heuristic Hamiltonian

$$H := -\frac{1}{2m}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\Delta_k + \frac{a^2}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} x_k^2 + \sum_{\{k,j\}\subset\mathbb{Z}^d} J(k-j)U(x_k-x_j) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} V(x_k), \tag{1.1}$$

where $m > 0$ (= physical mass). The two-particle interactions $U(x_k - x_j)$ have intensities

$$J(k-j) = J(|k-j|) \geq 0,\ J(0) = 0,\ (J(k))_{k\in\mathbb{Z}^d} \in S(\mathbb{Z}^d),\ \widetilde{J} := \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} J(k), \tag{1.2}$$

and $U \in C^2(\mathbb{R}^1)$ is a convex function such that $\exists b_-, b_+ > 0$: $\forall q \in \mathbb{R}^1$

$$b_-^2 \leq U''(q) \leq b_+^2,\ 0 = U(0) \leq U(q) = U(-q) \leq b_+^2 q^2/2\ . \tag{1.3}$$

The harmonic self-interaction is defined by $a^2 x_k^2/2$ with a constant $a^2 > 0$. The anharmonic self-interaction potential has the form $V(q) = V_0(q) + W(q)$. Here $V_0 \in C^2(\mathbb{R}^1)$ is such that $\exists b, C > 0$, $M \in \mathbb{N}$: $\forall q \in \mathbb{R}^1$

$$V_0''(q) \geq b^2\ ,\ |V_0^{(l)}(q)| \leq C(1+|q|)^M,\ l = 0, 1, 2, \tag{1.4}$$

and $W \in C_b(\mathbb{R}^1)$. Set $\delta(W) := \sup_{\mathbb{R}^1} W - \inf_{\mathbb{R}^1} W$.