PROPERLY DISCONTINUOUS GROUPS OF AFFINE TRANSFORMATIONS WITH ORTHOGONAL LINEAR PART

GROUPES PROPREMENT DISCONTINUS DE TRANSFORMATIONS AFFINES AVEC PARTIES LINÉAIRES ORTHOGONALES

H. Abels, G.A. Margulis* and G.A. Soifer

Abstract. Let Γ be a subgroup of the group of all affine transformations of a real affine space A of finite dimension. Suppose Γ acts properly discontinuously on A. We determine which orthogonal groups can occur as Zariski closures of the linear part of Γ. As an application of the methods we shall prove Auslander's conjecture for affine spaces of dimension at most 6.

Résumé Soit Γ un sous-groupe du groupe de toutes les transformations affines d'un espace réel affine A de dimension finie. Supposons que l'opération de Γ sur A soit proprement discontinue. Alors nous déterminons quels sont les groupes orthogonaux qui peuvent s'obtenir comme clôture de Zariski de la partie linéaire de Γ. Les méthodes utilisées nous permettent de démontrer la conjecture d'Auslander pour les espaces affines de dimension ≤ 6.

Version française abrégée

Soit A un espace affine réel de dimension finie et soit $\mathrm{Aff}A$ le groupe de toutes les transformations affines de A. Un sous–groupe Γ de $\mathrm{Aff}A$ est appelé *proprement discontinu* si pour chaque compact K dans A l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$ est fini. Le groupe Γ est appelé *crystallographique* si de plus l'espace $\Gamma\backslash A$ des orbites est compact. La conjecture suivante est due à L. Auslander.

$(*)$ *Tout groupe crystallographique est virtuellement résoluble.*

Ici nous utilisons la terminologie suivante: Un groupe est dit d'avoir une propriété *virtuellement* s'il y a un sous–groupe d'indice fini qui possède la propriété correspondante.

*partially supported by NSF grant DMS-9424613

Dans le cas où Γ est un groupe de transformations euclidiennes, ce qui veut dire que Γ préserve une metrique qui est invariante par translations et qui est induite par une forme quadratique positive définie, alors la conjecture est vraie d'après un théorème de Bieberbach [4]. En fait, Bieberbach a démontré que chaque groupe de transformations euclidiennes qui est proprement discontinu est virtuellement abélien [3]. J. Milnor [12] a posé la question suivante.

$(**)$ *Est–ce qu'il est vrai que chaque sous–groupe proprement discontinu de* $\mathrm{Aff}A$ *est virtuellement résoluble.*

Voici des versions équivalentes de ces questions en géométrie différentielle. Est–il vrai que chaque variété affinément plate complète M a un groupe fondamental qui est virtuellement résoluble (Milnor) Est–il vrai si de plus M est compacte (Auslander)

G.A. Margulis [10], [11] a donné une réponse négative à la question de Milnor en construisant un sous–groupe libre Γ de $\mathrm{Aff}A$ où $\dim A = 3$ et Γ préserve une forme quadratique de signature (2,1). La conjecture d'Auslander a été démontrée dans un nombre de cas, voir [7], [8], [9], [6], [5], [13], [14] et a été démontrée en général seulement pour les espaces affines de dimension ≤ 3 .

Cette note continue les recherches commencées dans [2]. Pour énoncer les résultats principaux il nous faut les notations suivantes. Le groupe $\mathrm{Aff}A$ est le produit semi–direct de l'espace vectoriel V des translations de A et du groupe linéaire $GL(V)$. On a alors un homomorphisme canonique $\ell : \mathrm{Aff}A \to GL(V)$. Disons que $g \in \mathrm{Aff}A$ préserve une forme quadratique B sur V si $\ell(g)$ est dans le groupe orthogonal $O(B)$.

Théorème A *Soit* $\dim A = 2n + 1$ *et soit* Γ *un sous–groupe proprement discontinu de* $\mathrm{Aff}A$ *préservant une forme quadratique* B *de signature* $(n+1, n)$ *. Alors* $\ell(\Gamma)$ *n'est pas Zariski dense dans* $O(B)$ *si* n *est pair.*

En contraste avec ce résultat, nous avons le résultat suivant pour n impair.

Théorème B *Soit* $\dim A = 2n + 1$ *,* n *impair, et soit* $(n + 1, n)$ *la signature de la forme quadratique* B *. Alors il existe un sous–groupe* Γ *de* $\mathrm{Aff}A$ *qui est libre et proprement discontinu et tel que* $\ell(\Gamma)$ *est Zariski dense dans* $O(B)$ *.*

Pour les autres signatures cette dichotomie disparaît.

Théorème C *Soit* $\dim A = p + q$ *et soit* Γ *un sous–groupe proprement discontinu de* $\mathrm{Aff}A$ *qui préserve une forme quadratique* B *ayant la signature* (p, q) *où* $|p - q| \neq 1$ *. Alors* $\ell(\Gamma)$ *n'est pas Zariski dense dans* $O(B)$ *.*