A support property for infinite dimensional interacting diffusion processes.

Une propriété de support pour des processus de diffusion en dimension infinie avec interaction.

Probabilités / Probability Theory

Michael Röckner
Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, Postfach 10 01 31, D-33501 Bielefeld, Germany

Byron Schmuland
Department of Mathematical Sciences, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2G1

AMS (1991) subject classification: 60H07, 31C25, 60G57, 60G60

Abstract. The Dirichlet form associated with the intrinsic gradient on Poisson space is known to be quasi-regular on the complete metric space $\ddot{\Gamma} = \{Z_+$-valued Radon measures on $\mathbb{R}^d\}$. We show that under mild conditions, the set $\ddot{\Gamma} \setminus \Gamma$ is $\mathcal{E}$-exceptional, where Γ is the space of locally finite configurations in $\mathbb{R}^d$, that is, measures $\gamma \in \ddot{\Gamma}$ satisfying $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \gamma(\{x\}) \leq 1$. Thus, the associated diffusion lives on the smaller space Γ. This result also holds for Gibbs measures with superstable interactions.

Résumé. Il est connu que la forme de Dirichlet associée au gradient intrinsèque sur l'espace de Poisson est quasi-régulière sur l'espace métrique complet $\ddot{\Gamma} = \{$ mesures de Radon sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $Z_+\}$. Sous des conditions faibles, on montre que l'ensemble $\ddot{\Gamma} \setminus \Gamma$ est $\mathcal{E}$-exceptionnel, où Γ désigne l'ensemble de toutes les configurations localement finies dans $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire, les mesures $\gamma \in \ddot{\Gamma}$ qui verifient $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \gamma(\{x\}) \leq 1$. La diffusion associée prend donc ses valeurs dans l'espace des phases Γ. Ce résultat est valable meme si μ est une mesure de Gibbs associée à un potentiel superstable.

Version française abrégéé

Soit Γ l'ensemble de toutes les configurations localement finies dans $\mathbb{R}^d$. Γ est vu comme un sous-ensemble de l'espace des mesures de Radon sur $\mathbb{R}^d$ muni de la topologie vague. Soit $\sigma(dx) = \rho(x)m(dx)$, m étant la mesure de Lebegue sur $\mathbb{R}^d$ et $\rho^{1/2} \in H^{1,2}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $\rho(x) > 0$ m-presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. Soit π_σ la mesure de Poisson d'intensité σ sur Γ. On appellera mesure de Poisson mixte toute mesure μ de la forme $\mu := \int_{\mathbb{R}_+} \pi_{z\sigma}\, \lambda(dz)$.

Définissons l'espace des fonctions cylindriques lisses et bornées

$$\mathcal{F}C_b^\infty := \{u \mid u(\gamma) = g(\langle f_1, \gamma\rangle, \langle f_2, \gamma\rangle, \ldots, \langle f_n, \gamma\rangle)\},$$

où $f_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, et $\langle f, \gamma\rangle = \sum_{x\in\gamma} f(x)$. D'après Albeverio, Kondratiev, et Röckner [1] nous définissons le gradient intrinsèque d'une fonction $u \in \mathcal{F}C_b^\infty$ par

$$\left(\nabla^\Gamma u\right)(\gamma; x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}\left(\langle f_1, \gamma\rangle, \langle f_2, \gamma\rangle, \ldots, \langle f_n, \gamma\rangle\right) \nabla f_i(x).$$

Donc on a l'opérateur carré du champ

$$\Gamma(u, v)(\gamma) := \int_{\mathbb{R}^d} \langle (\nabla^\Gamma u)(\gamma; x), (\nabla^\Gamma v)(\gamma; x)\rangle_{\mathbb{R}^d}\, \gamma(dx).$$

La forme de Dirichlet engrendreé par cet opérateur carré du champ est la fermeture $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ de la forme $(\mathcal{E}, \mathcal{F}C_b^\infty)$ définie pour $u, v \in \mathcal{F}C_b^\infty$ par

$$\mathcal{E}(u, v) := \int_\Gamma \Gamma(u, v)(\gamma)\, \mu(d\gamma).$$

On sait que cette forme est quasi-régulière sur l'espace des phases complet $\ddot{\Gamma}(\supset \Gamma)$. On va prouver ici que $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ est quasi-régulière sur Γ; pour cela il est suffisant de voir que l'ensemble $\ddot{\Gamma} \setminus \Gamma$ est $\mathcal{E}$-exceptionnel. On a le résultat suivant:

PROPOSITION 1. *Si $d \geq 2$, $\rho \in L^2_{\mathrm{loc}}(dx)$, et $\int_{\mathbb{R}_+} z^2\, \lambda(dz) < \infty$, l'ensemble $\ddot{\Gamma} \setminus \Gamma$ est $\mathcal{E}$-exceptionnel.*

Ce résultat est valable meme si μ est une mesure de Gibbs associé à un potentiel superstable au sens de Ruelle, puisque l'existence des points avec masse ≥ 2 est un événement local et une telle mesure de Gibbs est localement absolument continue par rapport à une mesure de Poisson.

Let Γ be the space of locally finite configurations in $\mathbb{R}^d$,

$$\Gamma := \{\gamma \subset \mathbb{R}^d : |\gamma \cap K| < \infty \text{ for every compact } K\}. \tag{1}$$

A configuration γ will be identified with the Radon measure $\sum_{x\in\gamma} \varepsilon_x$. The space Γ will be given the topology of vague convergence of measures, and measures on Γ are defined on the corresponding Borel sets. Define

$$\mathcal{F}C_b^\infty := \Big\{\, u \;\mid\; \gamma \mapsto u(\gamma) = g(\langle f_1, \gamma\rangle, \langle f_2, \gamma\rangle, \ldots, \langle f_n, \gamma\rangle) \\ \text{for some } f_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ and } g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)\Big\}, \tag{2}$$