Stochastic calculus of generalized Dirichlet forms

Probabilités/Probability Theory

Gerald Trutnau
Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, D–33501 Bielefeld, Germany

Abstract – We show Fukushima's decomposition of AF's in the frame work of quasi–regular generalized semi–Dirichlet forms considered in [8],[9]. The only condition assumed, is that the co-resolvent is sub–Markovian. No dual process is needed. The key-point for the proof of the decomposition is an integral representation theorem for coexcessive functions and a resulting description of $\mathcal{E}$–exceptional sets by an appropriate class of measures. We also derive an Itô-type formula for the transformation of the martingale part of the decomposition.

Calcul stochastique pour les formes de Dirichlet généralisées

Résumé – La décomposition de Fukushima est donnée dans le cadre des formes semi–Dirichlet géneralisées qui ont été considérées dans [8],[9]. Nous supposons seulement la co–résolvente sous–Markovienne, mais non l'éxistence d'un processus en dualité. Le point décisif est un théorème de représentation intégrale pour les fonctions co–excessives et, par conséquent, une description des boréliens $\mathcal{E}$–exceptionels au moyen d'une classe de mesures appropriée. Nous décrivons aussi une formule de type Itô pour la transformation de la partie martingale de la décomposition.

Version française abrégée – Les notations utilisées ici seront celles de [8],[9]. Soit alors $\mathcal{E}$ une forme semi–Dirichlet généralisée quasi–régulière, mais on ne supposera pas la condition D3 de [8],[9]. La quasi–régularité de $\mathcal{E}$ implique que tout élément de $\mathcal{F}$ admet un représentant $\mathcal{E}$–quasi–continu ($\mathcal{E}$–q.c.). On notera $\mathcal{P}$ (resp. $\hat{\mathcal{P}}$) l'ensemble des fonctions 1–excessives (resp. 1–coexcessives) dans $\mathcal{V}$. Pour un ensemble $\mathcal{C}$ de fonctions de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ on définit $\mathcal{P}_{\mathcal{C}} := \{u \in \mathcal{P} \mid \exists f \in \mathcal{C},\ u \leq f\}$, ainsi que $\hat{\mathcal{P}}_{\mathcal{C}} := \{\hat{u} \in \hat{\mathcal{P}} \mid \exists \hat{f} \in \mathcal{C},\ \hat{u} \leq \hat{f}\}$. Pour un sous–ensemble $\mathcal{G}$ de $\mathcal{V}$ on

pose $\widetilde{\mathcal{G}}$ pour l'ensemble des représentants $\mathcal{E}$–q.c. d'éléments de $\mathcal{G}$. Alors $\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{F}} - \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{F}}$ est un e.v. non vide (puisque $\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{F}} \supset \widetilde{\mathcal{F} \cap \mathcal{P}}$) et stable par troncation avec tout $\alpha \geq 0$, autrement dit $\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{F}} - \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{F}}$ est un treillis de Stone. Toutefois $\widetilde{f}$ désignera un représentant $\mathcal{E}$–q.c. de f et inversement f sera la m–classe représentée par $\widetilde{f}$.
Théorème 1 Soit $\hat{u} \in \hat{\mathcal{P}}_{\hat{\mathcal{F}}}$. Il existe alors une unique mesure $\mu_{\hat{u}}$ σ–finie et positive sur $(E, B(E))$, ne chargeant pas les ensembles $\mathcal{E}$–exceptionels, tel que

$$\int \widetilde{f}\, d\mu_{\hat{u}} = \lim_{\alpha\to\infty} \mathcal{E}_1(f, \alpha \hat{G}_{\alpha+1}\hat{u}) \quad \forall \widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{F}} - \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{F}} \; .$$

Fixons maintenant un processus standard spécial et m–tendu $\mathbb{M} = (\Omega, \mathcal{M}, (\mathcal{M}_t)_{t\geq 0}, (Y_t)_{t\geq 0}, (P_z)_{z\in E_\Delta})$ dont la résolvente $R_\alpha f$ est un représentant $\mathcal{E}$–q.c. de $G_\alpha f$ pour tout $\alpha > 0$, $f \in \mathcal{H} \cap B_b(E)$. On trouvera dans [8],[9] des conditions nécessaires et suffisantes pour l'éxistence d'un tel processus. Posons

$$\hat{S}_{00} := \{\mu_{\hat{u}} \mid \; \hat{u} \in \hat{\mathcal{P}}_{\hat{G}_1 \mathcal{H}_b^+} \text{ et } \mu_{\hat{u}}(E) < \infty\}$$

où $\mathcal{H}_b^+$ désigne les éléments positifs et bornés de $\mathcal{H}$.

Théorème 2 Pour $B \in B(E)$ les propriétés suivantes sont equivalentes:
(i) B est $\mathcal{E}$–exceptionel
(ii) $\mu(B) = 0 \; \forall \mu \in \hat{S}_{00}$.

On définit les fonctionelles additives (abrégé FA), l'equivalence de FA et les espaces $\mathcal{M}$, $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$, $\mathcal{N}_c$ comme dans [1]. Pour $\widetilde{u} \in \widetilde{\mathcal{V}}$ on pose $A_t^{[u]} = \widetilde{u}(Y_t) - \widetilde{u}(Y_0)$. La FA $A_t^{[u]}$ est alors indépendente du choix de $\widetilde{u}$. Dorénavent nous allons supposer la co–résolvente sous–Markovienne.

En utilisant le Théorème 2 on démontre comme dans [1], p.182, p.203 le Lemme et le Théorème suivant.
Lemme 3 Soit $(\widetilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de représentants $\mathcal{E}$–q.c. d'élements de $\mathcal{F}$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite de Cauchy dans $\mathcal{F}$. Il existe alors une sous–suite $(\widetilde{u}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tel que pour $\mathcal{E}$–q.t. $z \in E$

$$P_z(\widetilde{u}_{n_k}(X_t) \text{ converge uniformement en } t \text{ sur tout compact de } [0,\infty)) = 1.$$

Théorème 4 Soit $(M^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overset{\circ}{\mathcal{M}}$ e–Cauchy. Il existe alors une sous–suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et un unique $M \in \overset{\circ}{\mathcal{M}}$, tel que $\lim_{n\to\infty} e(M^n - M) = 0$ et tel que pour $\mathcal{E}$–q.t. $z \in E$

$$P_z(\lim_{k\to\infty} M_t^{n_k} = M_t \text{ uniformement en } t \text{ sur tout compact de } [0,\infty)) = 1.$$

Nous allons maintenant énonçer notre résultat principal.