# Zweischritthomologie des Simplex und binäre Spinoren

Thomas Bier

3. Februar 1994

**Zusammenfassung**

Die Zweischritthomologiegruppen des Simplex $\Delta(n)$ mit binären Koeffizienten sind in kanonischer Weise $F_2-$modulare $S_n-$Darstellungen. Zunächst führen wir die Berechnung der Zweischritthomologiegruppen des Simplex durch, und betrachten das System der Untersimplizes. Dann zeigen wir, daß die Darstellung isomorph ist zu derjenigen Darstellung, die man erhält, wenn man eine gewisse Untergruppe $S_n$ der symplektischen Gruppe einer nichtausgearteten Bilinearform über dem Körper mit zwei Elementen betrachtet. Über dem Körper mit zwei Elementen sind symplektische Gruppe und gewisse orthogonale Gruppen sowie Spingruppe und gewisse andere orthogonale Gruppen einander gleich. Falls zum Beispiel $S_n$ bereits in einer orthogonalen Gruppe einer quadratischen Form von hyperbolischem Typ enthalten ist, so ist die Spingruppe gleich der orthogonalen Gruppe, und die betrachtete Darstellung ist nichts anderes als die Einschränkung der Spinordarstellung von Cartan-Chevalley [4] auf die Gruppe $S_n$.
Weiterhin erhalten wir durch den Vergleich der beiden Strukturen eine Dimensionsformel für Fixpunktmengen von Spiegelungen in der Spinordarstellung, und eine Additionsformel für gewisse Homologieklassen.

# 1 Die Zweischritthomologie des Simplex

## 1.1 Definition der Zweischritthomologie eines simplizialen Komplexes

Sei $K$ ein simplizialer Komplex. Wir bezeichnen mit $C_q(K)$ die gewöhnlichen $mod$ 2 Kettengruppen, also die Vektorräume über dem Körper $F_2$ mit zwei Elementen, deren Basis aus der Menge $K_q$ aller $q$-punktigen Simplizes aus $K$ besteht. Insbesondere setzen wir $C_0(K) = F_2$ mit einer Basis der leeren Menge $\emptyset$. Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß die übliche topologische Dimension von der hier gewählten Indizierung um eins verschieden ist.
Wir betrachten neben dem gewöhnlichen Einschrittrandoperator

$$\partial_q^1(\sigma) = \sum_{\theta \subset \sigma} \ (\theta \ : \ |\theta| = q-1)$$

auch $\partial_q^2$ als den Zweischrittoperator, der für $\sigma \in K_q$ durch

$$\partial_q^2(\sigma) = \sum_{\theta \subset \sigma} \ (\theta \ : \ |\theta| = q-2)$$

definiert ist. Offenbar sind $\partial_q^i$ für $i = 1, 2$ lineare Abbildungen

$$\partial_q^i \ : \ C_q(K) \longrightarrow C_{q-i}(K).$$

Die Operatoren $\partial_q^i$ erfüllen offenbar die Kongruenzen

$$\partial_q^i \circ \partial_{q+i}^i \equiv 0 \ \ mod\ 2$$

und entsprechend seien für $i = 2$ $\ ^2SH_q(-)$ die Homologiegruppen mit Koeffizienten modulo 2 bezüglich dieses Zweischrittrandoperators. Die Homomorphismen, die wegen der Relation

$$\partial_{q-2}^1 \circ \partial_q^2 \ = \ \partial_{q-1} \circ \partial_q^1$$

durch die Abbildungen des Einschrittoperators definiert werden, seien mit

$$\partial_{q*}^1 = \partial_{q*}^1(K) : \ ^2SH_q(K) \longrightarrow \ ^2SH_{q-1}(K)$$

bezeichnet.