Metrische Vektorräume und quadratische Formen

Der Isomorphiesatz von Witt-Lenz

Witts Beweis der Sätze von Artin-Springer und Knebusch

Ina Kersten

Abstract. Dies ist eine Seminarausarbeitung zweier kurzer bisher unveröffentlichter Manuskripte [11, 12], die im Nachlaß von Ernst Witt gefunden wurden. Das erste beinhaltet eine Verallgemeinerung der euklidischen Kongruenzsätze, und in dem zweiten werden die Sätze von Springer [9] und Knebusch [3] ganz kurz mit Hilfe ein und derselben Beweisidee gezeigt. In dieser Seminarausarbeitung werden außerdem Grundbegriffe aus der Theorie der quadratischen Formen bereitgestellt.

1991 Mathematics Subject Classification. 11E04, 11E39, 14L35.

Einleitung. Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, sind sie kongruent (lassen sich also durch eine Bewegung ineinander überführen). Dieser euklidische Kongruenzsatz wird durch den Satz von Witt [10] verallgemeinert: Ein Isomorphismus zweier Teilräume eines metrischen Vektorraumes läßt sich zu einem Automorphismus des ganzen Raumes fortsetzen. Vorausgesetzt ist hierbei, daß die Räume endlich dimensional und regulär sind und daß der zugrundegelegte Körper nicht die Charakteristik 2 hat. Im allgemeinen ist eine Fortsetzbarkeit nicht uneingeschränkt möglich. Da der Satz von Witt fundamental ist für die Theorie der quadratischen und hermiteschen Formen, sowie für das Studium der klassischen Gruppen, ist es wünschenswert, möglichst allgemein ein Kriterium für die Fortsetzbarkeit von Isometrien zu finden. In dem bisher unveröffentlichen, nur fünf Seiten langen Manuskript [11] wird ein solches Kriterium angegeben, vgl. Abschnitt 4 unten. Obwohl das Manuskript [11] aus dem Jahre 1957 stammt, ist dieses Kriterium bis heute noch nicht bekannt. Besonders interessant ist hierbei der Beweis und die Definition der Ableitung $\dot{\varphi}$ einer metrischen Abbildung φ, die zu einer originellen allgemeinen Beschreibung orthogonaler und unitärer Gruppen führt (vgl. 3.1 und 3.2 unten).

Der Satz von Springer [9] besagt, daß eine anisotrope quadratische Form anisotrop bleibt bei Grundkörpererweiterung ungeraden Grades. In [12] wird hierfür ein kurzer eleganter Beweis gegeben, dessen "additive Variante" einen Beweis von Knebusch's Normprinzip [3] ergibt.

Die Darstellung in [11] und [12] ist kurz, klar und ausgesprochen elegant. Ich habe daraus eine Textvorlage für ein Seminar gemacht, das ich im Sommer 1994 in Regensburg abgehalten habe und in dem ich kaum mehr als Lineare Algebra an Vorkenntnissen vorausgesetzt habe. Die hier vorliegende Fassung ist aus der Textvorlage und den gehaltenen Vorträgen entstanden, und ich möchte allen Teilnehmern und Teilnehmerinnen herzlich für ihre Mitarbeit danken, ganz besonders auch dem Assistenten Dr. G. Seibert.

Diese Ausarbeitung ist in die folgenden Abschnitte gegliedert.

Die Abschnitte 5 und 6 enthalten Ergebnisse aus Witts berühmter Arbeit [10] von 1937, die heutzutage als Standard in die Lehrbuchliteratur über quadratische Formen eingegangen sind, vgl. z. B. [4,5,7,8]. In den übrigen Abschnitten werden über den bekannten Stoff hinaus Definitionen und Resultate aus [11] und [12] vorgestellt.

1. Skalarprodukt und Orthogonalität

Ein *Schiefkörper* ist ein assoziativer Ring mit $1 \neq 0$, in dem jedes Element $\neq 0$ invertierbar ist. Es müssen also alle Körperaxiome erfüllt sein mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation, die nicht gefordert wird.

Beispiel für einen Schiefkörper (Hamilton 1843). Sei $\mathbb{H}$ die Menge der Matrizen

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar\beta \\ \beta & \bar\alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, wobei $\bar\alpha$ die zu α konjugiert komplexe Zahl bedeute. $\mathbb{H}$ ist bezüglich Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation ein Ring und –betrachtet als Vektorraum über $\mathbb{R}$– vier-dimensional mit Basis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{i} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{k} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ die Gleichung $\mathrm{i}^2 = -1$ erfüllt. $\mathbb{H}$ ist nicht kommutativ, denn es gilt $\mathfrak{i}\mathfrak{j} = -\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{j}\mathfrak{i} = \mathfrak{k}$. Ist $\lambda = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar\beta \\ \beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \neq 0$ in $\mathbb{H}$, so ist $\lambda^{-1} = \det(\lambda)^{-1} \begin{pmatrix} \bar\alpha & \bar\beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ in $\mathbb{H}$. Also ist $\mathbb{H}$ ein Schiefkörper, genannt *Quaternionenschiefkörper*.

Sei nun K ein beliebiger Schiefkörper. Auf der Additionsgruppe von K sei ein involutorischer Automorphismus $\alpha \mapsto \bar\alpha$ gegeben, der also die Bedingungen $\overline{\alpha+\beta} = \bar\alpha + \bar\beta$ und $\bar{\bar\alpha} = \alpha$ für alle α, $\beta \in K$ erfüllt. Bezüglich der Multiplikation fordern wir gemäß [11] die Regel

$$\overline{\alpha\beta\gamma} = \bar\gamma\bar\beta\bar\alpha. \tag{1}$$

Es folgt $\bar1\bar1\bar\alpha = \overline{\alpha 1 1} = \overline{1\alpha 1} = \bar1\bar\alpha\bar1$ und daraus $\bar1\bar\alpha = \bar\alpha\bar1$ für alle $\alpha \in K$, d.h. $\bar1$ ist im Zentrum von K. Weiter folgt $\bar1 = \overline{111} = \bar1^2\,\bar1$ und also $1 = \bar1^2$, d.h. $\bar1 = \pm1$. Definiert man $\alpha^* = \bar1\bar\alpha$, so erhält man einen involutorischen Antiautomorphismus $\alpha \mapsto \alpha^*$ von K, für den dann also gilt $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$. Wie in [11] setzen wir

$$\alpha + \bar\alpha = \text{ sp } \alpha, \quad \alpha - \bar\alpha = \delta\alpha$$