HALBEINFACHE WURZELELEMENTE IN CHEVALLEY-GRUPPEN

Andrei A. Semenov $^{\flat}$, Nikolai A. Vavilov $^{\sharp}$

$^{\flat,\sharp}$ Fakultät für Mathemathik und Mechanik
Staatliche Universität Sankt-Petersburg
Petrodvoretz, 198904, Rußland
und
$^{\flat}$ Institut für Mathematik II
Freie Universität Berlin
14195 Berlin, Deutschland
und
$^{\sharp}$ Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
33615 Bielefeld, Deutschland

Abstract. In this paper we study the Bruhat decomposition of semisimple long root elements in Chevalley groups. First we discuss some problems on the description of subgroups in Chevalley groups which motivate this study. We state explicit results about the Weyl factors in the Bruhat decomposition of long root tori. It turns out that these elements are not more complicated than in a Chevalley group of type D_4 (Satz 1). We explicitly list possibilities for the Weyl factor (Satz 2) and study interrelations between Weyl factors of the semisimple long root elements from the same one-dimensional torus. It turns out that all elements from a given

---

Key words and phrases. Chevalley-Gruppen, Bruhat-Zerlegung, halbeinfache Wurzelelemente, Wurzeltori.

Die Autoren sind *Freie Universität Berlin*, *Alexander von Humboldt-Stiftung* und *SFB 343 an der Universität Bielefeld* für die Unterstützung sehr dankbar.

Die Russische Fassung dieses Artikels ist in die "Russische Mathematische Doklady" eingereicht.

long root torus, except at most three of them lie in the same Bruhat cell (Satz 3), we can explicitly determine the possible degeneration (Satz 4). We give also some information concerning the Borel factors (Satz 5) and the generalization to all elements from a fundamental SL_2 corresponding to a long root (Satz 6).

Einführung

In diesem Artikel betrachten wir die halbeinfachen langen Wurzelelemente in Chevalley-Gruppen. Es sei Φ ein reduziertes irreduzibles Wurzelsystem und P ein Gitter zwischen dem Gewichtegitter $P(\Phi)$ und dem Wurzelgitter $Q(\Phi)$. Weiter sei K ein Körper. Diesen Daten entspricht eine Chevalley-Gruppe $G = G_P(\Phi, K)$, siehe [B], [C1], [Hu], [St]. Sei $T = T_P(\Phi, K)$ ein zerfallender maximaler Torus in G und $B = B_P(\Phi, K)$ eine Borel-Untergruppe, die T enthält. Im folgenden spielt P eigentlich keine Rolle und wird in den Bezeichnungen unterdrückt. Wir können alles auf den Fall von einfach zusammenhängenden $G = G_{\mathrm{sc}}$ (d.h. auf den Fall $P = P(\Phi)$) reduzieren. Mit $W = W(\Phi)$ bezeichnet man die Weyl-Gruppe von Φ. Dann gilt die Bruhat-Zerlegung $G = BWB$.

In dieser Arbeit formulieren wir Resultate über die Bruhat-Zerlegung von halbeinfachen Wurzelelementen $xh_\alpha(\varepsilon)x^{-1}$, wo $\alpha \in \Phi$ eine lange Wurzel ist (etwa die maximale Wurzel δ), $\varepsilon \in K^*$ ein invertierbares Element von K ist und $x \in G$ ist. Es gelingt uns, ganz konkret zu bestimmen, welche Bruhat-Zellen ein *langer Wurzeltorus*

$$Q_x = \left\{y(\epsilon) = xh_\delta(\epsilon)x^{-1},\ \epsilon \in K^*\right\}, \qquad x \in G,$$

schneidet. Erstens reduzieren wir das Problem auf den Fall D_4 der achtdimensionalen orthogonalen Gruppe (Satz 1). Alle weiteren Ergebnisse werden durch konkrete Rechnungen in dieser Gruppe bewiesen, gelten jedoch für alle Chevalley-Gruppen. In Satz 2 bestimmen wir alle möglichen Weyl-Faktoren in Bruhat-Zerlegungen von halbeinfachen langen Wurzelelementen. Satz 3 besagt, daß alle Elemente eines langen Wurzeltorus bis auf die Identität und höchstens zwei weitere Elemente zur selben Bruhat-Zelle gehören. Mit Hilfe von Satz 4 kann man diese Ausartungen ganz explizit beschreiben. Satz 5 enthält einige Informationen über die Borel-Faktoren in dieser Bruhat-Zerlegung. Satz 6 schließlich ist eine Verallgemeinerung von Satz 1 auf alle Elemente einer fundamentalen $(\mathrm{P})\,\mathrm{SL}(2, K)$, die einer langen Wurzel entspricht.

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung von [V5], [V7], [V8], [VS], [Se1]. Die Sätze 1, 3 und 5 waren schon in diesen Publikationen enthalten. Die Sätze 2, 4 und 6 dagegen werden hier erstmals veröffentlicht (siehe [Se2]). Der künftige Artikel [SV] soll die ausführlichen Beweisen dieser und verwandter Resultate darstellen.

Bezeichnungen

Sei wie oben $G = G(\Phi, K)$ eine Chevalley-Gruppe von Typ Φ über einem Körper K und $T = T(\Phi, K)$ ein zerfallender maximaler Torus. Jeder Wurzel $\alpha \in \Phi$ und jedem Körperelement $\xi \in K$ entspricht ein unipotentes Wurzelelement $x_\alpha(\xi) \in G$, das elementar bezüglich T ist. *Elementar* bedeutet hierbei, daß die entsprechenden einparametrischen Untergruppen

$$X_\alpha = \{x_\alpha(\xi),\ \xi \in K\}$$

(die sogenannten unipotenten Wurzelgruppen) von T normalisiert werden.

Jeder Wurzel $\alpha \in \Phi$ und jedem *invertierbaren* Körperelement $\varepsilon \in K^*$ entspricht ein halbeinfaches Wurzelelement

$$h_\alpha(\epsilon) = w_\alpha(\epsilon) w_\alpha(1)^{-1}, \qquad \text{wo} \qquad w_\alpha(\epsilon) = x_\alpha(\epsilon) x_\alpha(-\epsilon^{-1}) x_\alpha(\epsilon).$$

Als *halbeinfache Wurzelelemente* werden wir sämtliche Elemente in G bezeichnen, die zu einem $h_\alpha(\epsilon)$ konjugiert sind. Wenn α eine lange Wurzel ist, nennt man $h_\alpha(\epsilon)$ und seine Konjugierten auch halbeinfache *lange* Wurzelelemente.

Die Grundlage für das Rechnen in Chevalley-Gruppen sind die Relationen zwischen den Elementen h_α, x_α und w_α, die sogenannten Steinberg-Relationen. Die wichtigsten darunter sind die Additivität von x_α, die Multiplikativität von h_α und die Chevalley-Kommutatorformel

$$[x_\alpha(\xi), x_\beta(\eta)] = \prod x_{i\alpha+j\beta}(N_{\alpha\beta ij}\xi^i\eta^j),$$

wo $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ der Kommutator ist, und das Produkt über alle ganzen $i, j > 0$ genommen wird, für die $i\alpha + j\beta \in \Phi$ eine Wurzel ist. Hier sind $N_{\alpha\beta ij}$ gewisse von ξ und η unabhängige Konstanten, die nur die Werte $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ annehmen können.

Sei jetzt $N = N(\Phi, K)$ die Untergruppe von G, die von T und allen $w_\alpha(1)$, $\alpha \in \Phi$, erzeugt wird. Fast immer fällt N mit dem Normalisator von T zusammen (nur die Fälle $|K| = 2, 3$ sind Ausnahmen dafür). Die Faktorgruppe N/T ist kanonisch isomorph zur Weyl-Gruppe des Wurzelsystems Φ. Sei n_w ein Urbild von $w \in W$ in N bezüglich der kanonischen Projektion. Im folgenden werden wir statt n_w fast immer einfach w schreiben.

Sei $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ die Menge der einfachen Wurzeln in Φ bezüglich einer Ordnung von Φ, und seien Φ^+ und Φ^- die enstprechenden Mengen von positiven bzw. negativen Wurzeln. Definieren wir dann die folgenden Untergruppen von G:

$$U = U(\Phi, K) = \langle x_\alpha(\xi), \alpha \in \Phi^+, \xi \in K \rangle,$$

$$V = V(\Phi, K) = \langle x_\alpha(\xi), \alpha \in \Phi^-, \xi \in K \rangle.$$

Die Untergruppe $B = TU$ heißt (Standard-) Borel-Untergruppe (bezüglich der Ordnung). Unter der *Bruhat-Zerlegung* versteht man die folgende Zerlegung von G in die disjunkte Vereinigung der Borel-Doppelnebenklassen

$$G = \bigcup BwB, \qquad w \in W.$$

Hier steht $w \in W$ statt seines Urbildes $n_w \in N$. Jedes Element aus G können wir also in der Form $g = b_1 w b_2$ darstellen, wo der Weyl-Faktor $w \in W$ durch g eindeutig bestimmt ist (die Borel-Faktoren $b_1, b_2 \in B$ dagegen nicht). Die Zerlegung kann man zu einer eindeutigen Zerlegung verfeinern. Dafür definieren wir für jedes $w \in W$ die Untergruppe

$$U_w^- = U \cap w^{-1} V w \subseteq U.$$

Dann kann man jedes Element $g \in G$ eindeutig in der Form

$$g = uwvd, \qquad u \in U,\ w \in W,\ v \in U_w^-,\ d \in T.$$

darstellen. Das ist die sogenannte *(rechts-)reduzierte Bruhat-Zerlegung.*

Motivation

Die langen halbeinfachen Wurzelelemente sind besonders wichtig, weil sie den maximalen Torus T einer einfach zusammenhängenden Chevalley-Gruppe G erzeugen:

$$T_{\text{sc}} = \big\langle h_\alpha(\varepsilon),\ \alpha \in \Phi_{\text{lang}},\ \varepsilon \in K^* \big\rangle.$$

Im allgemeinen sind sie sogar die am wenigsten komplizierten halbeinfachen Elemente in G. Das kann man auch quantitativ formulieren [Z1]. Die langen Wurzelelemente sind nämlich im allgemeinen diejenigen halbeinfachen Elemente, die in den minimalen Darstellungen von G die wenigsten nichttrivialen Eigenwerte besitzen.

Das ist besonders für $\Phi = \mathrm{E}_8, \mathrm{F}_4$ und G_2 der Fall, weil es für diese Systeme keine Mikrogewichte gibt (siehe [Bu]). Deshalb treten für $\Phi = \mathrm{E}_8, \mathrm{F}_4$ und G_2 die langen Wurzelelemente notwendigerweise in allen T betreffenden Fragen auf. Für andere Wurzelsysteme kann der Torus T von sogenannten Mikrogewichtselementen erzeugt werden [V3], [V10], [V13], die manchmal weniger nichttriviale Eigenwerte als $h_\delta(\varepsilon)$ besitzen können. Trotzdem führen auch in diesen Fällen Betrachtungen von Wurzelelementen fast immer zu besseren Ergebnissen als die von Mikrogewichtselementen.

Das besondere Interesse an der Untersuchung von langen Wurzelelementen und langen Wurzeltori ist durch die folgenden Probleme motiviert.

1. Obergruppen eines zerfallenden maximalen Torus. Die Obergruppen von zerfallenden maximalen Tori wurden von mehreren Autoren betrachtet, siehe u.a. [S1], [S2], [Kn], [Z2], [V9], [V10], [HV], [V12] und Bibliographien in diesen Abhandlungen. Fast immer sind alle Untergruppen, die einen zerfallenden maximalen Torus enthalten, Standarduntergruppen.

Sei S eine abgeschlossene Menge von Wurzeln, das heißt, wenn $\alpha, \beta \in S$ und $\alpha + \beta \in \Phi$, dann ist $\alpha + \beta \in S$. Mit einer abgeschlossenen Menge sind einige Untergruppen von G verbunden, wie z.B.

$$E(S) = \big\langle x_\alpha(\xi),\ \alpha \in S,\ \xi \in K \big\rangle,$$

und $G(S) = T \cdot E(S)$. Sei weiter $W(S) = \{w \in W,\ wS = S\}$ der Normalisator von S in der Weyl-Gruppe. Die Untergruppe

$$N(S) = \big\langle G(S),\ n_w,\ w \in W(S) \big\rangle$$

ist fast immer gleich dem Normalisator von $G(S)$ in G (es gibt nur sehr wenige Ausnahmen: $|K| = 2, 3$ und sogar nicht für alle S). Eine Untergruppe F von G heißt eine *Standarduntergruppe*, wenn es eine abgeschlossene Menge von Wurzeln S gibt, für welche $G(S) \leqslant F \leqslant N(S)$ gilt.

Alle Standarduntergrupen enthalten den Torus T. Man sagt es gilt die *Standardbeschreibung* von Obergruppen von T, wenn umgekehrt alle Untergruppen, die T enthalten, Standarduntergruppen sind. Die Standardbeschreibung wurde für die endlichen Körpern K mit $|K| \geqslant 13$ und $\operatorname{char} K \neq 2$ und für unendliche Körper bewiesen (unter gewissen Eineschränkungen für die Charakteristik), siehe [S1], [S2], [Kn], [Z2], [V9], [V10], [HV], [V12].

Es gibt eine Vermutung, daß für alle *nichtsymplektischen* Gruppen diese Standardbeschreibung für alle Körper K, $|K| \geqslant 7$, gilt [V10]. In [V10], [V11] wurde eine Methode vorgeschlagen, die genaue Kenntnisse über die Bruhat-Zerlegung von langen Wurzeltori erforderte. Für unendliche Körper reichen gewisse qualitative Kenntnisse aus, wenn es jedoch um jedes einzelne zusätzliche Element geht, muß man auch ganz konkrete quantitative Resultate besitzen.

2. Sätze über Konjugation. Hier zeigen wir eine der möglichen Anwendungen von Resultaten über die Bruhat-Zerlegung von langen Wurzelelementen auf. Es geht um den Konjugationssatz von J.Tits, der in unserem Kontext folgendenmaßen lautet. Sei $|K| \geqslant 4$, S eine abgeschlossene Menge von Wurzeln, $x \in G$ und $xTx^{-1} \leqslant G(S)$. Dann gilt $x = yn_w$, wobei $y \in G(S)$ und $wS = S$ (siehe [T]). Es gibt eine Verschärfung dieses Satzes, bei der man nur $xTx^{-1} \leqslant N(S)$ fordert. Das ist in [V4] unter der Voraussetzung $|K| \geqslant 13$ bewiesen. Die in dieser Arbeit erwähnten Resultate erlauben es, die Grenze bis auf $|K| \geqslant 7$ herunterzudrücken.

3. Erzeugung von langen Wurzelelementen. Das allgemeine Problem, alle von halbeinfachen langen Wurzelelementen erzeugten irreduziblen Untergruppen von Chevalley-Gruppen zu beschreiben, scheint zu weitgefaßt zu sein. Man könnte aber das Problem einschränken, z.B. alle *endlichen* irreduzibilen von halbeinfachen langen Wurzelelementen erzeugten Untergruppen von Chevalley-Gruppen zu klassifizieren oder die von langen *Wurzeleltori* erzeugten Untergruppen.

Auch in dieser Form ist das Problem nicht gelöst, es gibt nur Teilergebnisse für den Fall von speziellen linearen und symplektischen Gruppen [H], [HW1] – [HW3], [W], [K1], [K2]. In [Z1] wurde der allgemeinen Fall erstmals behandelt. Mit unseren Ergebnissen kann man wenigstens die Bahnen der Wirkung einer Chevalley-Gruppe auf Paaren und Tripeln von langen Wurzeltori durch simultane Konjugation beschreiben, also einen wichtigen Schritt in diese Richtung machen.

Man kann weitere Informationen über die Bruhat-Zerlegung von halbeinfachen Elementen in [V1], [V3], [V5], [V7], [V8], [Se1], [Se2], [V10] und insbesondere in

[V13] finden. In [V4], [V10] – [V12] ist an einigen Beispielen illustriert worden, wie man solche Informationen anwenden kann. Für die Bruhat-Zerlegung von unipotenten Elementen und ihre Anwendungen in der Geometrie von Wurzelgruppen siehe [V2], [V6], [N].

Ergebnisse

Kehren wir zur Bruhat-Zerlegung von langen Wurzeltori zurück. Es wurde bewiesen, daß die Bruhat-Zerlegung von langen Wurzeltori in beliebigen Chevalley-Gruppen nicht komplizierter ist als die in Chevalley-Gruppe von Typ D_4. Genau gesagt gilt folgender

Satz 1. *Sei $G = G(\Phi, K)$ eine Chevalley-Gruppe, Q_x, $x \in G$, ein langer Wurzeltorus. Dann gibt es ein Untersystem $\Delta \subset \Phi$, das zu einer Faltung eines Untersystems von D_4 isomorph ist, und ein $u \in U(\Phi, K)$, so daß*

$$Q_x \leqslant uG(\Delta, K)u^{-1}.$$

Alle Möglichkeiten für Δ stehen in der folgenden Liste:

$$\Delta = \mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3,\ \mathrm{B}_2,\ \mathrm{B}_3,\ \mathrm{D}_4,\ \mathrm{G}_2\,.$$

Diese Reduktion wurde in [V5], [V8] für individuelle Wurzelelemente und dann in [VS] in endgültiger Form bewiesen. Es geht praktisch um Bahnen der Borel-Untergruppe $B(\Phi \setminus \{\alpha_i\}, K)$ in gewissen Darstellungen, wo α_i die mit der maximalen Wurzel im erweiterten Dynkin-Diagramm verbundene fundamentale Wurzel ist. Diese Reduktion wurde in einer ähnlichen Situation in [R] unabhängig entdeckt.

Die komplizierten Fälle sind $\Phi = \mathrm{B}_l$, D_l, $l \geqslant 4$, E_l, F_4, G_2. Hier ist möglicherweise $\Delta = \mathrm{D}_4$, B_3 oder G_2. Geht es um A_l oder C_l, so bekommt man als Δ nur die Untersysteme, die Faltungen oder Untersysteme von A_3 sind, also nur A_1, A_2, A_3 und $\mathrm{B}_2 = \mathrm{C}_2$. Damit sind die halbeinfachen langen Wurzelelemente in den speziellen linearen und in den symplektischen Gruppen einfacher gebaut, als in den anderen Fällen, siehe [V7], [Se1].

Jetzt könnten wir alle Möglichkeiten für den Weyl-Faktor w aufzählen. Das Element w wird ein Coxeter-Element (das heißt das Produkt aller fundamentalen Spiegelungen in irgendeiner Anordnung) eines Untersystems Δ von Φ sein. Für die Untersysteme benutzen wir die Bezeichnungen von [C2]. So ist $\widetilde{\Delta}$ die Einbettung von Δ in Φ als kurze Wurzeln und $k\Delta$ ist die orthogonale Summe von k Exemplaren von Δ.

Es sei auch daran erinnert, daß es in B_l, D_l, E_7, E_8 nicht konjugierte Untersysteme vom gleichen Typ gibt, z.B. B_l und D_l enthalten nichtkonjugierte Untersysteme $2\,\mathrm{A}_1 = \{\pm\{e_1 - e_2\}, \pm\{e_3 - e_4\}\}$ und $\mathrm{D}_2 = \{\pm e_1 \pm e_2\}$. In E_7 gibt es je ein Paar nichtkonjugierter $3\,\mathrm{A}_1'$ und $3\,\mathrm{A}_1''$, $4\,\mathrm{A}_1'$ und $4\,\mathrm{A}_1''$. Es sei auch betont, daß nur je eins von diesen in einem Untersystem vom Typ D_4 liegt, etwa $3\,\mathrm{A}_1''$ und $4\,\mathrm{A}_1''$.

Mit einem Computer erzeugte Tabellen geben die Information über die Weyl-Gruppe des Systems D_4, die wir brauchen. Alle Rechnungen wurden dabei in der vektoriellen Darstellung der Gruppe $G(\mathrm{D}_4, K)$ durchgeführt (man kann hier einfach an die orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(8, K)$ denken, die maximalen Witt-Index hat). Es gibt keine Möglichkeit (auch keine Notwendigkeit) diese Tabellen hier zu reproduzieren, da sie relativ groß sind: $|W(\mathrm{D}_4)| = 192$. Die uns hier interessierenden Tatsachen sind in den folgenden drei Sätzen zusammengefaßt.

Satz 2. *Als nichttriviale Weyl-Faktoren in den Bruhat-Zerlegungen der langen Wurzelelemente erscheinen nur Coxeter-Elemente von folgenden Wurzelsystemen:*

(1) A_1, $\widetilde{A}_1$, $2\,\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_1 + \widetilde{\mathrm{A}}_1$, $2\widetilde{\mathrm{A}}_1 \subset \Phi$ *und die* $3\,\mathrm{A}_1$, $4\,\mathrm{A}_1$, *die in einem System* D_4 *liegen (also,* $\mathrm{D}_2 + \mathrm{A}_1$, $\mathrm{D}_2 + \widetilde{\mathrm{A}}_1$, $2\,\mathrm{D}_2$ *in* B_l *und* D_l, *sowie* $3\,\mathrm{A}_1''$ *und* $4\,\mathrm{A}_1''$ *in* E_7 *und* E_8*),*

(2) $\mathrm{A}_2 \subseteq \Phi$,

(3) *einigen* $\mathrm{A}_3, \mathrm{B}_3 \subseteq \Phi$

Die Coxeter-Elemente von B_2, D_4 *und* G_2 *werden nie realisiert.*

Mit diesem Satz sind zwei interessante Beobachtungen verbunden:
a) die Frage, ob ein Element $w \in W$ als Weyl-Faktor in der Bruhat-Zerlegung eines halbeinfachen langen Wurzelelements auftritt, hängt nicht nur von der Konjugationsklasse von w ab,
b) auch wenn w' und w'' konjugiert sind und beide auftreten, bedeutet das nicht, daß ihre Borel-Faktoren die gleiche Struktur haben (vergleiche [V7], [Se1]).

Es stellte sich die folgende überraschende Tatsache heraus. Es war schon bekannt, daß fast alle Elemente des gegebenen Torus Q_x in derselben Doppelnebenklasse der Bruhat-Zerlegung liegen und das entsprechende Element aus W eine Involution ist. Es ist aber sehr wichtig zu wissen, wieviel Ausnahmen es gibt, sowie welche Elemente der Weyl-Gruppe in den Ausnahmefällen auftretten.

Die Antwort auf die erste Frage gibt

Satz 3. *Mit fixiertem* $x \in G$ *liegen alle Elemente eines gegebenen langen Wurzeltorus* Q_x, *mit Ausnahme von höchstens drei, in der selben "typischen" Klasse* Bw_0B, *wo* $w_0^2 = e$. *Genauer gesagt: es gibt höchstens ein* $\theta \neq 1$, *derart, daß* $xh_\alpha(\theta)x^{-1} \in BwB$, $xh_\alpha(\theta^{-1})x^{-1} \in Bw^{-1}B$ *wo* $w = w_\theta \neq w_0$.

Das ist eine Überraschung, da $h_\alpha(\epsilon)$ in minimallen Darstellungen fast immer drei verschiedene Eigenwerte hat, in der adjungierten Darstellung von E_8 aber sogar fünf (siehe [Z1]). Daher erwartet man, daß, weil die für die Ausartungen verantwortlichen Polynome höhere Grade haben, mehr Ausnahmen erscheinen könnten, als für die anderen Systeme. Das ist aber nicht der Fall.

Die nächste Frage, die uns interessiert, ist: wie tief sind die Ausartungen, d.h. in welcher Kodimension treten sie auf? Sei Δ jenes minimale Wurzelsystem, für welches $Q_x \leqslant uG(\Delta, K)u^{-1}$, $u \in U(\Phi, K)$, J fundamentales System von Δ, das in Φ^+ liegt, und $l_J(w)$ die Länge von w bezüglich J. Wir erhalten den folgenden Satz über den Charakter der Ausartung.

Satz 4. *Wenn $\theta \neq -1$ (anders gesagt, im Falle der einfachen Ausartung) gilt $l_J(w_\theta) = l_J(w_0) - 1$. Wenn $\theta = -1$, so kann die Länge sich noch weiter reduzieren, d.h. $l_J(w_\theta) < l_J(w_0) - 2$ ist möglich (aber w_{-1} bleibt eine Involution).*

Natürlich ist es möglich, auch diese Ausartung bildlich darstellen. Bekanntlich, kann man eine Ordnung auf der Weyl-Gruppe einführen, die der Zariski-Topologie auf G gut entspricht.

Es seien w'' und w' zwei Elemente aus der Weyl-Gruppe W. Man schreibt $w' \leqslant w''$, wenn es eine minimale Entwicklung von w' als Produkt von fundamentalen Spiegelungen gibt, so daß w'' gleich einem Subprodukt dieser Entwicklung ist. Das ist zu $Bw'B \subseteq \overline{Bw''B}$ äquivalent (siehe z.B. [St]). Die Vorstellung dabei ist, daß die dem Element w' entsprechende Zelle auf dem Rand von $Bw''B$ liegt. Satz 4 besagt, daß die einfache Ausartung von Bw_0B nur auf dem Rand und nur in der Kodimension 1 anzutreffen ist. Wenn es aber um mehrfache Ausartung geht (also $\theta = -1$), dann geschieht alles immer noch am Rand, aber die Dimension kann sich stärker reduzieren. Warum und wie das geschieht, ist noch nicht ganz klar.

Jetzt sind auch die Faktoren aus der Borel-Untergruppe in der Bruhat-Zerlegung eines langen Wurzeltorus zu erwähnen. Es ist schwierig, die Resultate in einer kurzen Form darzustellen. Wir begnügen uns hier mit einer kleinen Beobachtung. Sei $xh_\delta(\epsilon)x^{-1} = b_1wb_2$, so schreiben wir jetzt $b_1 = ud_1$ und $b_2 = d_2v$, wo $u, v \in U$, $d_1, d_2 \in T$. Dann kann man u und v als Produkte von elementaren Unipotenten darstellen:

$$u = \prod x_\alpha(u_\alpha), \quad v = \prod x_\alpha(v_\alpha), \qquad \alpha \in \Phi^+,$$

wo die Reihenfolge der Faktoren willkürlich, aber fixiert ist.

Satz 5. *Die Koeffizienten u_α und v_α sind rationale Funktionen von ϵ, deren Zähler und Nenner höchstens quadratisch sind.*

In Wirklichkeit, wenn eine passende Ordnung auf Φ gewählt wird, sind die Koeffizienten von ϵ meistens unabhängig.

Verallgemeinerungen. Die hier erörteten Tatsachen über lange Wurzelelemente antworten auch auf eine allgemeinere Frage: was kann man über die Bruhat-Zerlegung von Elementen sagen, die mit einer Einbettung von $\mathrm{A}_1 \subseteq \Phi$ verknüpft sind? Noch allgemeiner, sei Δ irgendein irreduzibles Untersystem von Φ. Ihm entspricht eine Einbettung $G(\Delta, K) \leqslant G(\Phi, K)$. Was können wir über die Bruhat-Zerlegung von Elementen $xG(\Delta, K)x^{-1}$ sagen, wo $x \in G(\Phi, K)$? Die Frage wurde faktisch nur im Fall $\Delta = \mathrm{A}_1$ beantwortet (Satz 1). Insbesondere gilt

Satz 6. *Sei δ die maximale Wurzel und $G_\delta = \langle X_\delta, X_{-\delta}\rangle$. Für jedes $x \in G$ gibt es ein Untersystem $\Delta \subset \Phi$, das zu einer Faltung eines Untersystems von D_4 isomorph ist, und ein Element $u \in U(\Phi, K)$, so daß:*

$$xG_\delta x^{-1} \leqslant uG(\Delta, K)u^{-1}.$$

Tatsächlich ist das der Fall von halbeinfachen Wurzelelementen. Man kann nämlich immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper nehmen, und dann wird jedes Element von $G_\delta \cong \mathrm{SL}(2,K)$ entweder ein langes Wurzelelement oder zu einem Unipotent x_α oder zu $h_\delta(-1)x_\delta(\xi)$ konjugiert. Die zwei letzten Fälle wurden auch schon untersucht ([V2]).

Auch für die nächsten Fälle, $\Delta = \mathrm{A}_2$ und $\Delta = \widetilde{\mathrm{A}}_1$, gibt es in der allgemeinen Situation keine Analogen von Satz 6. Man kennt die Antwort nur für den Fall $\Phi = \mathrm{A}_l$.

Die Autoren $^{\flat,\sharp}$ möchten R.W.Carter, G.M.Seitz, E.B.Vinberg und A.E.Zalesskii für die stimulierenden Gespräche im Verlauf der Entstehung dieser Arbeit danken. Ganz besondere Dank für ihre freundliche Unterstützung geht an unsere Gastgeber G.Stroth $^\flat$, A.Bak $^\sharp$ und U.Rehmann, der $^\flat$ nach Bielefeld eingeladen hat, was die Beendigung dieser Arbeit möglich machte. Schließlich, möchten wir H.Abels für seine Mühe herzlich danken, den Text dieses Artikels Deutsch klingen zu lassen; er hat mehrere sprachliche und stilistische Verbesserungen in der Darstellung vorgeschlagen.

Bibliography

[B] Borel A. Properties and linear representations of Chevalley groups. – *Lecture Notes Math.* – 1970. – V.131. – P.1–55.

[Bu] Bourbaki N. *Groupes et algèbres de Lie. Ch. 7,8.* – Hermann: Paris, 1975, 271P.

[C1] Carter R.W. *Simple groups of Lie type.* – London et al.: Wiley. – 1972. – 331P.

[C2] Carter R.W. Conjugacy classes in the Weyl group. – *Compositio Math.* – 1972. – V.25, N.1. – P.1–59.

[VD] Harebov A.L., Vavilov N.A. On the lattice of subgroups of Chevalley groups containing a split maximal torus. – *Preprint Univ. Warwick*, 1993, N.14, 27P.

[H] Huffman W.C. Linear groups containing an element with an eigenspace of codimension two. – *J. Algebra.* – 1975. – V.34. – P.260–287.

[HW1] Huffman W.C., Wales D.B. Linear groups of degree n containing an element with exactly $n-2$ equal eigenvalues. – *Linear and multilinear Algebra.* – 1975. – V.3. – P.53–59.

[HW2] Huffman W.C., Wales D.B. Linear groups containing an element with an eigenspace of codimension two. – *Proc. Conf. Finite groups, Utah.* Acad.Press: N.Y., 1976.

[HW3] Huffman W.C., Wales D.B. Linear groups containing an involution with two eigenvalues -1. – *J. Algebra.* – 1977. – V.45. – p.465–515.

[Hu] Humphreys J.E. *Introduction to Lie algebras and representation theory, 3rd Printing.* – Springer: New York et al. – 1980. – 171P.

[Kn] Kondratiev A.S. Subgroups of finite Chevalley groups. – *Russian Math. Surv.* – 1986. – V.41. – P.65–118.

[K1] Korlyukov A.V. Linear groups generated by two-dimensional elements of order $r \geqslant 5$. – *Vestnik Moscow Univ., Math.* – 1983. – V.38, N.5. – P.21–25.

[K2] Korlyukov A.V. Finite linear groups over a field of characteristic 0, which are generated by two-dimensional elements of order 3 and 4. – In: *Arithmetical and Subgroup Properties of Finite Groups.* – Minsk, 1986. – P.75–86 (In Russian).

[N] Nesterov V. Triples of short root subgroups in Chevalley groups. – *In preparation.*

[R] Röhrle G.E. On extraspecial parabolic subgroups. – *submitted.*

[S1] Seitz G.M. Subgroups of finite groups of Lie type. – *J. Algebra.* – 1979. – V.61, N.1. – P.16–27.

[S2] Seitz G.M. Properties of the known simple groups. – *Proc. Symp. Pure. Math.* – 1980. – V.37. – P.231–237.

[Se1][1] Semenov A.A. Bruhat decomposition of semi-simple root subgroups of the special linear group. – *J. Sov. Math.*. – 1990. – V.52, N.3. – P.3178–3184.

[Se2] Semenov A.A. *Bruhat decomposition of long root tori in Chevalley groups.* – Ph. D. Thesis, Leningrad State Univ. – 1991. – 143P. (In Russian)

[SV] Semenov A.A., Vavilov N.A. Semisimple long root elements of Chevalley groups. – *In preparation.*

[St] Steinberg R. *Lectures on Chevalley groups.* – Yale University. – 1968. – 277P.

[T] Tits J. Groupes semi-simples isotropes. – *Colloq. Théorie des groupes algèbriques (Bruxelles, 1962)*, Paris, 1962. – P.137–147.

[V1] Vavilov N.A. Bruhat decomposition of one-dimensional transformations. – *Vestnik Leningr. Univ., Math.* – 1986. – V.19. – P.17–24.

[V2] Vavilov N.A. On the geometry of long root subgroups in Chevalley groups. – *Vestnik Leningr. Univ., Math.*. – 1988. – V.21, N.1, P.5–10.

[V3] Vavilov N.A. Weight elements of Chevalley groups. – *Soviet Math. Dokl.* – 1988. – V.37, N.1. – P.92–95.

[V4] Vavilov N.A. Conjugacy theorems for subgroups of extended Chevalley groups containing a split maximal torus. – *Soviet Math. Dokl.* – 1988. – V.37, N.2. – P.360–363.

[V5] Vavilov N.A. Bruhat decomposition of the semisimple long root elements in Chevalley groups – *Rings and modules. Limit theorems of probability theory, II, Leningrad Univ. Press.* – 1988. – P.18–39. (In Russian).

[V6] Vavilov N.A. On the interrelation of a long and a short root subgroups in a Chevalley group. – *Vestnik. Leningr. Univ., Math.*. – 1989, V.22. – N.1. – P.1–7.

[V7] Vavilov N.A. Bruhat decomposition of two-dimensional transformations. – *Vestnik Leningr. Univ., Math.*. – 1989. – V.22, N.3. – P.1–6.

[V8] Vavilov N.A. Semisimple root elements and triples of unipotent root subgroups in a Chevalley group. – *Problems in Algebra (Minsk).* – 1989. – N.4. – P.162–173 (In Russian).

[1] Im *J. Sov. Math.* ist der Artikel fälschlich A.V.Yakovlev zugeschrieben worden.

[V9] Vavilov N.A. On subgroups of the split classical groups. – *Proc. Math. Inst. Steklov.* – 1991. – N.4. – P.27–41.

[V10] Vavilov N.A. Subgroups of Chevalley groups containing a maximal torus. – *Transl. Amer. Math. Soc., 2nd ser.* – 1993. – V.155. – P.59–100.

[V11] Vavilov N.A. Unipotent elements in subgroups of extended Chevalley groups containing a split maximal torus. – *Russian Math. Doklady.* – 1993. – V.328, N.5. – P.536–539.

[V12] Vavilov N.A. Intermediate subgroups in Chevalley groups. – *Proc. Conf. Groups of Lie Type and their Geometries, Como, 1993* – Cambridge Univ. Press, 1994, *to appear.*

[V13] Vavilov N.A. Weight elements of Chevalley groups. – *In preparation.*

[VS] Vavilov N.A., Semenov A.A. Bruhat decomposition of long root tori in Chevalley groups. – *J. Sov. Math.*. – 1991. – V.42. – P.3453–3458.

[W] Wales D.B. Linear groups of degree n containing an involution with two eigenvalues -1. II. – *J. Algebra.* – 1978. – V.53. – P.58–67.

[Z1] Zalesskii A.E. Semisimple root elements of algebraic groups. – *Preprint Inst. Math. Bielorussian Acad. Sci.*. – Minsk, 1980. – N.13, 23P. (In Russian).

[Z2] Zalesskii A.E. Linear groups. – *J. Sov. Math.* – 1985. – V.31, N.3. – P.2974–3004.

E-MAIL: SEMENOV@MATH.LGU.SPB.SU
VAVILOV@MATHEMATIK.UNI-BIELEFELD.DE