Formes quadratiques de hauteur et de degré 2

Bruno Kahn

1991 Mathematics Subject classification : 11E04

Abstract

We classify quadratic forms of height 2 and degree 2 in the sense of Knebusch [14, 15] over any field of characteristic $\neq 2$, completing the earlier results of Knebusch and Fitzgerald. Such an anisotropic form is either excellent, or a 6-dimensional 'Albert form' or an 8-dimensional form of a certain type. We also give partial results for forms of degree > 2. We then show that forms of height 2 and degree ≤ 2 (at least the non-excellent ones) can be parametrised, up to similitude, by cohomological invariants. Does this phenomenon extend to higher heights and degrees ?

Dans cet article, on classifie les formes quadratiques de hauteur et de degré 2 sur un corps commutatif quelconque (de caractéristique $\neq 2$). Le résultat principal est le suivant :

Théorème. *Soient F un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$ et q une forme quadratique anisotrope sur F, de hauteur et de degré 2 au sens de Knebusch* [14, 15]. *Alors,*
(i) soit q est excellente ;
(ii) soit $\dim(q) = 8$ *et $q \cong q_1 \otimes \theta$, où θ est une 1-forme de Pfister et $c(q) \neq 0$;*
(iii) soit q est une "forme d'Albert" (de dimension 6).
Réciproquement, toute forme anisotrope de type (ii) ou (iii) est de hauteur et de degré 2.

Remarque. Les cas (i), (ii) et (iii) s'excluent mutuellement.

Une partie substantielle de ce résultat a été obtenue auparavant par Knebusch [15] et Fitzgerald [9] ; nous en donnons de nouvelles démonstrations, de nature cohomologique. Leur travail implique que toute forme de hauteur et de degré 2 qui n'est pas du type (i) ou (iii) de l'énoncé est de dimension ≤ 26. La preuve qu'une telle forme est en fait une forme d'Albert est une application simple du théorème de réduction d'indice de Merkurjev [18], qui ne semble pas avoir été observée auparavant. Elle montre une fois de plus la puissance de ce théorème.

Pour les résultats "classiques" de la théorie algébrique des formes quadratiques, on renvoie à [16] ou [24]. La plupart des notations utilisées dans cet article se trouvent dans ces ouvrages ; on les précise au §1 pour la commodité du lecteur. Les notions de hauteur et de degré d'une forme quadratique sont rappelées au §2, où l'on donne également les résultats généraux de Knebusch les concernant et une version plus précise de l'énoncé ci-dessus (théorèmes 2.10 et 2.11). Au §3, on rappelle la démonstration de Fitzgerald du théorème 2.10 a) (concernant la partie (ii) du théorème ci-dessus) et on en donne deux autres, reposant sur les résultats de [1] et [17]. La démonstration du théorème 2.11 (partie

(iii) du théorème ci-dessus), comme indiqué, utilise [18]. Au §4, on considère les formes quadratiques de hauteur 2 et de degré > 2 et on donne des généralisations partielles des résultats du §2. On y donne en particulier une discussion sommaire du problème de la "descente" des formes de Pfister, étroitement lié à ces questions.

Le thème final de cet article est de montrer comment les invariants cohomologiques associés aux formes quadratiques, réellement ou encore conjecturalement, peuvent servir d'outil pour des problèmes de classification tels que celui des formes de hauteur et de degré donné. Outre le fait que les démonstrations cohomologiques du théorème de Fitzgerald données au §3 se généralisent au degré 3 et conjecturalement aux degrés supérieurs, alors que ce n'est pas *a priori* le cas de la sienne, on montre au §5 que les formes non excellentes de hauteur 2 et de degré ≤ 2 peuvent être *paramétrées*, à similitude près, par certains invariants cohomologiques dépendant du type de la forme en question (dans le cas des formes excellentes, on a une paramétrisation au moyen de formes de Pfister, qui correspondent conjecturalement à des invariants cohomologiques, voir corollaire 5.1 et conjecture 5). On arrive ainsi à une division des formes quadratiques de petite hauteur et de petit degré en classes définies par des invariants "discrets" (hauteur, degré, type au sens du §2), au sein desquelles elles se comportent comme des "familles continues" (*i.e.* sont paramétrées par une famille de classes de cohomologie galoisienne d'un type fixé), généralisant la manière dont les formes de Pfister de degré n sont paramétrées par les symboles de degré n (conjecturalement pour $n \geq 6$). Ce phénomène persiste-t-il en hauteur et degré plus grands ?

Ce travail a été achevé au cours d'un séjour à l'Université de Bielefeld en décembre 1993. J'ai plaisir à remercier Ulf Rehmann et le Sonderforschungsbereich 343 "diskrete Strukturen in der Mathematik" pour leur hospitalité et l'atmosphère de travail détendue qu'ils entretiennent. Je remercie également Jürgen Hurrelbrink et Markus Rost pour des discussions au cours du colloque de K-théorie algébrique d'Oberwolfach (juin 1993), qui ont conduit à ces résultats, Cornelius Greither pour avoir suggéré l'expression "forme dominante" en traduction de "leading form" et Adrian Wadsworth pour une simplification de l'énoncé de la proposition 5.1.

Tous les corps considérés dans cet article sont de caractéristique $\neq 2$. Sauf mention expresse du contraire, toutes les formes quadratiques sont non dégénérées.

1 Notations

On note :

$< a_1, \ldots, a_n >$ la forme quadratique $a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2$.

$\ll a_1, \ldots, a_n \gg$ la forme $< 1, -a_1 > \otimes \cdots \otimes < 1, -a_n >$ (comme Arason [1]; Lam [16] note cette forme $\ll -a_1, \ldots, -a_n \gg$).

$i(q)$ l'indice d'une forme quadratique q : c'est la dimension des sous-espaces totalement isotropes maximaux de q.

$D_F(q) = q(V) \setminus \{0\}$, où V est l'espace vectoriel sous-jacent à q; $G_F(q) = \{a \in F^* \mid aq \cong q\}$.

$W(F)$ l'anneau de Witt de F.

IF l'idéal "fondamental" de $W(F)$ (idéal des formes de rang pair), et $I^n F = (IF)^n$.

$d_\pm q$ le "discriminant à signe" d'une forme quadratique q : $d_\pm q = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathrm{disc}(q)$, où $n = \dim(q)$ et $\mathrm{disc}(q)$ est le discriminant ordinaire de q.

$c(q)$ l'"invariant de Clifford" de q : si $\dim(q)$ est paire, c'est la classe dans le groupe de Brauer de F de l'algèbre de Clifford de q.

Les invariants $d_\pm q$ et $c(q)$ ne dépendent que de la classe de q dans $W(F)$.

$F(q)$ le corps des fonctions de la quadrique projective d'équation $q = 0$ (si $\dim(q) > 2$).

$H^n F$ le groupe de cohomologie galoisienne $H^n(F, \mathbf{Z}/2)$. Les invariants $d_\pm q$ et $c(q)$ sont respectivement à valeurs dans $H^1 F$ et $H^2 F$.

On note simplement $\cdot$ le cup-produit de l'algèbre de cohomologie $H^* F$. Si $a \in F^*$, on note (a) sa classe dans $H^1 F$ par la théorie de Kummer. Si $a_1, \ldots, a_n \in F^*$, on note $(a_1, \ldots, a_n)$ l'élément $(a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n) \in H^n F$.

On appelle *symbole* tout élément de $H^n F$ de la forme $(a_1, \ldots, a_n)$.

Si A est une F-algèbre centrale simple, on note $\mathrm{ind}\, A$ son indice et $\deg A$ son degré ($(\deg A)^2 = \dim_F A$).

Si K est une extension de F et q une F-forme quadratique (*resp.* A une F-algèbre centrale simple, c une classe de cohomologie galoisienne), on note q_K la K-forme quadra-

tique $q \otimes_F K$ (*resp.* $A_K = A \otimes_F K$, $c_K = \mathrm{Res}_{K/F} c$).

Une *forme d'Albert* est une forme quadratique q de dimension 6 telle que $d_\pm q = 1$.

Etant donné deux formes quadratiques q et q', on note $q \cong q'$ si q est isomorphe à q' et $q \sim q'$ si q et q' ont même classe dans $W(F)$.

2 Rappels sur les formes quadratiques

On fixe un corps de base F, de caractéristique $\neq 2$.

2.1 Formes de Pfister, voisines de Pfister, formes excellentes

Définition 2.1 *a) Une forme quadratique q est une n-forme de Pfister s'il existe $a_1, \cdots, a_n \in F^*$ tels que $q \cong \ll a_1, \cdots, a_n \gg$. En particulier, $\dim(q) = 2^n$. On dit qu'une forme quadratique q est une forme de Pfister si c'est une n-forme de Pfister pour un entier $n \geq 1$ convenable.*
b) Si q est une forme de Pfister, on appelle partie pure de q, et on note q', l'unique forme telle que $1 \perp q' \cong q$.

Proposition 2.1 (Pfister) *a)* [16, X.1.6] *Une forme de Pfister isotrope est hyperbolique.*
b) [16, X.1.7] *Pour toute forme de Pfister φ, on a $D_F(\varphi) = G_F(\varphi)$ (φ est "multiplicative").*
c) [16, X.2.8] *Soit q une forme quadratique anisotrope telle que $q(t_1, \ldots, t_n) \in G_{F(t_1,\ldots,t_n)}(q)$, où $n = \dim(q)$ et les t_i sont des indéterminées. Alors q est une forme de Pfister.*

Définition 2.2 *Une forme quadratique q est une voisine de Pfister s'il existe $a \in F^*$ et une forme de Pfister φ tels que :*
(i) aq est isomorphe à une sous-forme de φ ;
(ii) $\dim(q) > \frac{1}{2}\dim(\varphi)$.

Proposition 2.2 [15, 7.4] *Si q est une voisine de Pfister, les formes φ et aq de la définition 2.2 sont uniques à isomorphisme près. La forme q' telle que $aq \perp q' \cong \varphi$ est appelée la forme complémentaire de q ; la dimension de q' est appelée* codimension *de q.*

Définition 2.3 *Une forme quadratique q est* excellente *si, pour toute extension K/F, la partie anisotrope de q_K est définie sur F.*

Théorème 2.1 [15, 7.14] *Une forme quadratique q est excellente si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :*
(i) q est une voisine de Pfister ;
(ii) la forme complémentaire de q est excellente.

2.2 Invariants cohomologiques

Arason [1, 1.6] a démontré que, pour $a_1, \ldots, a_n \in F^*$, le symbole $(a_1, \ldots, a_n) \in H^n F$ ne dépend que de la forme de Pfister $\ll a_1, \ldots, a_n \gg$ (voir aussi [7, 2.1]). On peut donc associer à $\ll a_1, \ldots, a_n \gg$ l'*invariant cohomologique*

$$e^n(\ll a_1, \ldots, a_n \gg) = (a_1, \ldots, a_n) \in H^n F.$$

Conjecture 1 *L'invariant e^n se prolonge en un homomorphisme*

$$e^n : I^n F / I^{n+1} F \longrightarrow H^n F.$$

Lorsque la conjecture 1 est vérifiée, on dit pour simplifier que e^n *existe*. Les invariants e^0, e^1 et e^2 existent trivialement et sont donnés par $e^0(q) = \dim(q) \pmod 2$, $e^1(q) = d_{\pm} q$ et $e^2(q) = c(q)$.

Théorème 2.2 (Arason [1] pour $n = 3$, Jacob-Rost [12], Szyjewski [25] pour $n = 4$). *e^n existe pour $n = 3, 4$.*

Conjecture 2 *L'invariant e^n de la conjecture 1 est bijectif.*

Cette conjecture est triviale pour $n = 0$ et facilement vérifiée pour $n = 1$ [16, II.2.3].

Théorème 2.3 (Merkurjev [17] pour $n = 2$, Rost [21], Merkurjev-Suslin [19] pour $n = 3$). *La conjecture 2 est vraie pour $n = 2, 3$.*

Rost a annoncé une démonstration de la conjecture 2 pour $n = 4$. En général, on s'attend à ce que la conjecture 1 pour $n + 1$ puisse se démontrer en s'appuyant entre autres sur l'établissement de la conjecture 2 en degré n. Cette dernière résulte des deux conjectures de Milnor reliant la K-théorie de Milnor à la cohomologie galoisienne modulo 2 et à l'anneau de Witt gradué [20].

Les conjectures 1 et 2 sont liées aux suivantes :

Conjecture 3 *Pour tout entier n et toute forme quadratique q de dimension $> 2^n$, l'homomorphisme $H^n F \longrightarrow H^n F(q)$ est injectif.*

Conjecture 4 *Pour tous entiers n, i et toute n-forme de Pfister φ, on a* $\mathrm{Ker}(H^{n+i} F \longrightarrow H^{n+i} F(\varphi) = e^n(\varphi) \cdot H^i F$.

Théorème 2.4 *a)* (Arason [1, p. 269, 5.6]) *La conjecture 3 est vraie pour $n \leq 3$.*

b) (Arason [1, 5.5, 5.6], Jacob-Rost [12, 1.5, 4.1], Szyjewski [25, 6.4, 5.5.2]) *La conjecture 4 est vraie pour $(n, 0)(n \leq 4)$ et $(n, 1)(n \leq 3)$.*

Rost et Merkurjev m'ont indiqué que la conjecture 3 est encore vraie pour $n = 4$ (voir [25, 6.1] dans le cas où q contient une 2-forme de Pfister).

Enfin, une dernière conjecture mérite d'être énoncée, bien qu'elle soit plus faible que la conjecture 2 :

Conjecture 5 *L'invariant cohomologique e^n sépare les n-formes de Pfister.*

Théorème 2.5 (Arason, Elman, Jacob, essentiellement), *cf* [12, remarque p. 553]. *La conjecture 5 est vraie pour $n \leq 5$.*

On peut montrer que la conjecture 4 pour $(n-1, 1)$ et la conjecture 5 en degré n entraînent la conjecture 4 pour $(n, 0)$ et que cette dernière et la conjecture 5 en degré n entraînent la conjecture 1 en degré n [12, 1.5, 1.6], [25, dém. de 6.6]. On peut aussi montrer que la conjecture 1 en degré $n-1$ et la conjecture 2 en degré $n-2$ entraînent la conjecture 5 en degré n [12, remarque p. 553].

2.3 Hauteur, degré

Définition 2.4 *La hauteur $h(q)$ d'une forme quadratique q est définie de la manière suivante :*

(i) $h(q) = h(q^{(1)})$, où $q^{(1)}$ est la partie anisotrope de q.

(ii) Si q est anisotrope, $h(q) = 0$ si et seulement si $\dim(q) \leq 1$.

(iii) Si q est anisotrope de dimension ≥ 2, $h(q) = h(q_{F(q)}) + 1$.

Théorème 2.6 [14, 5.8], [27]. *Soit q une forme quadratique anisotrope. Pour que $h(q) = 1$, il faut et il suffit que q soit une voisine de Pfister de codimension 0 ou 1.*

Définition 2.5 *Le degré $\deg(q)$ d'une forme quadratique q est défini de la façon suivante :*

(i) $\deg(q) = \deg(q^{(1)})$, où $q^{(1)}$ est la partie anisotrope de q.

(ii) Si $\dim(q)$ est impaire, $\deg(q) = 0$.

(iii) Si q est anisotrope, $h(q) = 1$ et $\dim(q)$ est paire, $\dim(q)$ est de la forme 2^δ d'après le théorème 2.6. Alors $\deg(q) = \delta$.

(iv) Si q est anisotrope et $h(q) > 1$, $\deg(q) = \deg(q_{F(q)})$.

Théorème 2.7 [14, 6.4 et 6.6]. *Pour tout $n \geq 1$, $J_n(F) = \{q \in W(F) \mid \deg(q) \geq n\}$ est un idéal de $W(F)$ contenant $I^n F$.*

Le lemme suivant est bien connu; nous ne le donnons que dans un but de référence.

Lemme 2.1 *Soit $q \in J_n(F)$, anisotrope et $\neq 0$.*

a) On a $\dim(q) \geq 2^n$.

b) Si $\dim(q) = 2^n$, q est semblable à une forme de Pfister.

a) est évident en se réduisant au cas où $h(q) = 1$. Pour voir b), on remarque que $\dim(q_{F(q)})_{an} < 2^n$, donc $q_{F(q)} \sim 0$ et le lemme résulte du théorème 2.6.

Conjecture 6 [14]. *Pour tout corps F et tout $n \geq 1$, on a $J_n(F) = I^n F$.*

Théorème 2.8 [3, proposition 3], [4, p. 752]. *La conjecture 6 est vraie pour $n \leq 4$.*

Pour la commodité du lecteur, nous donnons une démonstration pour $n = 3$ et $n = 4$ (voir [14, 6.8] pour $n \leq 2$).

Démonstration. Supposons $n = 3$. Soit $q \in J_3(F)$ une forme anisotrope. En particulier, $q \in J_2(F) = I^2(F)$. Soit $c(q)$ l'invariant de Clifford de q. On va montrer que $c(q) = 0$. D'après le théorème 2.3, cela impliquera que $q \in I^3 F$. Si $q = 0$, il n'y a rien à démontrer. Si $q \neq 0$, on a $\dim(q) \geq 8$ (lemme 2.1). Par récurrence sur $\dim(q)$, on a $c(q_{F(q)}) = c(q)_{F(q)} = 0$. Mais $\mathrm{Ker}(H^2 F \longrightarrow H^2 F(q)) = 0$ d'après le théorème 2.4, puisque $\dim(q) > 4$.

Supposons $n = 4$. Soit $q \in J_4(F)$ (anisotrope). D'après ce qui précède, $q \in I^3 F$, donc son invariant d'Arason $e^3(q) \in H^3 F$ est défini (th. 2.2). On raisonne comme ci-dessus. Si $q \neq 0$ on a $\dim(q) \geq 16$ (lemme 2.1) ; par récurrence sur $\dim(q)$, on a $e^3(q)_{F(q)} = 0$. Or $\mathrm{Ker}(H^3 F \longrightarrow H^3 F(q)) = 0$ puisque $\dim(q) > 8$ (th. 2.4). Donc $e^3(q) = 0$ et $q \in I^4 F$ d'après le théorème 2.3.

Remarque. En utilisant l'invariant de Jacob-Rost-Szyjewski $e^4(q) \in H^4 F$ pour $q \in I^4 F$ (th. 2.2) et le fait que les conjectures 2 et 3 sont vraies en degré 4, on peut en déduire comme ci-dessus que la conjecture 6 est encore vraie pour $n = 5$. Plus généralement, la conjecture 6 en degré r résulte par récurrence sur r des conjectures 2 et 3 pour $n \leq r - 1$.

2.4 Formes de hauteur 2

Rappelons la définition suivante [14, 5.9] :

Définition 2.6 *Soient q une forme quadratique sur F (de dimension paire, pour simplifier) et $h = h(q)$. Définissons une suite $(F_1, q^{(1)}), \ldots, (F_h, q^{(h)})$ d'extensions de F et de formes quadratiques (où $q^{(i)}$ est définie sur F_i) de la manière suivante :*

(i) $F_1 = F$.

(ii) Pour $1 \leq i \leq h$, $q^{(i)}$ est la partie anisotrope de q_{F_i}.

(iii) Pour $1 \leq i < h$, $F_{i+1} = F_i(q^{(i)})$.

D'après le théorème 2.6, $q^{(h)}$ est semblable à une forme de Pfister bien déterminée : on appelle cette dernière la forme dominante (leading form) de q.

Soit q une forme quadratique anisotrope de hauteur 2, de dimension paire. Puisque $h(q) = 2$, $q^{(2)}$ est de la forme $a\varphi$, où $a \in F(q)^*$ et φ est la forme dominante de q. Alors q

est de l'un des trois types suivants, s'excluant mutuellement :

Type I. $q^{(2)}$ est définie sur F.

Type II. $q^{(2)}$ n'est pas définie sur F, mais φ est définie sur F.

Type III. φ n'est pas définie sur F.

Si $\deg(q) = 1$, on a $\varphi \cong \ll d^{\pm} q \gg$, donc q n'est pas de type III.

Si q est de type I ou II, (q est "bonne" dans la terminologie de Fitzgerald [9]), sa forme dominante est définie par une F-forme de Pfister bien déterminée [15, 9.2]. On identifiera cette dernière avec la forme dominante de q, sans plus de commentaires.

Si q est de type I, alors q est excellente et sa structure est donnée par le lemme 2.2 ci-dessous (voir aussi prop. 5.1) :

Lemme 2.2 [15, 10.1] *Soit q une forme quadratique anisotrope excellente de hauteur 2. Alors il existe $a \in F^*$ et deux formes de Pfister φ, ψ telles que $q \cong a\varphi \otimes \psi'$ (où ψ' est la partie pure de ψ). De plus, φ est la forme dominante de q (donc $\deg(q) = \deg(\varphi)$).*

Conjecture 7 *a) (cf* [15, 10.6], [9, 1.3]*) Soit q anisotrope de hauteur 2, de type II et de degré $n \geq 1$. Alors $q \cong \tau \otimes q_1$, où τ est une $(n-1)$-forme de Pfister et $\dim(q_1) = 4$.*

b) Soit q anisotrope de hauteur 2, de type III et de degré $n \geq 2$. Alors $q \cong \tau \otimes q_1$, où τ est une $(n-2)$-forme de Pfister et q_1 est une forme d'Albert.

Remarque. Réciproquement, si $q \cong \tau \otimes q_1$ est anisotrope de degré $n \geq 1$, où τ est une $(n-1)$-forme de Pfister et $\dim(q_1) = 4$ (*resp.* de degré $n \geq 2$, où τ est une $(n-2)$-forme de Pfister et q_1 est une forme d'Albert), alors q est de hauteur 2 et de type II (*resp.* III).

En effet, dans le premier cas, on a $\dim(q) > \dim(q^{(2)}) \equiv 0 \pmod{2^{n-1}}$ [14, 5.18], donc $\dim(q^{(2)}) = 0$, 2^{n-1} ou 2^n. Si $\dim(q^{(2)}) = 0$, on a $h(q) = 1$, donc q est semblable à une $(n+1)$-forme de Pfister, ce qui contredit $\deg(q) = n$. Donc $\dim(q^{(2)}) > 0$, d'où $\dim(q^{(2)}) \geq 2^n$ puisque $q^{(2)} \in J_n(F_2)$ (lemme 2.1 a)), donc $\dim(q^{(2)}) = 2^n$. Par le lemme 2.1 b), $q^{(2)}$ est semblable à une n-forme de Pfister, donc $h(q) = 2$. De plus, $q \simeq \tau \otimes \ll d_{\pm} q_1 \gg \pmod{J_{n+1}(F)}$, donc q est de type I ou II d'après [15, 9.6]. Mais q ne peut pas être excellente, puisque $\dim(q)$ est une puissance de 2 (lemme 2.2).

Dans le deuxième cas, on a de même $\dim(q) > \dim(q^{(2)}) \equiv 0 \pmod{2^{n-2}}$, donc $\dim(q^{(2)}) = 2^{n-2}a$ avec $0 \leq a < 6$. On n'a pas $a = 0$ puisque $h(q) \neq 1$ pour des raisons de dimension, donc $a \geq 4$ par le lemme 2.1 a). Mais $a = 5$ est impossible, sans quoi $q^{(2)} \simeq \tau \pmod{J_{n-1}(F_2)}$ ce qui contredirait $\deg(q) = n$. Donc $\dim(q^{(2)}) = 2^n$, d'où de nouveau $h(q) = 2$. Pour des raisons de dimension, q ne peut être ni de type I ni de type II, elle est donc de type III.$\diamond$

Théorème 2.9 [15, 10.3]. *La conjecture 7 a) est vraie pour $n = 1$.*

Concernant les formes de type II en général, on a :

Lemme 2.3 *a)* [15, 10.1] *Si q est de hauteur 2, de degré n, de type II et de forme dominante φ, $q_{F(\varphi)}$ est anisotrope et semblable à une forme de Pfister de degré $> n$.*

b) [15, remarques pp. 29–30] ; [11, 3.7]. *Dans le cas a), il existe une extension K/F telle que q_K reste anisotrope de hauteur 2 et soit divisible par une $(n-1)$-forme de Pfister.*

c) [15, 10.8] *Si q est de hauteur 2, de degré 2 et de type II, on a même $q \cong q_1 \otimes \ll a \gg$ pour $a \in F^*$ convenable.*

Le théorème suivant est dû à Fitzgerald :

Théorème 2.10 *a)* [9, 1.6] *Toute forme de hauteur 2, de degré 2 et de type II est de dimension 8.*

b) [9, 2.7] *Une forme de hauteur 2, de degré 2 et de type III est soit une forme d'Albert (de dimension 6), soit une forme de dimension ≤ 26.*

Le lemme 2.3 c) et le théorème 2.10 a) entraînent :

Corollaire 2.1 *La conjecture 7 a) est vraie pour $n = 2$.*

Concernant les formes de type III, le résultat suivant précise le théorème 2.10 b) :

Théorème 2.11 *La conjecture 7 b) est vraie pour $n = 2$.*

Ceci achève la classification des formes de hauteur et de degré 2.

Nous verrons de plus au §4.2 que

Théorème 2.12 *La conjecture 7 a) est vraie pour $n = 3$.*

Au paragraphe suivant, on rappelle la démonstration de Fitzgerald du théorème 2.10 a), et on en donne deux autres, de nature cohomologique. Ces démonstrations présentent l'avantage de se géneraliser aux degrés supérieurs, ce qui ne semble pas *a priori* être le cas de celle de Fitzgerald (voir §4). On donne également la démonstration du théorème 2.11 : celle-ci est indépendante des résultats de [9].

3 Démonstrations

3.1 Première démonstration du théorème 2.10 a) (Fitzgerald)

Soient q de hauteur 2, de degré 2 et de type II et φ sa forme dominante. Quitte à multiplier q par un scalaire, on peut supposer que q représente 1. D'après le lemme 2.3 a), $q_{F(\varphi)}$ est isomorphe à une forme de Pfister anisotrope. D'après [2], [22], l'extension $F(\varphi)/F$ est "excellente" ; d'après [8, 2.10], il existe donc une forme de Pfister ρ (définie sur F) telle que $\rho_{F(\varphi)} \cong q_{F(\varphi)}$ (*cf* §4.2).

La forme $q \perp -\rho$ devient donc hyperbolique sur $F(\varphi)$. Comme φ est une forme de Pfister, on a $q \perp -\rho \sim \varphi \otimes q_1$ pour une forme q_1 convenable [14, 4.4].

Notons que $\dim(q_1)$ est impaire, sans quoi $\varphi \otimes q_1 \in I^3F$ et $q \in I^3F$, ce qui contredit l'hypothèse que $\deg(q) = 2$. Soit $d = d_{\pm}q_1$. Alors $q_1 \perp < \pm d > =: q_2 \in I^2F$, donc on a :

$$q \sim \mp d\varphi \perp \varphi \otimes q_2 \perp \rho,$$

avec $\varphi \otimes q_2 \in I^4F$. Si $\dim(q) = \dim(\rho) > 8$, on a $\deg(\varphi \otimes q_2 \perp \rho) > 3$. Mais d'après [14, 6.3(ii)], cela implique que q est excellente, ce qui contredit l'hypothèse que q est de type II.

3.2 Deuxième démonstration du théorème 2.10 a)

Gardons les notations ci-dessus. D'après le lemme 2.3 a), pour voir que $\dim(q) = 8$, il suffit de montrer :

Proposition 3.1 *Avec les notations ci-dessus,* $e^3(q_{F(\varphi)}) \neq 0$.

Démonstration. D'après [15, 9.6], on a $q \perp -\varphi \in J_3(F) = I^3F$ (théorème 2.8). L'invariant d'Arason $e^3(q \perp -\varphi) \in H^3F$ est donc défini (th. 2.2), et évidemment $e^3(q \perp -\varphi)_{F(q)} = e^3(q_{F(\varphi)})$. D'après le théorème 2.4, si $e^3(q_{F(\varphi)}) = 0$ on a donc $e^3(q \perp -\varphi) = c(\varphi) \cdot (a)$ pour un $a \in F^*$ convenable.

Considérons $\rho = q \perp -a\varphi \sim q \perp -\varphi \perp \ll a \gg \otimes \varphi \in I^3F$. On a $e^3(\rho) = 0$ et $\rho_{F(q)} \sim q^{(2)} \perp (-a\varphi)_{F(q)} \in I^3F(q)$; comme $\dim(q^{(2)} \perp (-a\varphi)_{F(q)}) = 8$, cette forme ρ' est donc semblable à une 3-forme de Pfister (lemme 2.1). Mais $e^3(\rho) = 0 \Rightarrow e^3(\rho') = 0$, donc $\rho' \sim 0$ (th. 2.5). En d'autres termes, $q^{(2)} \cong (a\varphi)_{F(q)}$, c'est-à-dire que $q^{(2)}$ est défini sur F, ce qui contredit l'hypothèse que q est de type II.$\diamond$

3.3 Troisième démonstration du théorème 2.10 a)

Cette démonstration est plus compliquée que la précédente, mais elle donne des renseignements plus précis qui sont utilisés plus loin (th. 5.1).

Proposition 3.2 *Soit* $(I^2F)_\lambda = \{q \in I^2F \mid q \cong q_1 \otimes \ll a \gg$ pour a et q_1 convenables$\}$. *Il existe une fonction unique* $\tilde{e}^3 : (I^2F)_\lambda \longrightarrow H^3F$ *telle que :*

(i) $\tilde{e}^3(q_1 \otimes \ll a \gg) = c(q_1) \cdot (a)$;

(ii) $\tilde{e}^3|_{(I^2F)_\lambda \cap I^3F}$ *est l'invariant d'Arason* e^3.

Remarque. D'après [1, p. 490], il n'existe pas de fonction $I^2F \longrightarrow H^3F$ prolongeant e^3 et naturelle en F.

Démonstration. Il est agréable d'énoncer tout d'abord un lemme de caractère général :

Lemme 3.1 *Soient* q_1, q_2, φ_1, φ_2 *quatre formes quadratiques, où* $q_1, q_2 \in IF$ *et* φ_1, φ_2 *sont deux* n*-formes de Pfister. Supposons* $q_1 \otimes \varphi_1 \equiv q_2 \otimes \varphi_2 (mod\ J_{n+2}(F))$. *Alors* $\ll d_\pm q_1 \gg \otimes \varphi_1 \cong \ll d_\pm q_2 \gg \otimes \varphi_2$.

Démonstration. Supposons d'abord $\ll d_\pm q_1 \gg \otimes \varphi_1 \sim 0$. Alors $q_1 \otimes \varphi_1 \sim (q_1 \perp - \ll d_\pm q_1 \gg) \otimes \varphi_1 \in J_{n+2}(F)$. Par conséquent, $q_2 \otimes \varphi_2 \in J_{n+2}(F)$, et comme $(q_2 \perp - \ll d_\pm q_2 \gg) \otimes \varphi_2 \in J_{n+2}(F)$, on a $\ll d_\pm q_2 \gg \otimes \varphi_2 \in J_{n+2}(F)$. Donc $\ll d_\pm q_2 \gg \otimes \varphi_2 \sim 0$ par le lemme 2.1.

Supposons maintenant $\ll d_\pm q_1 \gg \otimes \varphi_1$ anisotrope. Soit $K = F(\ll d_\pm q_1 \gg \otimes \varphi_1)$. D'après ce qui précède, on a $(\ll d_\pm q_2 \gg \otimes \varphi_2)_K \sim 0$, donc $\ll d_\pm q_2 \gg \otimes \varphi_2 \cong 0$ ou $\ll d_\pm q_1 \gg \otimes \varphi_1$ [14, 4.4]. Mais le premier cas est impossible, comme on le voit en échangeant les rôles de (q_1, φ_1) et (q_2, φ_2).

Passons à la démonstration de la proposition 3.2. Comme $q \in I^3F$, $\dim(q_1)$ est paire (car $d_\pm q = a^{\dim(q_1)}$). On remarque que $c(q_1) = c(q_1 \perp - \ll d_\pm q_1 \gg)$, et que $q_1 \perp - \ll d_\pm q_1 \gg \in I^2F$; il en résulte que $c(q_1) \cdot (a) = e^3((q_1 \perp - \ll d_\pm q_1 \gg) \otimes \ll a \gg)$, où e^3 est l'invariant d'Arason.

Montrons que $\tilde{e}^3$ est bien défini. Supposons $q \cong q_1 \otimes \ll a \gg \cong q_2 \otimes \ll b \gg$. D'après le lemme 3.1, on a $\ll d_\pm q_1, a \gg \cong \ll d_\pm q_2, b \gg$. Il en résulte que $(q_1 \perp - \ll d_\pm q_1 \gg) \otimes \ll a \gg \cong (q_2 \perp - \ll d_\pm q_2 \gg) \otimes \ll b \gg$, d'où $c(q_1) \cdot (a) = c(q_2) \cdot (b)$.

Finalement, supposons que $q = q_1 \otimes \ll a \gg \in I^3F$. Alors $\ll d_\pm q_1, a \gg \sim 0$ (lemme 3.1), donc $q \sim (q_1 \perp - \ll d_\pm q_1 \gg) \otimes \ll a \gg$, d'où

$$e^3(q) = e^3((q_1 \perp - \ll d_\pm q_1 \gg) \otimes \ll a \gg) =: \tilde{e}^3(q). \diamond$$

Proposition 3.3 *Soient* $q, q' \in (I^2F)_\lambda$ *telles que* $c(q) = c(q')$ *et* $\tilde{e}^3(q) = \tilde{e}^3(q')$. *Alors* $q \equiv q' (\mathrm{mod}\ I^4F)$.

Démonstration. Ecrivons $q = q_1 \otimes \ll a \gg$ et $q' = q'_1 \otimes \ll a' \gg$. Alors :

a) $c(q) = (d_\pm q_1, a) = (d_\pm q'_1, a') \Rightarrow \ll d_\pm q_1, a \gg \cong \ll d_\pm q'_1, a' \gg$ (puisque $\ll x, y \gg$ est la forme norme réduite de l'algèbre de quaternions (x, y)) ;

b) $\tilde{e}^3(q) = e^3((q \perp - \ll d_\pm q \gg) \otimes \ll a \gg) = \tilde{e}^3(q') = e^3((q' \perp - \ll d_\pm q' \gg) \otimes \ll a' \gg) \Rightarrow (q \perp - \ll d_\pm q \gg) \otimes \ll a \gg \equiv (q' \perp - \ll d_\pm q' \gg) \otimes \ll a' \gg \pmod{I^4 F}$ (th. 2.3) ;

d'où finalement $q_1 \otimes \ll a \gg \equiv q'_1 \otimes \ll a' \gg \pmod{I^4 F}$.

Corollaire 3.1 *Soient $e\varphi$ et $e_1\varphi_1$ telles que $c(e\varphi) = c(e_1\varphi_1)$ et $\tilde{e}^3(e\varphi) = \tilde{e}^3(e_1\varphi_1)$, où φ, φ_1 sont des 2-formes de Pfister et $e, e_1 \in F^*$. Alors $e\varphi \cong e_1\varphi_1$.*

Démonstration. Cela résulte de la proposition précédente et du théorème d'Arason-Pfister [6].

Remarque. On peut aussi donner une démonstration plus élémentaire du corollaire 3.1, n'utilisant "que" le théorème 2.5 pour $n = 3$.

Fin de la démonstration du th 2.10 a). D'après le lemme 2.3 c), l'invariant $\tilde{e}^3(q)$ est défini. Comme au numéro précédent, il suffit de montrer que $\tilde{e}^3(q)_{F(\varphi)} \neq 0$. Par le même raisonnement, si $\tilde{e}^3(q)_{F(\varphi)} = 0$, on a $\tilde{e}^3(q) = c(\varphi) \cdot (a)$ pour un certain $a \in F^*$. On a alors $\tilde{e}^3(a\varphi) = \tilde{e}^3(q)$. Etendant les scalaires à $F(q)$, cela donne que $c(a\varphi_{F(q)}) = c(q^{(2)})$ et $\tilde{e}^3(a\varphi_{F(q)}) = \tilde{e}^3(q^{(2)})$. En appliquant le corollaire 3.1, on a $a\varphi_{F(q)} \cong q^{(2)}$, ce qui donne la même contradiction que dans les deux autres démonstrations.$\diamond$

3.4 Démonstration du théorème 2.11

Par hypothèse, $c(q)_{F(q)} = c(\varphi)$ est représenté par un corps de quaternions D sur $F(q)$. Comme φ n'est pas définie sur F, D ne l'est pas non plus ; il en résulte que l'indice de $C(q)$ est ≥ 4. D'autre part, comme $F(q)$ est le corps des fonctions d'une quadrique, on a nécessairement $\operatorname{ind} C(q) \leq 2 \operatorname{ind} C(q)_{F(q)}$, d'où finalement :

$$\operatorname{ind} C(q) = 4.$$

On écrit $C(q) = \mathbf{M}_r(E)$, $\deg(E) = 4$. Comme $E \otimes_F F(q)$ n'est pas un corps, E contient une image homomorphe de $C^+(q)$ [18], [26]. Donc $\dim E \geq \frac{1}{4} \dim C(q) = \frac{1}{4} r^2 \dim E$, c'est-à-dire $r \leq 2$ et $\deg C(q) \leq 8$, d'où $\dim(q) \leq 6$. Mais $q \in I^2 F$ et $\operatorname{ind} C(q) = 4 \Rightarrow \dim(q) = 6$.

4 Formes de hauteur 2 et de degré >2

4.1 Dimension des formes de type II

Comme indiqué à la fin du §2, la démonstration de Fitzgerald du théorème 2.10 a) ne se généralise pas *a priori* aux degrés supérieurs, car on ignore si le corps des fonctions d'une n-forme de Pfister est excellent pour $n \geq 3$ (et certains semblent en douter). Nous reviendrons sur cette question au §4.2.

Par contre, les deux démonstrations cohomologiques du §3 se généralisent. C'est ce qu'ont remarqué Hurrelbrink et Rehmann pour celle du §3.3 :

Théorème 4.1 ([11, 3.4]) *Toute forme anisotrope de hauteur* 2*, de type II et de degré* 3 *est de dimension* 16*.*

Leur méthode est de se réduire au cas où la forme en question q est divisible par une 2-forme de Pfister, en utilisant le lemme 2.3 b). Cela permet de définir un invariant $\tilde{e}^4(q) \in H^4F$ exactement comme dans la proposition 3.2. Le reste de la démonstration procède comme au §3.3, en utilisant le théorème 2.4 b) pour $(n,i) = (3,1)$, l'existence de e^4 et le théorème 2.5 pour $n \leq 4$ (*cf* remarque après le corollaire 3.1). Bien entendu, comme le remarquent Hurrelbrink et Rehmann, cette méthode vaut chaque fois qu'on connaît certaines des conjectures cohomologiques du §2.2. En fait, pour démontrer que toute forme anisotrope de hauteur 2, de type II et de degré r est de dimension 2^{r+1}, il suffit de connaître :

(i) la conjecture 4 pour $(n,i) = (r,1)$;
(ii) l'existence de e^n pour $n \leq r+1$;
(iii) la conjecture 5 pour $n \leq r+1$.

D'après [12], les propriétés (i) et (iii) impliquent d'ailleurs (ii). Le lecteur se convaincra que la démonstration du §3.2 se généralise de même, sans recourir au lemme 2.3 b) mais en ajoutant aux propriétés ci-dessus :

(iv) la conjecture 3 pour $n \leq r-1$.

(En effet, on doit utiliser l'égalité $I^{n+1}F = J_{n+1}(F)$, *cf* remarque suivant la démonstration du théorème 2.8.)

4.2 Divisibilité des formes de type II

Définition 4.1 *Soient K/F une extension et n un entier ≥ 1. On dit que K/F satisfait à la descente pour les n-formes de Pfister si la condition suivante est réalisée :*

Soit q une n-forme de Pfister anisotrope sur K, définie sur F. Alors il existe une n-forme de Pfister φ sur F telle que $q \cong \varphi_K$.

Lemme 4.1 *Pour que K/F satisfasse à la descente pour les n-formes de Pfister, il suffit que la condition suivante soit réalisée :*

Soit q une n-forme de Pfister anisotrope sur K, définie sur F. Alors il existe une forme φ sur F, semblable à une n-forme de Pfister, telle que $q \cong \varphi_K$.

En effet, deux formes de Pfister semblables sont isomorphes [16, exercice X.7].

Définition 4.2 *Une extension K/F est excellente si la condition suivante est réalisée :*
Pour toute forme quadratique q sur F, la partie anisotrope de q_K est définie sur F.

Exemples.

1. Une extension de degré impair, une extension quadratique, l'extension donnée par le corps des fonctions d'une conique sont excellentes [8], [2].

2. Soit q une forme anisotrope sur F. D'après [15, 7.13], si l'extension $F(q)/F$ est excellente, q est une voisine de Pfister.

Proposition 4.1 [8, 2.10]. *Si K/F est excellente, elle satisfait à la descente pour les n-formes de Pfister quel que soit $n \geq 1$.*

Proposition 4.2 *Soient $K = F(\tau)$, où τ est une forme anisotrope, et n un entier ≥ 1. Soit q une forme de dimension 2^n sur F, telle que q_K soit une forme de Pfister anisotrope.*
a) Si $2^{n+1} < \dim(\tau)$, q est une forme de Pfister.
b) Si $2^{n-1} < \dim(\tau)$, q est semblable à une forme de Pfister.
c) Supposons que $2^{n-1} = \dim(\tau)$ et que q ne soit pas semblable à une forme de Pfister. Alors q est de hauteur 2, de degré $n-1$ et de type II, et τ est semblable à la forme dominante de q.

Démonstration. Démontrons a). Soit $a \in D_F(q)$. Par hypothèse, $(\ll a \gg \otimes q)_K$ est hyperbolique. Si $\ll a \gg \otimes q$ n'est pas hyperbolique, sa partie anisotrope contient un multiple de τ par le théorème de Cassels-Pfister, donc $\dim(\tau) \leq 2\dim(q)$ ce qui est une contradiction. En faisant ce raisonnement sur $F(t_1, \ldots, t_N)$ ($N = \dim(q)$) avec $a = q(t_1, \ldots, t_N)$, on en conclut que q est une forme de Pfister (proposition 2.1 c)).

Démontrons b). Si $\deg(q) < \deg(q_K)$, alors d'après [14, 6.11] τ_{F_h} est semblable à une sous-forme de $q^{(h)}$, d'où $\dim(\tau) \leq 2^{\deg(q)} \leq 2^{n-1}$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $\deg(q) = \deg(q_K) = n$. Comme $\dim(q) = 2^n$, le lemme 2.1 implique que q est semblable à une forme de Pfister.

Finalement, démontrons c). Comme en b), τ_{F_h} est semblable à une sous-forme de $q^{(h)}$, donc semblable à $q^{(h)}$. La forme dominante de q est donc définie sur F, $\deg(q) = n-1$ et τ est semblable à une forme de Pfister [15, 9.2]. Remarquons que $q_{F_2(\tau)} = q_{K(q_K)} \sim 0$, donc que $q^{(2)} \cong \sigma \otimes \tau$ pour un σ convenable. On a $\dim(\sigma) \cdot 2^{n-1} < \dim(q) = 2^n$, donc

$\dim(\sigma) < 2$; comme q n'est pas semblable à une forme de Pfister, on a $q^{(2)} \neq 0$ d'où $\dim(\sigma) = 1$ et $h(q) = 2$. Finalement, q n'est pas excellente puisque $\dim(q)$ n'est pas de la forme $2^{n-1}(2^a - 1)$, donc q est de type II.$\diamond$

On remarquera que la conjecture suivante suffirait à rendre la démonstration de Fitzgerald du §3.1 valable en tout degré :

Conjecture 8 *Pour toute forme de Pfister φ, l'extension $F(\varphi)/F$ satisfait à la descente pour les formes de Pfister.*

Nous allons voir qu'une version affaiblie de la conjecture 8 entraîne que le lemme de Knebusch 2.3 b) est "déjà vrai sur F". On a même mieux :

Théorème 4.2 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) Pour toute n-forme de Pfister φ, l'extension $F(\varphi)/F$ satisfait à la descente pour les $(n+1)$-formes de Pfister.
(ii) Toute forme de hauteur 2, de type II, de degré n et de dimension 2^{n+1} est divisible par une $(n-1)$-forme de Pfister.

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$ (i) : Soient φ une n-forme de Pfister et q une forme de dimension 2^{n+1} telle que $q_{F(\varphi)}$ soit une forme de Pfister anisotrope. D'après la proposition 4.2, si q n'est pas semblable à une forme de Pfister, elle est de hauteur 2, de degré n et de type II, de forme dominante φ. En appliquant (ii), q est divisible par une $(n-1)$-forme de Pfister τ. D'après [15, p. 29], τ divise φ. Ecrivons $q = \tau \otimes q_1$ et $\varphi = \tau \otimes \varphi_1$, avec $\dim(q_1) = 4$ et $\dim(\varphi_1) = 2$. D'après [15, 9.6], $q \equiv \varphi (\mathrm{mod}\ J_n(F))$. Pour un $a \in F^*$ convenable, $q_1 \perp a\varphi_1$ est isotrope, donc $q_1 \perp a\varphi_1 \sim q'$ avec $\dim(q') = 4$. Alors $q \perp a\varphi \in J_{n+1}(F)$ et $q \perp a\varphi \sim \tau \otimes q'$, qui est de dimension 2^{n+1}. D'après le lemme 2.1, $\tau \otimes q'$ est semblable à une forme de Pfister, et $(\tau \otimes q')_{F(\varphi)} \cong q_{F(\varphi)}$.

Pour démontrer (i) $\Rightarrow$ (ii), on va utiliser plusieurs fois les deux lemmes classiques suivants :

Lemme 4.2 [7, 1.4] *Soient φ une forme de Pfister et q une forme quadratique. Supposons $\varphi \otimes q$ isotrope. Alors il existe q', isotrope, telle que $\varphi \otimes q \cong \varphi \otimes q'$. En particulier, la partie anisotrope de $\varphi \otimes q$ est de la forme $\varphi \otimes q''$.*$\diamond$

Lemme 4.3 [7, 4.5] *Soient φ, ρ deux formes de Pfister et $a, b \in F^*$. Notons r le degré maximum d'une forme de Pfister divisant à la fois φ et ρ (linkage number dans la terminologie d'Elman-Lam). Alors on a $i(a\varphi \perp b\rho) = 0$ ou 2^r.*$\diamond$

Remarque. Elman et Lam n'énoncent ce lemme que quand φ et ρ ont même degré, mais il est clair que leur démonstration vaut en général. Nous aurons besoin du lemme 4.3 lorsque φ et ρ sont de degrés différents.

Soit q vérifiant les hypothèses du théorème 4.2 (ii). On peut supposer que q représente 1. En appliquant le lemme 2.3 a), [14, 4.4] et la condition (i) du théorème 4.2, on dispose donc (comme au §3) d'une $(n+1)$-forme de Pfister ρ et d'une forme q_1 telles que l'on ait

$$q \perp -\rho \sim \varphi \otimes q_1.$$

On peut supposer $\varphi \otimes q_1$ anisotrope (lemme 4.2). Puisque par hypothèse q représente 1, on a :

$$2^n \dim(q_1) = \dim(\varphi \otimes q_1) < \dim(q) + \dim(\rho) = 2^{n+2},$$

d'où

$$\dim(q_1) < 4.$$

La dimension de q_1 est impaire, sans quoi on aurait $q \in I^{n+1}F$. Supposons $\dim(q_1) = 1$. Alors on a $q \sim \rho \perp a\varphi$, avec $< a >= q_1$, donc

$$i(\rho \perp a\varphi) \geq \frac{1}{2}(\dim(\rho) + \dim(\varphi) - \dim(q)) = 2^{n-1}.$$

Par le lemme 4.3, on en déduit que ρ et φ sont "$(n-1)$-liées", c'est-à-dire que φ et ρ sont divisibles par une même $(n-1)$-forme de Pfister τ. Alors τ divise q, ce que l'on veut.

Supposons maintenant $\dim(q_1) = 3$. Soit $d = d_{\pm} q_1$; alors $q_1 \perp < d > \cong a\theta$, où θ est une 2-forme de Pfister. On a :

$$q \perp -d\varphi \sim \rho \perp a\varphi \otimes \theta.$$

Si $\varphi \otimes \theta$ est isotrope, elle est hyperbolique et on est ramené au cas précédent. Supposons $\varphi \otimes \theta$ anisotrope. On a :

$$i(\rho \perp a\varphi \otimes \theta) \geq \frac{1}{2}(\dim(\rho) + \dim(\varphi \otimes \theta) - \dim(q) - \dim(\varphi)) = 2^{n+1} - 2^{n-1},$$

d'où $i(\rho \perp a\varphi \otimes \theta) \geq 2^{n+1}$ puisque cet indice est nécessairement une puissance de 2 (lemme 4.3). Comme ci-dessus, cela implique que ρ et $\varphi \otimes \theta$ sont $(n+1)$-liées, c'est-à-dire que ρ *divise* $\varphi \otimes \theta$.

Ecrivons $\varphi \otimes \theta \cong \ll b \gg \otimes \rho$, d'où

$$q \perp -d\varphi \sim < a, -ab, 1 > \otimes \rho.$$

Comme $\dim(q \perp d\varphi) < 2\dim(\rho)$, on a $< a, -ab, 1 > \otimes \rho \sim c\rho$ pour un c convenable (lemme 4.2). Alors :

$$q \sim d\varphi \perp c\rho,$$

d'où $i(d\varphi \perp c\rho) \geq \frac{1}{2}(\dim(\varphi) + \dim(\rho) - \dim(q)) = 2^{n-1}$, ce qui implique à nouveau que ρ et φ sont $(n-1)$-liées.$\diamond$

Théorème 4.3 (Rost [23]) *Les conditions du théorème 4.2 sont vraies pour $n = 3$.*

En tenant compte du théorème 4.1, cela démontre le théorème 2.12.

En général, le théorème 4.2 est étroitement lié à la conjecture suivante :

Conjecture 9 *Si $q \in J_n(F)$ est anisotrope,* $\dim(q) > 2^n \Rightarrow \dim(q) \geq 2^n + 2^{n-1}$.

Cette conjecture est vraie pour $n \leq 3$: pour $n = 1, 2$ c'est trivial et pour $n = 3$ cela résulte par exemple de la démonstration de [24, ch. 2, 14.4].

Proposition 4.3 *a) La conjecture 9 est vraie en degré n si et seulement si elle est vraie pour les formes de hauteur 2, de degré n et de type III. En particulier, la conjecture 7 b) entraîne la conjecture 9.*

b) Si la conjecture 9 est vraie en degré $n+1$, alors les conditions équivalentes du théorème 4.2 sont vraies en degré n.

Démonstration. a) Il est clair que la conjecture 9 est vraie si et seulement si elle l'est pour les formes de hauteur 2. Soit q de hauteur 2 et de degré n. Si q est de type I, on a $\dim(q) = 2^n(2^k - 1)$ pour un $k > 1$ convenable (lemme 2.2), donc $\dim(q) \geq 3 \cdot 2^n$. Si q est de type II, on a $\dim(q) \geq 2^{n+1}$ (lemme 2.3 a)). Enfin, si q est de type III et que la conjecture 7 b) est vraie, alors $\dim(q) = 2^n + 2^{n-1}$.

b) Soient q de hauteur 2, de degré n et de type II, et φ sa forme dominante. On peut supposer que q représente 1. Soit α la partie anisotrope de $q \perp -\varphi$. On a $\dim(\alpha) < 2^{n+1} + 2^n$ et, d'après [15, 9.6], $\alpha \in J_{n+1}(F)$. Par hypothèse, $\dim(\alpha) \leq 2^{n+1}$. On ne peut pas avoir $\alpha = 0$ sans quoi q serait isotrope, donc $\dim(\alpha) = 2^{n+1}$ (lemme 2.1). D'après [15, 10.5], cela implique que q est divisible par une $(n-1)$-forme de Pfister.

5 Caractérisation cohomologique

5.1 Cas des formes excellentes

La proposition suivante précise [15, 7.16] :

Proposition 5.1 *Soit q une forme anisotrope excellente de dimension paire. Il existe une suite unique $(\varphi_1, \ldots, \varphi_h)$ de formes de Pfister et un scalaire $a \in F^*$ tels que :*

a) pour tout i, φ_i divise φ_{i-1} ;

b) aq est une sous-forme de φ_1 ;
c) dans $W(F)$, on a l'égalité $q = a(\varphi_1 - \varphi_2 + \cdots + (-1)^{h-1}\varphi_h)$.
On a $h(q) = h$, et φ_h est la forme dominante de q. De plus,
d) $G_F(q) = G_F(\varphi_h) = D_F(\varphi_h)$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $h(q)$. Si $h(q) = 1$, q est semblable à une forme de Pfister (théorème 2.6) et l'énoncé est trivial. Supposons $h(q) > 1$. D'après le théorème 2.1, q est voisine d'une forme de Pfister φ_1, uniquement déterminée d'après la proposition 2.2. De plus, la forme complémentaire q' de q est excellente, donc voisine d'une forme de Pfister φ_2.

Soit $E = F(\varphi_2)$. Comme q' est voisine de φ_2, q'_E est isotrope, donc $(\varphi_1)_E \sim 0$ et φ_2 divise φ_1 d'après [14, 4.4].

On a $h(q') = h(q) - 1$ [15, 7.9]. Par récurrence sur $h(q)$, il existe une suite unique $(\varphi_2, \ldots, \varphi_h)$ de formes de Pfister et un scalaire $b \in F^*$ tels que bq' soit une sous-forme de φ_2, φ_i divise φ_{i-1} pour tout i et $q' = b(\varphi_2 - \varphi_3 + \cdots + (-1)^h\varphi_h)$ dans $W(F)$. De plus, $h(q') = h - 1$, donc $h(q) = h$, et φ_h est la forme dominante de q', donc de q.

Soit $c \in F^*$ tel que $cq \perp q' \cong \varphi_1$. On remarque que $bD_F(q') \subset D_F(\varphi_2) \subset D_F(\varphi_1)$ et que $D_F(q') \subset D_F(\varphi_1)$, donc que $b \in D_F(\varphi_1)$. Par conséquent,

$$bcq \perp bq' \cong b\varphi_1 \cong \varphi_1.$$

On en conclut que $aq = \varphi_1 - \varphi_2 + \cdots + (-1)^{h-1}\varphi_h$ dans $W(F)$, avec $a = bc$, où aq est une sous-forme de φ_1.

Il reste à démontrer d) ; cela résulte du fait que φ_h divise q (a) et c)) et du lemme général suivant :

Lemme 5.1 *Soient φ, ρ deux formes quadratiques, avec* $\dim(\rho)$ *impaire. Alors $G_F(\varphi \otimes \rho) = G_F(\varphi)$.*

Démonstration. L'inclusion $\supset$ est évidente. Soit $a \in G_F(\varphi \otimes \rho)$. Alors $0 \sim \ll a \gg \otimes(\varphi \otimes \rho) = (\ll a \gg \otimes\varphi) \otimes \rho$. Comme $\dim(\rho)$ est impaire, cela implique $\ll a \gg \otimes\varphi \sim 0$ [16, VIII.6.7], c'est-à-dire $a \in G_F(\varphi)$.

Remarque. On a un résultat identique à la proposition 5.1 pour une forme excellente q de dimension impaire, avec $\varphi_h = 1$. Toutefois, dans ce cas, $h(q) = h - 1$ et la forme dominante de q est φ_{h-1}, selon les conventions de [14].

Corollaire 5.1 *Soit n un entier > 0 pair. Soit $(d_1, \ldots, d_h)$ l'unique suite d'entiers telle que $n = 2^{d_1} - 2^{d_2} + \cdots + (-1)^h 2^{d_h}$ (cf* [10, 2.6]*). Soit*

$$\begin{aligned}\mathrm{Exc}(n) = \quad & \{([\varphi_1], \ldots, [\varphi_h], [\psi_1], \ldots, [\psi_h]) \mid \\ & \text{- les } \varphi_i \text{et les } \psi_i \text{sont des formes de Pfister ;} \\ & \text{- les } \varphi_i \text{sont anisotropes;} \\ & \text{- } \deg \varphi_i = d_i, \deg \psi_i = d_i + 1; \text{pour tout } i, \varphi_i \text{divise } \varphi_{i-1}; \\ & \text{- il existe } a \in F^* \text{tel que } \psi_i \cong \ll a \gg \otimes \varphi_i \text{pour tout } i.\}\end{aligned}$$

Alors il existe une bijection naturelle entre $\mathrm{Exc}(n)$ *et l'ensemble des classes d'isomorphisme de F-formes excellentes anisotropes de dimension n. De même, soit*

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Exc}}(n) = \{([\varphi_1], \ldots, [\varphi_h]) \mid \quad & \text{les } \varphi_i \text{sont des formes de Pfister anisotropes ;} \\ & \deg \varphi_i = d_i; \text{pour tout } i, \varphi_i \text{divise } \varphi_{i-1}.\}\end{aligned}$$

Alors il existe une bijection naturelle entre $\overline{\mathrm{Exc}}(n)$ *et l'ensemble des classes de similitude de F-formes excellentes anisotropes de dimension n.*

Dans cet énoncé, on note $[\varphi]$ la classe dans $I^d F / I^{d+1} F$ d'une d-forme de Pfister φ.

Démonstration. Soit q une forme anisotrope excellente de dimension n. Avec les notations de la proposition 5.1, associons à q l'élément $Exc(q) = ([\varphi_1], \ldots, [\varphi_h], [\ll a \gg \otimes \varphi_1], \ldots, [\ll a \gg \otimes \varphi_h]) \in \mathrm{Exc}(n)$. La partie d) de la proposition implique que $Exc(q)$ ne dépend que de q. En remarquant qu'une d-forme de Pfister est déterminée à isomorphisme près par sa classe dans $I^d F / I^{d+1} F$, on voit que $Exc(q) = Exc(q') \Leftrightarrow q \cong q'$. Enfin, à $([\varphi_1], \ldots, [\varphi_h], [\psi_1], \ldots, [\psi_h]) \in \mathrm{Exc}(n)$, associons l'unique forme anisotrope q telle que $q = a(\varphi_1 - \varphi_2 + \cdots + (-1)^{h-1} \varphi_h) \in W(F)$, où a est tel que $\psi_i = \ll a \gg \otimes \varphi_i$ pour tout i. Par récurrence sur h, la forme anisotrope q' de classe $\varphi_2 - \cdots + (-1)^h \varphi_h$ est excellente de dimension $2^{d_2} - \cdots + (-1)^{h-1} 2^{d_h}$. Comme φ_2 divise φ_1, c'est une sous-forme de φ_1, donc q' est une sous-forme de φ_1 ; on a donc $aq \perp q' \cong \varphi_1$ et q est excellente de dimension n. Le cas de $\overline{\mathrm{Exc}}(n)$ est semblable et plus simple.

Le corollaire 5.1 montre que, modulo la conjecture 5, les formes excellentes anisotropes de dimension donnée sont paramétrées à similitude (et même à isomorphisme) près par des familles de symboles de $H^* F$ satisfaisant à des relations simples. On va voir que des résultats analogues existent pour les (autres) formes de hauteur 2, au moins si leur degré est ≤ 2.

5.2 Formes de hauteur 2

Théorème 5.1 *a) Soient q et q' deux formes anisotropes de hauteur 2, de degré n et de type II représentant 1, avec $n \leq 3$. Alors $q \cong q'$ si et seulement si $e^n(q) = e^n(q')$ et $\tilde{e}^{n+1}(q) = \tilde{e}^{n+1}(q')$. Réciproquement, pour tout $(\alpha, \beta) \in H^n F \times H^{n+1} F$, où α et β sont*

deux symboles ayant un diviseur commun de degré $n-1$, il existe une telle forme q telle que $e^n(q) = \alpha$ et $\tilde{e}^{n+1}(q) = \beta$.

b) Soient q et q' deux formes anisotropes de hauteur 2, de degré 2 et de type III. Alors q est semblable à q' si et seulement si $c(q) = c(q')$. Réciproquement, pour tout $\alpha \in H^2F$, somme de deux symboles non liés, il existe une telle forme q telle que $c(q) = \alpha$.

Démonstration. Démontrons a). D'après un analogue de la proposition 3.3, on a $q \equiv q'(\text{mod } I^{n+2}F)$. Comme q et q' représentent 1, la partie anisotrope de $q \perp -q'$ est de dimension $< 2^{n+2}$, donc $q \cong q'$ d'après [6]. Réciproquement, soient $\alpha = (a_1, \ldots, a_{n-1}, d), \beta = (a_1, \ldots, a_{n-1}, b, c)$ comme dans l'énoncé. Alors la forme $q = \ll a_1, \ldots, a_{n-1} \gg \otimes < 1, -bd, -cd, bcd >$ convient.

Quant à b), il résulte du théorème 2.11 et du fait que les formes d'Albert sont caractérisées à similitude près par leur invariant de Clifford [13, 3.12].

Remarque. Evidemment, le théorème ci-dessus se généralise à tout degré si la conjecture 7 est vraie, ainsi que les conjectures cohomologiques du §2.2. (Pour b), il faut prendre les sommes de deux symboles de degré n, $(n-2)$-liés mais non $(n-1)$-liés.)

Références bibliographiques

[1] J.Kr. Arason *Cohomologische Invarianten quadratischer Formen*, J. Alg. **36** (1975), 448–491.

[2] J.Kr. Arason *Excellence of $F(\varphi)/F$ for 2-fold Pfister forms*, Appendice II de [8].

[3] J.Kr. Arason *A proof of Merkurjev's theorem*, Can. Math. Soc. Conf. Proc. **4** (1984), 121–130.

[4] J.Kr. Arason, R. Elman et W. Jacob *The graded Witt ring and Galois cohomology, II*, Trans. Amer. Math. Soc. **314** (1989), 745–780.

[5] J.Kr. Arason et M. Knebusch *Über die Grade quadratischer Formen*, Math. Ann. **234** (1978), 167–192.

[6] J.Kr. Arason et A. Pfister *Beweis des Krull'schen Durchschnittsatzes für den Wittring*, Invent. Math. **12** (1971), 173–176.

[7] R. Elman et T.Y. Lam *Pfister forms and K-theory of fields*, J. Alg. **23** (1972), 181–213.

[8] R. Elman, T.Y. Lam et A. Wadsworth *Amenable fields and Pfister extensions*, Conf. Quadratic Forms 1976 (G. Orzech, ed.), Queen's papers on Pure and Appl. Math. **46** (1977), Queen's Univ., Kingston, Ont., 445–492.

[9] R.W. Fitzgerald *Quadratic forms of height two*, Trans. Amer. Math. Soc. **283** (1984), 339–351.

[10] J. Hurrelbrink et U. Rehmann *Splitting patterns of excellent quadratic forms*, J. reine angew. Mathematik **444** (1993), 183–192.

[11] J. Hurrelbrink et U. Rehmann *Splitting patterns of quadratic forms*, préprint, Bielefeld, 1993.

[12] W. Jacob et M. Rost *Degree four cohomological invariants for quadratic forms*, Invent. Math. **96** (1989), 551–570.

[13] N. Jacobson *Some applications of Jordan norms to involutorial associative algebras*, Adv. in Math. **48** (1983), 1–15.

[14] M. Knebusch *Generic splitting of quadratic forms, I*, Proc. London Math. Soc. **33** (1976), 65–93.

[15] M. Knebusch *Generic splitting of quadratic forms, II*, Proc. London Math. Soc. **34** (1977), 1–31.

[16] T.Y. Lam The algebraic theory of quadratic forms (2ème édition), Benjamin, New York, 1980.

[17] A.S. Merkurjev *L'homomorphisme de résidu normique de degré* 2 (en russe), Dokl. Akad. Nauk SSSR **261** (1981), 542–547. Traduction anglaise : Soviet Math. Doklady **24** (1981), 546–551.

[18] A.S. Merkurjev *Algèbres simples et formes quadratiques* (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR **55** (1991), 218–224. Traduction anglaise : Math. USSR Izv. **38** (1992), 215–221.

[19] A.S. Merkurjev et A.A. Suslin *L'homomorphisme de résidu normique de degré* 3 (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR **54** (1990), 339–356. Traduction anglaise : Math. USSR Izv. **36** (1991), 349–368.

[20] J.W. Milnor *Algebraic K-theory and quadratic forms*, Invent. Math. **9** (1969/70), 318–344.

[21] M. Rost *Hilbert's theorem 90 for K_3^M for degree-two extensions*, préprint, Regensburg, 1986.

[22] M. Rost *On quadratic forms isotropic over the function field of a conic*, Math. Ann. **288** (1990), 511-513.

[23] M. Rost Message électronique du 10-1-1994.

[24] W. Scharlau Quadratic and hermitian forms, Springer, Berlin, 1986.

[25] M. Szyjewski *Le cinquième invariant des formes quadratiques* (en russe), Algebra Anal. **2** (1990), 213–234. Traduction anglaise : Leningrad Math. J. **2** (1991), 179–198.

[26] J.-P. Tignol *Réduction de l'indice d'une algèbre centrale simple sur le corps des fonctions d'une quadrique*, Bull. Soc. Math. Belgique **42** (1990), 735–745.

[27] A. Wadsworth *Noetherian pairs and function fields of quadratic forms*, thèse, Univ. Chicago, 1972.

Université de Paris 7
UFR de Mathématiques
Case postale 7012
2, Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05
France
e-mail : kahn@mathp7.jussieu.fr