Voronoizellen und isodrome Verschiebungen eines Gitters

Thomas Bier
Twiskenweg 43 B
26129 Oldenburg i.O.

14. April 1994

Zusammenfassung

In dieser Arbeit betrachten wir die $k-$ten iterierten Voronoischen Zellen eines Gitters, welche definiert sind als die Menge aller Raumpunkte die den Ursprung als mindestens $k-$ten Gitternachbarn besitzen. Insbesondere untersuchen wir, wann die $k-$ten iterierten Voronoizellen die ersten Voronoizellen eines Untergitters sein können. Ein solches Untergitter wird dann ein Brillouin-Untergitter genannt. Für die Klassifikation der Brillouin-Untergitter ist es erforderlich, den Begriff der isodromen Verschiebung eines Gitters einzuführen. Darunter versteht man eine Verschiebung des Gitters von sich selbst in einer solchen Weise, daß die Voronoizone um den Ursprung relativ zu den verschobenen Gitterpunkten noch ganz in der Voronoizone des gegebenen Gitters enthalten bleibt. Für das gegebene Gitter ist dann die Menge aller isodromen Verschiebungen der isodrome Ort des Gitters. In dieser Arbeit bestimmen wir den isodromen Ort der ebenen Gitter. Weiter zeigen wir, daß der isodrome Ort eines Gitters vom Rang ≤ 3 diskret ist. Daraus erhalten wir die vollständige Klassifikation der ebenen Brillouin-Untergitter. Es stellt sich heraus, daß für den Quotienten eines ebenen Gitters modulo einem Brillouin-Untergitter nur beliebige zyklische Gruppen sowie die elementarabelschen Gruppen der Ordnung 4 oder 9 vorkommen.

1 Die Voronoizonen einer Punktmenge

1. Sei $L \subset R^d$ eine beliebige diskrete Punktmenge; und sei $x \in R^d$ ein fest gewählter Punkt. Für $v = (v_1, ..., v_d) \in R^d$ sei $\|v\| =< v, v >= v_1^2 + ... + v_d^2$ die übliche Quadratnorm in R^d. Wir definieren die *erste Voronoizelle von* L als

$$VP(x, L) = \{v \in R^d \mid \|v - x\| \leq \|v - y\| \quad \forall y \in L, y \neq x\} \tag{1}$$

Weil L diskret ist, ist $VP(x, L)$ ein (möglicherweise nichtbeschränkter) Durchschnitt abgeschlossener Halbräume in R^d. Es gilt offenbar

$$M \subseteq L \Longrightarrow VP(x, M) \supseteq VP(x, L). \tag{2}$$

Wir sagen, der Punkt $y \in L$ *sei wesentlich für* $VP(x, L)$, falls in (2) für $M = L - \{y\}$ keine Gleichheit steht. Es gilt also in (2) die Gleichheit zwischen den Voronoizellen genau dann wenn kein Punkt von $L - M$ wesentlich für $VP(x, M) = VP(x, L)$ ist. Wir sagen weiterhin, der Punkt $y \in L$ *liege über einer Seite von* $VP(x, L)$, falls $\frac{1}{2}(x + y) \in VP(x, L)$ ist. Der Punkt $\frac{1}{2}(x + y)$ liegt dann notwendigerweise auf dem Rand von $VP(x, L)$. Falls die größte Seite, auf welcher dieser Punkt liegt, die lineare Dimension e hat, wollen wir auch sagen, der Punkt y liege über einer $e-$Seite.
Es gibt Punktmengen L, in denen wesentliche Punkte über keiner Seite liegen, und in denen umgekehrt Punkte über einer Seite liegen, die nicht wesentlich sind.

2. Sei nun ein Punkt $v \in R^d$ gegeben. Die Menge der Punkte von L kann dann mit einer vollständigen Ordnung versehen werden, die eine Vervollständigung der Abstandsteilordnung ist. Man kann also

$$L = \{y_1, y_2, ..., y_m, y_{m+1}, ...\} \tag{3}$$

so setzen, daß gilt

$$\|v - y_1\| \leq \|v - y_2\| \leq ... \leq \|v - y_m\| \leq \|v - y_{m+1}\| \leq ... \tag{4}$$

Wir werden dann sagen, $y_m \in L$ sei *einer der m-ten L-Nachbarn von v.* Dabei kann es im Falle gewisser Gleichheiten in (4) mehrere $m-$te $L-$Nachbarn von v geben. Falls $v = x \in L$ ist, so setzen wir

$$B_m(x, L) = \{w \in R^d \mid x \text{ ist ein } (m+1)\text{-ter } L\text{-Nachbar von } w\} \tag{5}$$

$$VP_m(x, L) = \bigcup_{k=1}^{m} B_k(x, L) \tag{6}$$

und nennen $B_m(x,L)$ die *m-te Brillouinzone von L um x* und $VP_m(x,L)$ die *m-te Voronoizone von L um x .*
Offenbar ist insbesondere für $x \in L$ $VP(x,L) = B_1(x,L) = VP_1(x,L)$. Es gelten die folgenden Rechenregeln (mit $w \in R^d$ und $x \in L$):

$$w + B_m(x,L) = B_m(w+x, w+L) \tag{7}$$

$$w + VP_m(x,L) = VP_m(w+x, w+L) \tag{8}$$

3. Wir wollen sagen, der Punkt $v \in R^d$ sei in $m-$allgemeiner Lage (bezüglich L) falls in der Kette von Ungleichungen (4) die ersten m Ungleichungen strikt sind. Die Punkte in $VP(x,L)$ in $1-$allgemeiner Lage bilden also gerade das offenen Innere von $VP(x,L)$. Es ist leicht zu sehen, daß die Punkte von $VP_m(x,L)$ in $m-$allgemeiner Lage in der Menge $VP_m(x,L)$ dicht liegen.

2 Voronoizonen in Gittern

1. Sei jetzt M ein Gitter in R^d. Dann kann die Menge der wesentlichen Vektoren der Voronoizelle nach einem Satz von Voronoi [2] wie folgt bestimmt werden :
Der Vektor $y \in M - \{0\}$ ist wesentlich für $VP(0,M)$ genau dann wenn y und -y in der Nebenklasse $y + 2M \subset M$ die einzigen Vektoren kürzester Länge sind.
Außerdem kann man die Menge der Vektoren, die über einer Seite von $VP(0,M)$ liegen, wie folgt bestimmen:
Der Vektor $y \in M - \{0\}$ liegt über einer Seite von $VP(0,M)$ genau dann wenn y in der Nebenklasse $y + 2M \subset M$ einer der Vektoren kürzester Länge ist.
Die Dimension e der größten Seite von $VP(0,M)$, über welcher der Punkt y liegt, ist dann durch die folgende Formel gegeben:

$$e = d - \dim LinSpan\{\ z \in M \mid \|z\| = \|y\|\ ,\ y - z \in 2M\ \} \tag{9}$$

Falls insbesondere $y \in M - \{0\}$ wesentlich für $VP(0,M)$ ist, so liegt y über einer $(d-1)$-Seite von $VP(0,M)$.

2. Nun betrachten wir eine (nichttriviale) Nebenklasse $x + M$ von M mit $x \in R^d$. Dann folgt aus dem Vorhergehenden:

Falls es zwei Vektoren $y_1, y_2 \in x + 2M$ gibt mit $\|y_1\| < \|y_2\|$ so liegt $\frac{y_2}{2}$ außerhalb von $VP(0, M)$.

$$y_1, y_2 \in x + M \ , \quad \|y_1\| < \|y_2\| \implies \frac{y_2}{2} \notin VP(0, M) \tag{10}$$

In der Tat ist ja für $y_2 = y_1 + 2m$ der Abstand von $\frac{1}{2}y_2$ zum Punkt $m \in M$ geringer als der Abstand zum Ursprung 0.
Falls es zwei Vektoren $y_1, y_2 \in x + 2M$ gleicher Länge $\|y_1\| = \|y_2\|$ gibt, so liegen $\frac{y_1}{2}$ und $\frac{y_2}{2}$ nicht im Inneren von $VP(0, M)$.

$$y_i \in x + 2M \ , \quad \|y_1\| = \|y_2\| \ , \quad \implies \quad \frac{y_i}{2} \notin Inn(\ VP(0, M)\ ) \tag{11}$$

In der Tat ist ja $y_1 - y_2 = 2m$ mit $m \in M$ und somit hat etwa $\frac{y_1}{2}$ den gleichen Abstand von m und 0.

3. Es ist aber nicht richtig, daß ein Analogon des obigen Satzes von Voronoi auch für Voronoizonen von beliebigen Nebenklassen $VP(0, x + M)$ gilt. Es können Vektoren $y \in x + M$ wesentlich für $VP(0, x + M)$ sein, auch wenn $\|y\| > \|y + 2m\|$ ist. Vergleiche allerdings dazu Satz 3 .

3 Brillouin-Untergitter

1. Sei nun $L \subseteq R^d$ ein Gitter. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir dann wegen (8) annehmen, daß der Punkt $x \in L$ der Ursprung $x = 0$ ist. Ein Untergitter $M \subset L$ maximalen Ranges heißt ein *Brillouin-Untergitter* falls die Gleichung

$$VP_m(0, L) = VP_1(0, M) \tag{12}$$

gilt. Dann ist $m = [L : M]$ der Index von M in L.
2. Seien $M_1, M_2, ..., M_m$ alle Nebenklassen von M in L. Für $x \in M_i$ gilt für die Menge der Polyeder $VP_1(x + m, M_i)$:

$$\{VP_1(x + m, M_i)\}_{m \in M} \quad \text{ist eine Pflasterung von } R^d \tag{13}$$

Satz 1 *Falls $M \subseteq L$ ein Brillouin-Untergitter ist, so gilt für jede Nebenklasse $M_i = x + M$ von M in L (mit $x \in L$)*

$$VP(0, M_i) \subseteq VP(0, M) \tag{14}$$

Beweis: Sei $p \in VP_m(0, L)$ ein beliebiger Punkt. Dann gibt es für jeden Index i mit $1 \leq i \leq m$ wegen (13) ein $y_i \in M_i$ mit der Eigenschaft

$$p \in VP(y_i, M_i) = VP(y_i, L).$$

Also ist der Punkt y_i unter den ersten m $L-$Nachbarn von p. Unter den geeignet gewählten m nächsten $L-$Nachbarn von p befindet sich also in jeder Nebenklasse mindestens einer. Für die Punkte p_0 im Rand von $VP_m(0, L)$ ist aber insbesondere der Ursprung $0 \in L$ ein $m-$ter $L-$Nachbar von p_0. Also gilt für einen solchen Randpunkt

$$\|p_0 - y_i\| \leq \|p_0 - 0\| = \|p_0\| \qquad 1 \leq i \leq (m-1). \tag{15}$$

Wir führen nun den Beweis des Satzes durch Widerspruch. Wir nehmen also an, es gäbe einen Punkt $q \in VP(0, M_i)$ mit $q \notin VP(0, M)$. Dann gibt es auch einen Punkt q' im topologischen Inneren von $VP_1(0, M_i)$ mit der Eigenschaft $q' \notin VP_1(0, M)$. Die Gerade durch den Ursprung 0 und den Punkt q' verläuft dann ganz im Inneren von $VP(0, M_i)$ und schneidet den Rand von $VP(0, M)$ in einem Punkt q_0 für welchen gilt:

$$\{q_0\} = [0, q'] \cap Rd(\ VP(0, M)\ ).$$

Wegen (15) und der definierenden Eigenschaft von $VP(0, M_i)$ folgt dann der Widerspruch

$$\|q_0 - y_i\| \leq \|q_0\| < \|q_0 - y_i\|. \quad \Box$$

3. Der Satz 1 legt dann die folgende Definition nahe.

Für ein gegebenes Gitter $M \subset R^d$ ist der *isodrome Ort* $IDL(M)$ definiert als die Menge aller Punkte des R^d mit der Eigenschaft $VP(0, x + M) \subseteq VP(0, M)$:

$$IDL(M) = \{x \in R^d \mid VP(0, x + M) \subseteq VP(0, M)\ \} \tag{16}$$

Wir nennen $x \in IDL(M)$ dann auch eine isodrome Verschiebung von M. Dann kann der Satz 1 auch so formuliert werden:

Satz 1′ *Ein Gitter $L \supseteq M$ enthält M als Brillouin-Untergitter genau dann wenn $L \subseteq IDL(M)$ ist.*

Als direkte Folgerung ergibt sich dann die Existenz einer Pflasterung mit zwei verschiedenen Typen von Pflastersteinen:

Satz 2 *Es gilt für* $x \in IDL(M)$

$$VP(0, x+M) = VP(0, M \cup (x+M)) \tag{17}$$
$$VP(x, M) = VP(x, M \cup (x+M)) \tag{18}$$

Insbesondere ist die Menge der Polyeder

$$\{VP(m, x+M)\}_{m \in M} \cup \{VP(x+m, M)\}_{m \in M} \tag{19}$$

eine Pflasterung des R^d. *Die beiden Typen von Pflastersteinen haben jeweils dasselbe* $d-$ *Volumen, nämlich*

$$Vol(VP(m, x+M)) = Vol(VP(x+m.M)) = \frac{1}{2} Vol(VP(0, M)) \tag{20}$$

Beweis: Aus der definierenden Eigenschaft von $IDL(M)$ und aus (2) folgen die beiden Inklusionen

$$VP(0, x+M) \subseteq VP(0, M \cup (x+M)) \subseteq VP(0, x+M).$$

Entsprechend für $VP(x, M)$. Die Pflasterungseigenschaft folgt . $\square$
Im Folgenden werden wir über das Skelett und die Dimension der Polyeder $Rd[VP(0, x+M)]$ etc. im Sinne der stückweise linearen Topologie sprechen.

Folgerung 1 *Sei* $x \in IDL(M)$ *eine isodrome Verschiebung. Dann gilt für das* $(d-2)-$*Skelett von* $Rd[VP(0, x+M)]$:

$$Rd[VP(0, x+M)]^{(d-2)} \subset Rd[VP(0, M)] \cap Rd[VP(x, x+M)] \tag{21}$$

Beweis: Ein Punkt q liegt in $Rd[VP(0, x+M)]^{(d-2)}$ genau dann wenn es mindestens zwei verschiedene Punkte $x, y \in x+M$ gibt mit

$$\|q\| = \|q-x\| = \|q-y\|.$$

Also liegt q auf dem Rand $Rd[VP(x, x+M)]$. Entsprechend liegt q auch auf $Rd[VP(0, x+M)]$ und somit im Durchschnitt. $\square$

4. Der folgende Satz zeigt, daß für Nebenklassen $x+M$ von isodromen Verschiebungen ein Analogon der Resultate (10) und (11) noch richtig ist.

Satz 3 *Sei $x \in IDL(M)$ und sei $y \in x + M$ wesentlich für $VP(0, x + M)$. Dann hat y unter allen Vektoren aus $y + 2M$ die kürzeste Länge, d.h. es gilt*

$$\|y\| < \|y + 2m\| \quad \forall m \in M - \{0\} \tag{22}$$

Falls $x + M \neq M$ ist, so liegt $\frac{1}{2}y$ im Inneren des Polytops $VP(0, M)$.

Beweis: Falls $y \in x + M$ wesentlich für $VP(0, x + M)$ ist, so liegt $\frac{1}{2}y$ auf dem Rand von $VP(0, M)$ nur dann falls $y \in M$ liegt. Das kommt daher, daß nach Voraussetzung der Wesentlichkeit von y die Menge $A(y) = \{w \in R^d \mid \|w - y\| = \|w\|\}$ eine affine Hyperebene ist, die der Träger einer Fazette von $VP(0, x + M)$ ist. Falls nun $\frac{1}{2}y$ auf dem Rand von $VP(0, M)$ liegt, so ist wegen der Inklusion $VP(0, x + M) \subseteq VP(0, M)$ die Menge $A(y)$ auch der Träger einer Fazette von $VP(0, M)$. Der diesem Träger auf der Außenseite des Polytops $VP(0, M)$ eindeutig bestimmte dem Punkt 0 gegenüberliegende Punkt, und das ist y, liegt dann nach Konstruktion in M, und somit ist $x + M = M$.
Falls also $x + M \neq M$ ist, so muß $\frac{1}{2}y$ im Inneren des Polytops $VP(0, M)$ liegen. Dann ist aber nach (10) und (11) der Punkt y der Vektor kürzester Länge in der Nebenklasse $y + 2M$. $\square$

Als Folgerung ergibt sich, daß für isodrome Verschiebungen $x \in IDL(M)$ die Anzahl der wesentlichen Vektoren, und damit auch die Anzahl der Fazetten von $VP(0, x + M)$ durch 2^d beschränkt ist.

5. Die Randpunkte von $VP(0, x + M)$ liegen gleichverteilt in den beiden Typen von Pflastersteinen der Pflasterung (19).

Lemma 1 *Sei $x \in IDL(M)$ eine isodrome Verschiebung. Der Randpunkt $p \in Rd(VP(0, M))$ liege auf genau k verschiedenen Voronoizonen $VP(m_i, M)$ mit $(1 \leq i \leq k)$. Dann liegt p auf höchstens $2k$ Pflastersteinen der obigen Pflasterung, und zwar auf $h \leq k$ Pflastersteinen vom Typ*
$VP(m, M \cup (x + M))_{(m \in M)}$ und auf $h \leq k$ Pflastersteinen vom Typ
$VP(y, M \cup (x + M))_{(y \in x + M)}$.

Beweis: Aus der Volumenberechnung von Satz (2) folgt, daß in einer Umgebung des Punktes p genausoviele Pflastersteine der beiden vorkommenden Typen liegen. Dabei tritt für jede Voronoizone $VP(m_i, M)$ höchstens ein Pflasterstein des Typs $VP(m_i, x + M)$ auf. Also können insgesamt nur höchstens $2k$ Pflastersteine existieren, welche p enthalten. $\square$

Sei nun p ein Eckpunkt der Pflasterung (19). OBdA können wir annehmen, daß $p \in VP(0, x+M)$ Eckpunkt ist. Dann existieren mindestens d linear unabhängige Vektoren $y_1, ..., y_d \in x+M$ mit

$$||p|| = ||p - y_1|| = ... = ||p - y_d||.$$

Also liegt p auf mindestens d Pflastersteinen vom Typ $VP(y, M)$ mit $y \in x+M$. Nach Lemma 1 liegt dann p auch auf d Pflastersteinen vom Typ $VP(m, x+M)$.

Folgerung 2 *Sei p ein Eckpunkt der Pflasterung (19). Dann liegt p auf mindestens $2d$ Pflastersteinen.*

4 Der isodrome Ort der ebenen Gitter

1. Wir klassifizieren die ebenen Gitter nach ihrer Voronoi-Reduktion weiter im üblichen Dirichlet-Minkowskischen Sinne in sechs verschiedene Typen. Sei also das Gitter L in der Form $L = Z[(1,0);(a,b)]$ mit $a^2 + b^2 \geq 1$ und $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ vorgelegt. Dann ist L

- vom Typ A falls $0 < a < \frac{1}{2}$ und $a^2 + b^2 > 1$ ist
- vom Typ R falls $a = 0$ und $b > 1$ ist
- vom Typ L falls $a = \frac{1}{2}$ und $a^2 + b^2 > 1$ ist
- vom Typ K falls $0 < a < \frac{1}{2}$ und $a^2 + b^2 = 1$ ist
- vom Typ Q falls $a = 0$ und $b = 1$ ist
- vom Typ H falls $a = \frac{1}{2}$ und $a^2 + b^2 = 1$ ist

Wir werden dann in jedem dieser Fälle den isodromen Ort des Gitters (in Abhängigkeit von a, b) bestimmen. Wegen der zentralen Symmetrie der Definitionen genügt es, sich auf eine Halbebene, etwa auf die positive

Halbebene $x \geq 0$ zu beschränken. Zunächst betrachten wir den Typ A.
Typ A : Die Voronoizone des Gitters L um den Nullpunkt geschnitten mit der positiven Halbebene ist dann in der Vereinigung der folgenden vier Parallelogramme enthalten.

P I : $0 \leq x \leq a$ und $0 \leq by + (a-1)x \leq a^2 + b^2 - a$
P II : $0 \leq by + ax \leq a$ und $a - 1 \leq by + (a-1)x \leq 0$
P III : $a \leq x \leq 1$ und $a \leq by + ax \leq a^2 + b^2$
P IV : $0 \leq x \leq 1 - a$ und $-a^2 + b^2 - a \leq by + ax \leq 0$

Nun findet man für jedes Parallelogramm die beiden Schnittpunkte des Randes der Voronoizone mit dem Rand der verschobenen Voronoizone, und setzt die Steigung der durch diese beiden Schnittpunkte bestimmten Geraden orthogonal zu der Steigung $\frac{v}{u}$ der durchdeführten Verschiebung an. Daraus ergibt sich eine Gleichung, die in jedem der vier Parallelogramme den isodromen Ort beschreibt, und die wie folgt lautet:

P I : $bv^2 - bu^2 + 2(a-1)uv - (b^2 + a^2 - a)v + bu = 0$
P II : $b(1-2a)v^2 - b(1-2a)u^2 + 2(b^2 - a^2 + a)uv + (a^2 - b^2 - a)v + b(1-2a)u = 0$
P III : $bv^2 - bu^2 + 2auv - (b^2 + a^2 + a)v + bu = 0$
P IV : $bv^2 - bu^2 + 2auv + (b^2 + a^2 - a)v + bu = 0$

Die drei Hyperbelbögen in P I, P II und P III stoßen in einem gemeinsamen dreifachen Verzweigungspunkt $(a, \frac{a-a^2}{b})$ aneinander. Bei Berücksichtigung der gesamten Voronoizone erhält man einen weiteren dreifachen Verzweigungspunkt in $(-a, \frac{-a+a^2}{b})$ sowie einen sechsfachen Verzweigungspunkt im Ursprung (siehe Abb. 1).

Abbildung 1

Typ R : In diesem Fall verschwinden die Parallelogramme P I und P II. Der Durchschnitt der Voronoizone mit der positiven Halbebene ist dann in der Vereinigung der beiden Parallelogramme P III und P IV enthalten. Die Gleichungen der Hyperbelbögen in P III und in P IV sind dann

P III $v^2 - u^2 - bv + u = 0$

P IV $v^2 - u^2 + bv + u = 0$

P III und P IV gehen also durch Spiegelung an der $x-$Achse auseinander hervor. Entsprechend gibt es in der gesamten Voronoizone nur einen vierfachen Verzweigungspunkt im Ursprung (siehe Abb. 2).

Abbildung 2

Typ L : Das Parallelogramm P III enthält keinen inneren Punkt der Voronoizone. Der Durchschnitt der Voronoizone mit der positiven Halbebene ist also in der Vereinigung der drei Parallelogramme P I , P II und P IV enthalten. In diesem Fall degeneriert die Hyperbel in P II in zwei zueinander orthogonale Strecken. Diese werden durch die Gleichung

P II $v(2u - 1) = 0$

gegeben. Die Hyperbelbögen in P I und in P IV gehen durch Spiegelung an der $x-$Achse auseinander hervor. Zwei dreifache Verzweigungspunkte liegen auf jeder langen Seite am Rand der Voronoizone. Der Ursprung ist ein sechsfacher Verzweigungspunkt. Der Randpunkt $(\frac{1}{2}, 0)$ ist ein vierfacher Verzweigungspunkt, das Randstück zwischen den beiden dreifachen Verzweigungspunkten ist ebenfalls ein Teil des isodromen Ortes (siehe Abb. 3).

Abbildung 3

Typ K : In diesem Fall degenerieren die Hyperbelbögen in P III und P IV in zwei zueinander orthogonale Strecken. Diese werden durch die Gleichungen

P III $(-bu + (1 + a)v)((1 + a)u + bv - (1 + a)) = 0$
P IV $(bu + (1 - a)v)((1 - a)u - bv - 1) = 0$

gegeben. Die Hyperbelbögen in P I und P II gehen durch Spiegelung an der Achse $bv = (1 - a)u$ auseinander hervor. Das Verzweigungsverhalten ist sonst wie in Typ A beschrieben. Die kürzesten Seiten sind insbesondere Teil des isodromen Ortes (siehe Abb. 4).

Abbildung 4

Typ Q : Die beiden Hyperbelbögen in P III und in P IV aus Typ A degenerieren in (dasselbe) System von zwei zueinander orthogonalen Geraden P III = P IV $(v-u)(v+u)=0$
Der Ursprung ist der einzige (doppelte) Verzweigungspunkt (siehe Abb. 5).

Abbildung 5

Typ H : Der Durchschnitt der Voronoizone mit der rechten Halbebene ist ganz in der Vereinigung der Parallelogramme P I, P II und P IV enthalten. Alle Hyperbelbögen degenerieren in je zwei Paare zueinander orthogonaler Strecken. Der Nullpunkt ist ein sechsfacher Verzweigungspunkt, während alle Eckpunkte und alle Mittelpunkte der Seiten vierfache Verzweigungspunkte sind. Der gesamte Rand der Voronoizone ist ein Teil des isodromen Ortes (siehe Abb. 6) .

Abbildung 6

5 Die Klassifikation der Brillouin-Untergitter vom Rang 2

Durch direkte Inspektion der Struktur von $IDL(M)$ findet man zunächst, daß zu jedem echten Übergitter L mit $M \subset L \subset IDL(M)$ eine Komponente von $IDL(M)$ gehört, die die Form einer Strecke hat.

Folgerung 3 *Ein Gitter vom Typ A oder vom Typ R wie im vorherigen Abschnitt ist niemals ein Brillouin Untergitter eines anderen Untergitters.*

Andererseits gibt es offenbar bei den anderen vier Typen zu jeder Geraden G mit $G \subset IDL(M)$ Gitter L mit $M \subset L \subset M \cup G \subset IDL(M)$ von beliebigem Index $m = [L : M]$. Diese kann man dadurch erhalten, indem man auf der Geraden den bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmten Punkt p mit $mp \in M$ und $ip \notin M$ $\forall 1 < i < m$ wählt und dann $L = M + Zp$ setzt. Dann ist offenbar der Quotient L/M eine zyklische Gruppe der Ordnung m. Es gibt dazu einige weitere Beispiele mit kleinem zyklischen L/M, bei denen M vom Typ K ist, und wo der Punkt p auf einer Strecke liegen kann, die keine vollständige Gerade ist.
Nichtzyklische Quotienten können nur beim Typ H auftreten. Bei diesem Typ sind nur noch die weiteren Quotienten $L/M = Z/2 \oplus Z/2$ und $L/M = Z/3 \oplus Z/3$ möglich. Dies sieht man sofort aus der Struktur von $IDL(M)$ mit M vom Typ H. Damit haben wir erhalten

Satz 4 *Falls $M \subset L$ ein nichttriviales Brillouin-Untergitter des Gitters $L \subset R^2$ ist, so ist M vom Typ L,K,Q oder H. Insbesondere haben M und L mindestens eine nichttriviale Symmetrie. Falls M vom Typ L,K,Q ist, so ist die Quotientengruppe L/M zyklisch. Falls M vom Typ H ist, so ist die Quotientengruppe L/M entweder zyklisch oder ist $Z/2 \oplus Z/2$ oder $Z/3 \oplus Z/3$.*

6 Der isodrome Ort der Gitter vom Rang > 2

Sei jetzt $x \in IDL(M) \subset R^d$ mit $d \geq 3$ eine isodrome Verschiebung des Gitters M. Sei weiterhin $p \in VP(0, x + M)$ ein Eckpunkt des Polyeders $VP(0, x + M)$. Dann liegt p wegen Lemma 1 und Folgerung 2 auf mindestens d Pflastersteinen der Pflasterung (19) vom Typ $VP(m_i, M)$ und auf mindestens d Pflastersteinen vom Typ $VP(x_i, x + M)$.

Lemma 2 *Unter der Voraussetzung $d \geq 3$ liegt der Eckpunkt $p \in VP(0, x + M)$ auf mindestens $2d + 2$ Pflastersteinen der Pflasterung (19), von denen $d + 1$ von der Form $VP(m, x + M)$ sind.*

Beweis: Nach Folgerung 2 liegt p auf mindestens $2d$ Pflastersteinen. Wir wollen die Annahme, daß p auf genau $2d$ Pflastersteinen liegt, zum Widerspruch führen. Unter dieser Annahme hätte nämlich eine kleine Sphäre S um den Punkt p durch die Zellen der Pflasterung (19) eine simpliziale Struktur, deren Fazettenzahlen f_i durch die Eigenschaft $f_{d-1} = 2d$ charakterisiert wäre [1] . Es ist bekannt, daß jede solche simpliziale Struktur $d+2$ Eckpunkte hat und als Rand der Verklebung V zweier Simplizes längs einer gemeinsamen $(d-2)-$ Seite entsteht. Um zu sehen, daß dies zu einem Widerspruch führt, betrachten wir den Graphen, dessen Knotenpunkte aus den $(d-1)-$Simplizes der Sphäre bestehen, und dessen Kanten durch die Nachbarschaft längs einer gemeinsamen $(d-2)-$Seite induziert werden. Im Falle der obigen Sphäre S wäre dieser Graph vollständig bipartit, also in der Notation der Graphentheorie ein $K_{d,d}$. Im Falle des Komplexes V hingegen wäre dieser Graph die knotendisjunkte Vereinigung zweier vollständiger Graphen K_d mit d zusätzlichen Kanten zwischen je zwei einander zugeordneten Knoten aus den beiden Exemplaren K_d. Diese beiden Graphen stimmen aber nur für $d \leq 2$ überein. Der Rest der Behauptung folgt aus der Gleichverteilung nach Lemma 1. □

Satz 5 *Sei $x \in IDL(M)$ eine isodrome Verschiebung eines Gitters vom Rang $d \geq 3$. Dann sind die Eckpunkte des Polyeders $VP(0, x+M)$ ganz in der Eckpunktmenge von $VP(0, M)$ enthalten. Insbesondere gibt es bei gegebenem Gitter M nur endlich viele verschiedene isodrome Verschiebungen, und die Menge $IDL(M)$ ist diskret.*

Beweis: Wir beweisen den Satz zunächst für solche Gitter, deren zugehörige Voronoische Polyeder $VP(0, M)$ primitiv im Sinne von [2] sind. In diesem Fall sind die Eckpunkte p des Polyeders als diejenigen Punkte charakterisiert, für welche es $d+1$ verschiedene Gitterpunkte m_i gibt, die von p den gleichen Abstand haben.
Sei nun p ein Eckpunkt des Polyeders $VP(0, x+M)$. Dann gibt es nach Lemma 2 mindestens $d+1$ verschiedene Punkte $0, m_1, ..., m_d$, die von p den gleichen Abstand haben. Also muß p ein Eckpunkt des Polyeders $VP(0, M)$ sein. Dann folgt auch die Diskretheit von $IDL(M)$.
Für ein allgemeines Gitter M ist bekannt [2] [3] , daß das Voronoische Polyeder $VP(0, M)$ als Grenzfall (etwa im Sinne des Voronoi-reduzierten Bereichs) eines primitiven Voronoischen Polyeders auftritt. Entsprechend entsteht die Menge $IDL(M)$ als Grenzfall und muß deshalb die entsprechenden topologischen Eigenschaften der isodromen Verschiebungen des primitiven Falles behalten; insbesondere muß $IDL(M)$ auch wieder diskret sein. □

Abschließend geben wir ein Beispiel eines nichttrivialen Brillouin-Untergitters in jeder beliebigen Dimension d. Setze dazu

$$D_d = Z[e_i \pm e_j] \;\; \forall\, 1 \leq i \neq j \leq d.$$

Dann ist $D_d \subset Z^d$ ein Brillouin-Untergitter vom Index 2. Insbesondere ist auch $IDL(D_d) \neq D_d$.
Mit den obigen Methoden läßt sich auch eine Klassifikation der Brillouin-Untergitter vom Rang ≥ 3 erreichen. Dazu kann man den obigen Satz 5 verwenden, der die Klassifikation auf ein kombinatorisches Problem zurückführt. Man verwendet dann Satz 3 , um dieses Problem weiter zu vereinfachen. Dies soll an anderer Stelle weiter verfolgt werden.

Dr. Thomas Bier
Twiskenweg 43 B
D 26129 Oldenburg i.O.

Literatur

[1] A. Brønsted. *An Introduction to Convex Polytopes*, volume 90 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, 1982.

[2] G. Voronoi. Recherches sur les paralleloeders primitifs II.1. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 134:198–287, 1908.

[3] G. Voronoi. Recherches sur les paralleloeders primitifs II.2. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 136:67–178, 1909.