Topologisch endengleiche Bäume in unendlichen Graphen

Kerstin Waas

Zusammenfassung

Ein Ziel der unendlichen Graphentheorie besteht darin, die Endenstruktur eines Graphen durch möglichst einfache Teilgraphen darzustellen. Da Bäume bzw. Wälder eine sehr einfache Endenstruktur haben, interessiert man sich insbesondere dafür, welche Graphen einen endengleichen Spannbaum oder zumindest einen endengleichen Wald besitzen. Berücksichtigt man zusätzlich die topologische bzw. uniforme Struktur des Endenraums, so stellt sich folgende Frage: Welche Graphen besitzen einen gleichmäßig oder zumindest topologisch endengleichen Wald? Wir werden in dieser Arbeit zeigen, daß jeder zusammenhängende Graph mit metrisierbarem uniformem Endenraum, dessen $K_{\aleph_0}$ und dicke $TK_{\aleph_0}$ nur zu endlich vielen Enden gehören, einen gleichmäßig endengleichen Wald besitzt.

Einleitung

Wir betrachten in dieser Arbeit die Endenstruktur von unendlichen Graphen. Ein *Ende* eines Graphen G besteht hierbei aus sämtlichen Strahlen von G, die dasselbe Konvergenzverhalten aufweisen. Formal definieren wir diesen Begriff durch eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Strahlen von G: Zwei Strahlen von G heißen äquivalent, wenn keine endliche Eckenmenge aus G diese beiden Strahlen trennnt. Die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation nennen wir *Enden* und die Menge aller Enden von G den *Endenraum* $\Omega(G)$.
Ein Ziel der unendlichen Graphentheorie besteht darin, die Endenstruktur eines Graphen durch möglichst einfache Teilgraphen darzustellen. Wir bezeichnen daher einen Teilgraphen H eines Graphen G als *endengleich*, wenn sich die Endenstrukturen der beiden Graphen bijektiv entsprechen. Der Teilgraph H heißt topologisch bzw. gleichmäßig endengleich, wenn H die Endenstruktur von G nicht nur bijektiv repräsentiert, sondern auch deren topologische bzw. uniforme Struktur erhält.
Da in einem Baum offensichtlich nur solche Strahlen äquivalent sind, die gemeinsame Teilstrahlen besitzen, stellen endengleiche Bäume oder Wälder die Endenstruktur eines Graphen auf besonders einfache Weise dar. Von Interesse ist daher folgende Frage [H1], [D1]: Besitzt jeder zusammenhängende Graph einen endengleichen Spannbaum oder zumindest einen endengleichen Wald? Gegenbeispiele von Thomas / Seymour [T/S] und Thomassen [Th] zeigen, daß dies nicht der Fall ist. Halin [H1] bewies jedoch, daß jeder abzählbare zusammenhängende Graph einen endengleichen Spannbaum besitzt.
Berücksichtigt man zusätzlich die uniforme bzw. topologische Struktur des Endenraums, so stellt sich folgende Frage [D1]: Welche Graphen besitzen einen gleichmäßig

oder zumindest topologisch endengleichen Wald? Eine Antwort auf diese Frage gibt ein Resultat von Diestel [D1]: Jeder normale Spannbaum eines zusammenhängenden Graphen ist gleichmäßig endengleich. Aus den Untersuchungen von Halin und Jung über die Existenz von normalen Spannbäumen folgt daher, daß jeder abzählbare Graph [Ju], jeder Graph, der keinen $TK_{\aleph_0}$ enthält [H2], und jeder Graph, der weder einen $K_{\aleph_0}$ noch dicken $TK_{\aleph_0}$ enthält [H2], einen gleichmäßig und damit auch topologisch endengleichen Wald besitzt. Hierbei bezeichnen wir einen abzählbar unendlichen vollständigen Graphen als $K_{\aleph_0}$; unter einem dicken $TK_{\aleph_0}$ verstehen wir einen unterteilten $K_{\aleph_0}$, dessen Hauptecken paarweise durch $\aleph_1$ unabhängige Wege verbunden sind.

Da der topologische Endenraum eines beliebigen Waldes metrisierbar ist, ist insbesondere der topologische Endenraum eines Graphen mit topologisch endengleichem Wald metrisierbar. Es stellt sich daher die Frage, ob auch die Umkehrung gilt: Besitzt jeder Graph mit metrisierbarem topologischem Endenraum einen topologisch endengleichen Wald ?

Für jeden metrisierbaren uniformen Raum ist der zugehörige topologische Raum ebenfalls metrisierbar. Daher ist auch folgende schwächere Version dieser Frage von Interesse: Besitzt jeder Graph mit metrisierbarem uniformem Endenraum einen gleichmäßig endengleichen Wald ?

Diese Fragestellung werden wir in dieser Arbeit untersuchen. Wir werden zeigen, daß jeder zusammenhängende Graph mit metrisierbarem uniformem Endenraum, dessen $K_{\aleph_0}$ und dicke $TK_{\aleph_0}$ nur zu endlich vielen Enden gehören, einen gleichmäßig endengleichen Wald besitzt.

Dazu betrachten wir einen beliebigen zusammenhängenden Graphen, welcher diese Voraussetzungen erfüllt. Induktiv werden wir die $K_{\aleph_0}$ und dicken $TK_{\aleph_0}$ aus diesem Graphen entfernen, gleichzeitig aber die uniforme Endenstruktur erhalten. Aufgrund der oben erwähnten Ergebnisse von Halin [H2] und Diestel [D1] besitzt der betrachtete Graph somit einen gleichmäßig endengleichen Baum.

Kapitel 1

1.1 Graphentheoretische Begriffe und Notationen

Sämtliche graphentheoretische Begriffe, die in dieser Arbeit nicht explizit definiert werden, sind im Sinne der Definitionen von Halin [H3] zu verstehen.

Für einen Graphen G bezeichnen wir mit $V(G)$ die Eckenmenge, mit $E(G)$ die Kantenmenge von G.

Unter einem *Strahl* eines Graphen G verstehen wir einen einseitig unendlichen Weg aus G. Einen unendlichen zusammenhängenden Teilgraphen eines Strahls T nennen wir *Teilstrahl* von T.

Zwei Strahlen T, T' aus G bezeichnen wir als *(enden-)äquivalent*, in Zeichen $T \sim T'$, falls unendlich viele paarweise disjunkte T-T'-Wege in G existieren. Mit anderen

Worten, T ist äquivalent zu T', wenn keine endliche Eckenmenge $S \subset V(G)$ existiert, derart daß je zwei Teilstrahlen von T und T' aus $G - S$ in verschiedenen Komponenten von $G - S$ liegen.
Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Strahlen eines Graphen G. Deren Äquivalenzklassen nennen wir *Enden*; die Menge aller Enden heißt der *Endenraum* $\Omega(G)$ von G.
Ein Teilgraph H eines Graphen G *enthält* ein Ende $\omega \in \Omega(G)$, wenn von jedem Strahl aus ω ein Teilstrahl in H enthalten ist, und je zwei Strahlen von ω aus H in H äquivalent sind.
Ist S eine endliche Eckenmenge von G, so ist offensichtlich jedes Ende von G in einer Komponente von $G - S$ enthalten. Wir bezeichnen daher für jede endliche Eckenmenge $S \subset V(G)$ zwei Enden $\omega, \omega' \in \Omega(G)$ als äquivalent bezüglich S, in Zeichen $\omega \sim_S \omega'$, falls diese in derselben Komponente von $G-S$ enthalten sind. Andernfalls sagen wir S *trennt diese beiden Enden*. Entsprechend definieren wir diese Äquivalenzrelation für zwei beliebige Ecken $x, y \in V(G)$ bzw. für eine beliebige Ecke $x \in V(G)$ und ein beliebiges Ende $\omega \in \Omega(G)$ und schreiben $x \sim_S y$ bzw. $x \sim_S \omega$.
Wir sagen S *trennt die Ecke* $x \in V(G)$ *und den Strahl* $T \subset G$, falls in $G - S$ kein x-T'-Weg existiert, wobei T' einen beliebigen Teilstrahl von T aus $G-S'$ bezeichnet.
Die Eckenmenge S *trennt die beiden disjunkten Eckenmengen* $A, B \subset V(G)$, wenn jeder A-B-Weg aus G eine Ecke aus S trifft.
Ein Teilgraph H eines Graphen G heißt *endengleich*, wenn die Abbildung $\eta : \Omega(H) \to \Omega(G)$, die jedes Ende aus $\Omega(H)$ auf das Ende aus $\Omega(G)$ abbildet, das es als Teilmenge enthält, bijektiv ist.
Die Mengen $V_S := \{(\omega, \omega') \in \Omega(G) \times \Omega(G) | \omega \sim_S \omega'\}$, wobei S alle endlichen Teilmengen von $V(G)$ durchläuft, bilden eine Basis einer uniformen Struktur auf $\Omega(G)$; diese uniforme Struktur induziert eine Topologie auf $\Omega(G)$. Wir bezeichnen den uniformen Raum $\Omega(G)$ als *uniformen Endenraum* und den zugehörigen topologischen Raum $\Omega(G)$ als *topologischen Endenraum*.
Ein Teilgraph H von G heißt *topologisch endengleich*, wenn die Abbildung η ein Homöomorphismus zwischen den topologischen Räumen $\Omega(H)$ und $\Omega(G)$ ist, d.h. wenn η bijektiv ist, und sowohl η als auch η^{-1} stetig sind.
H heißt *gleichmäßig endengleich*, wenn η ein Isomorphismus zwischen den uniformen Räumen $\Omega(H)$ und $\Omega(G)$ ist, d.h. wenn η bijektiv ist, und sowohl η als auch η^{-1} gleichmäßig stetig sind.
Zwei Wege eines Graphen G heißen *disjunkt*, wenn sie keine gemeinsamen Ecken enthalten. Sie heißen *semidisjunkt* oder *unabhängig*, wenn höchstens ihre Endecken identisch sind.
Unter der *Fallinie* $f(x)$ einer beliebigen Ecke x eines Baumes B mit Wurzel v verstehen wir den in B eindeutigen x-v-Weg.
Sei X ein Teilgraph eines Graphen G, v eine Ecke von $G \backslash X$, derart daß G unendlich viele v-X-Wege enthält, die paarweise bis auf v keine gemeinsame Ecke enthalten. Dann heißt der aus diesen Wegen bestehende Teilgraph von G ein *v-X-Fächer* in G.
Zum Schluß noch zwei Bezeichnungsweisen: Mit $N_G(H)$ bezeichnen wir die Menge aller Nachbarn von H in $G \backslash H$; mit H_G^+ bezeichnen wir den induzierten Untergraphen von $H \cup N_G(H)$ aus G.

1.2 Die uniforme Struktur des Endenraums

Sei G ein unendlicher Graph mit nichtleerem Endenraum $\Omega(G)$; wie in Kapitel 1.1 setzen wir $V_S := \{(\omega, \omega') \in \Omega(G) \times \Omega(G) | \omega \sim_S \omega'\}$ für jede endliche Eckenmenge S von G. Dann gilt $(\omega, \omega') \in V_S$ für zwei Enden ω, ω' von G genau dann, wenn ω und ω' in derselben Komponente von $G - S$ enthalten sind.
Ferner bildet die Menge $\mathcal{V}_G := \{V_S | S \subset V(G), |S| < \aleph_0\}$ eine Nachbarschaftsbasis einer uniformen Struktur auf $\Omega(G)$ ist.
Da zu je zwei Enden von G eine endliche Eckenmenge existiert, die diese beiden Enden trennt, folgt insbesondere $\bigcap_{V_S \in \mathcal{V}_G} V_S = \{(\omega, \omega) : \omega \in \Omega(G)\}$, d.h. der uniforme Raum $\Omega(G)$ ist separiert.

Wir betrachten nun die zugehörige Topologie dieser uniformen Struktur auf $\Omega(G)$. Nach Definition enthält die Menge V_S genau die Paare von Enden, die S nicht trennt. Folglich enthält die Menge $V_S(\omega) := \{\omega' | (\omega, \omega') \in V_S\}$ genau die Enden der Komponente von $G - S$, die ω enthält. Daher gilt $V_S(\omega') = V_S(\omega)$ für jedes $\omega' \in V_S(\omega)$. Andererseits bilden nach Definition der uniformen Topologie die Mengen $V_S(\omega)$, wobei V_S alle Elemente von $\mathcal{V}_G$ durchläuft, eine Umgebungsbasis von ω, d.h. $V_S(\omega)$ ist eine Umgebung von ω. Dann ist $V_S(\omega)$ aber Umgebung jedes seiner Elemente; die Mengen dieser Form sind somit offen und bilden daher eine Basis der zugehörigen Topologie. In diesem Sinne erzeugen also die Komponenten von $G - S$, wobei S alle endlichen Teilmengen von $V(G)$ durchläuft, eine Basis der uniformen Topologie von $\Omega(G)$.

Wir veranschaulichen jetzt den Begriff "endengleich": Ein Teilgraph H eines Graphen G heißt endengleich, falls die Abbildung $\eta : \Omega(H) \to \Omega(G)$, die jedes Ende von H auf das Ende von G abbildet, das es als Teilmenge enthält, bijektiv ist.
Ist η injektiv, so bedeutet dies anschaulich, daß zwei Strahlen aus H, die in G äquivalent sind (also in demselben Ende liegen), auch in H äquivalent sind. Ist η surjektiv, so heißt das, daß von jedem Ende aus $\Omega(G)$ Strahlen in H enthalten sind. Beispiele für injektive, surjektive und bijektive Teilgraphen enthält Abbildung 1.

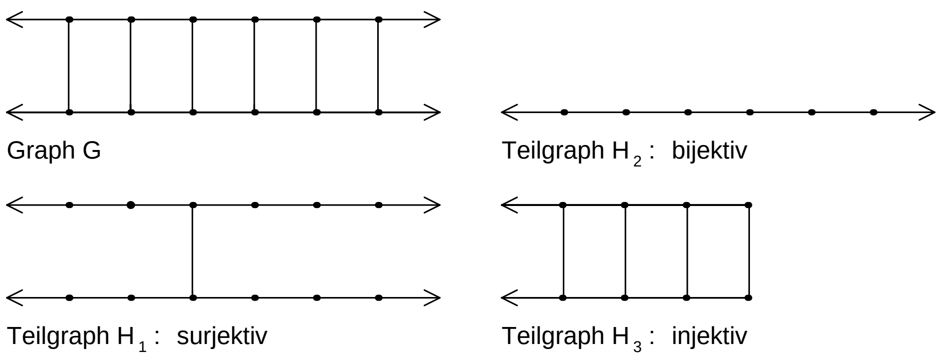

Abbildung 1

Ein Teilgraph H eines Graphen G heißt topologisch endengleich, wenn die Abbildung η ein Homöomorphismus zwischen den topologischen Räumen $\Omega(H)$ und $\Omega(G)$ ist, d.h. wenn η bijektiv ist, und sowohl η als auch η^{-1} stetig sind.
Wir betrachten zunächst die Abbildung η^{-1}. Diese ist genau dann stetig, wenn zu jeder endlichen Eckenmenge $S \subset V(H)$ und zu jedem Ende $\omega \in \Omega(G)$ eine endliche Eckenmenge $S'(\omega) \subset V(G)$ existiert, so daß gilt: $\omega \sim_{S'(\omega)} \omega'$ impliziert $\eta^{-1}(\omega) \sim_S \eta^{-1}(\omega')$ für alle $\omega' \in \Omega(G)$.
Dies bedeutet η^{-1} ist genau dann stetig, wenn für jede endliche Eckenmenge $S \subset V(H)$ und jedes $\omega \in \Omega(G)$ eine endliche Eckenmenge $S'(\omega) \subset V(G)$ existiert, so daß gilt: Die Komponente von $G - S'(\omega)$, die ω enthält, enthält nur solche Enden von G, deren zugehörige Enden aus H in der Komponente von $H - S$ enthalten sind, die das zu ω zugehörige Ende von H enthält.
Da H ein Teilgraph von G ist, ist η selbstverständlich immer stetig, denn für jede beliebige Eckenmenge $S \subset V(G)$ kann für $S'(\omega)$ die endliche Eckenmenge $S \cap V(H)$ gewählt werden.

Der Teilgraph H heißt gleichmäßig endengleich, falls η ein Isomorphismus zwischen den uniformen Räumen $\Omega(H)$ und $\Omega(G)$ ist, d.h. wenn η bijektiv ist und sowohl η als auch η^{-1} gleichmäßig stetig sind.
Auch hier betrachten wir zunächst die Abbildung η^{-1}. Diese ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn zu jeder endlichen Eckenmenge S von H eine endliche Eckenmenge S' von G existiert, so daß für zwei Enden $\omega, \omega' \in \Omega(G)$ gilt: $\omega \sim_{S'} \omega'$ impliziert $\eta^{-1}(\omega) \sim_S \eta^{-1}(\omega')$.
Mit anderen Worten, η^{-1} ist gleichmäßig stetig, wenn zu jeder endlichen Eckenmenge S von H eine endliche Eckenmenge S' von G existiert, so daß für je zwei Enden von G, die in derselben Komponente von $G - S'$ enthalten sind, die zugehörigen Enden von H in derselben Komponente von $H - S$ enthalten sind.
Überträgt man dies auf die Abbildung η, so stellt man fest, daß η immer gleichmäßig stetig ist, da H ein Teilgraph von G ist (d.h. die Komponenten von $H - (S \cap V(H))$ sind Teilgraphen der Komponenten von $G - S$).
Eine wirkliche Forderung an einen gleichmäßig oder topologisch endengleichen Teilgraphen ist außer der Bijektivität von η daher nur die (gleichmäßige) Stetigkeit von η^{-1}.

Selbstverständlich ist jede gleichmäßig stetige Abbildung $f : X \to Y$ von einem uniformen Raum X in einen uniformen Raum Y stetig bezüglich der induzierten topologischen Räume X und Y. Jeder gleichmäßig endengleiche Teilgraph ist daher auch topologisch endengleich. Außerdem ist jeder topologisch endengleiche Teilgraph nach Definition auch endengleich.
Die Umkehrung dieser Implikationen gilt aber keineswegs; Abbildung 2 zeigt Beispiele für einen endengleichen, aber nicht topologisch endengleichen Teilgraphen, einen topologisch endengleichen, aber nicht gleichmäßig endengleichen Teilgraphen und einen gleichmäßig endengleichen Teilgraphen.

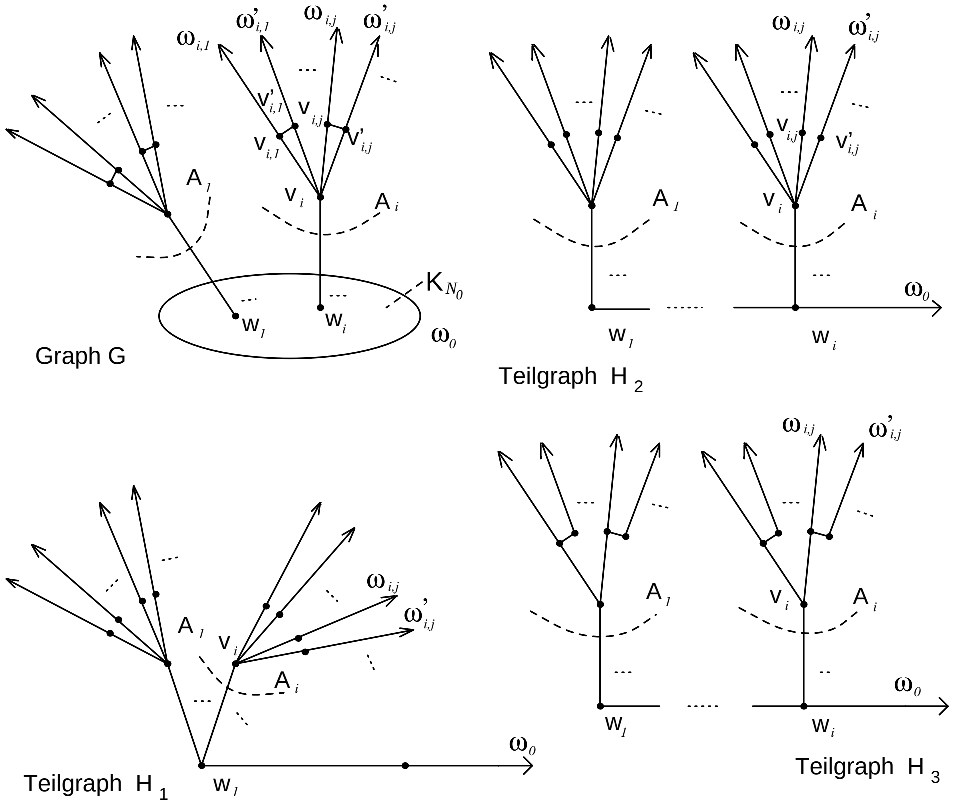

Abbildung 2

Zum besseren Verständnis der Beispiele aus Abbildung 2 verdeutlichen wir zunächst den Unterschied zwischen den Begriffen "topologisch endengleich" und "gleichmäßig endengleich": Für einen topologisch endengleichen Teilgraphen H eines Graphen G genügt es, daß zu jeder endlichen Eckenmenge $S \subset V(H)$ und zu jedem Ende $\omega \in \Omega(G)$ eine andere endliche Eckenmenge $S'(\omega)$ existiert, die in G diejenigen Enden von ω trennt, deren zugehörige Enden aus H durch $S'(\omega)$ von dem zu ω zugehörigen Ende aus H getrennt werden. Dagegen muß für einen gleichmäßig endengleichen Teilgraphen bei fester Eckenmenge S die gesuchte Eckenmenge $S'(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega(G)$ identisch sein.
Wir betrachten nun die Graphen aus Abbildung 2: Der Graph G besteht aus einem $K_{\aleph_0}$ mit den Ecken w_i, an die jeweils ein Teilgraph A_i angeheftet wurde. Wir bezeichnen mit ω_0 das zu dem $K_{\aleph_0}$ zugehörige Ende. Zur Vereinfachung bezeichnen wir in Abbildung 2 die Enden der Teilgraphen von G wie die zugehörigen Enden von G.
Wie man leicht sieht, ist der Teilgraph H_1 endengleich, aber nicht topologisch endengleich, denn die Eckenmenge $\{w_1\}$ trennt in H sämtliche Enden von dem zu ω_0 zugehörigen Ende aus H, es existiert aber keine endliche Eckenmenge von G, die alle Enden aus G von ω_0 trennt.
Der Teilgraph H_2 ist topologisch endengleich, denn für jede endliche Eckenmenge $S \subset V(H_2)$ und jedes Ende $\omega_{i,j}$ bzw. $\omega'_{i,j}$ leistet $\{v_{i,j}\}$ bzw. $\{v_{i,j}\}'$, und für ω_0 leistet $\{v_1, ..., v_m\}$ mit $m :=\max\{k \in \mathbb{N} | w_k \in S$ oder $V(A_k) \cap S \neq \emptyset\}$ das Gewünschte. Dagegen ist H_2 nicht gleichmäßig endengleich, da die Eckenmenge $\{v_i\}$ für jedes

$j \in \mathbb{N}$ die zu $\omega_{i,j}$ und $\omega'_{i,j}$ zugehörigen Enden aus H trennt, während keine endliche Eckenmenge von G existiert, die für jedes j die Enden $\omega_{i,j}$ und $\omega'_{i,j}$ in G trennt.
Der Teilgraph H_3 ist gleichmäßig endengleich, denn für jede endliche Eckenmenge und für jedes Ende von G kann für S' die Eckenmenge $S \cup \{v_1, ..., v_m\}$ mit $m :=\max\{k \in \mathbb{N} | w_k \in S$ oder $V(A_k) \cap S \neq \emptyset\}$ gewählt werden.

Wir werden in Kapitel 2 mehrfach gleichmäßig endengleiche Teilgraphen konstruieren; daher fassen wir noch einmal zusammen:
Ein Teilgraph H eines Graphen G ist gleichmäßig endengleich, wenn gilt:
1) H enthält von jedem Ende aus $\Omega(G)$ einen Strahl;
2) je zwei Strahlen aus H, die in G äquivalent sind, sind dies auch in H;
3) zu jeder endlichen Eckenmenge $S \subset V(H)$ gibt es eine endliche Eckenmenge $S' \subset V(G)$, derart daß für alle $\omega, \omega' \in \Omega(G)$ gilt: $\eta^{-1}(\omega) \not\sim_S \eta^{-1}(\omega')$ impliziert $\omega \not\sim_{S'} \omega'$.

Kapitel 2: Konstruktion eines $K_{\aleph_0}$-freien Teilgraphen von G

In diesem Kapitel beweisen wir folgenden Satz:

Satz 1: *Ist G ein zusammenhängender Graph mit metrisierbarem uniformem Endenraum $\Omega(G)$, dessen $K_{\aleph_0}$ und dicke $TK_{\aleph_0}$ zu nur endlich vielen Enden gehören, dann enthält G einen gleichmäßig endengleichen Baum.*

Bevor wir den Beweis dieses Satzes kurz skizzieren, zitieren wir die in der Einleitung erwähnten Sätze von Halin und Diestel, die für diesen Beweis benötigt werden. Es sei noch bemerkt, daß Satz 3 in der angegebenen Literatur explizit nur für den Begriff "topologisch endengleich" bewiesen wird; der dort angegebene Beweis ist jedoch auch für die hier zitierte Version gültig.

Satz 2: [H2] *Jeder zusammenhängende Graph, der keinen $K_{\aleph_0}$ oder dicken $TK_{\aleph_0}$ enthält, besitzt einen normalen Spannbaum.*

Satz 3: [D1] *Jeder normale Spannbaum ist gleichmäßig endengleich.*

Im folgenden sei G ein Graph mit Endenraum $\Omega(G)$, der die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt. Unser Ziel ist es, einen gleichmäßig endengleichen zusammenhängenden Teilgraphen $\tilde{G}$ von G zu konstruieren, in dem kein $K_{\aleph_0}$ oder dicker $TK_{\aleph_0}$ vorhanden ist; nach Satz 2 und 3 enthält dann $\tilde{G}$, und damit auch G, einen gleichmäßig endengleichen Baum.
Zur Konstruktion von $\tilde{G}$ betrachten wir zunächst ein Ende ω^*, zu dem mindestens ein $K_{\aleph_0}$ oder dicker $TK_{\aleph_0}$ gehört. Wir konstruieren dann einen gleichmäßig endengleichen Teilgraphen von G, in dem kein $K_{\aleph_0}$ oder dicker $TK_{\aleph_0}$ zu dem ω^* entsprechenden Ende gehört.

Hierfür konstruieren wir zunächst eine abzählbare Eckenmenge $S^* \subset V(G)$, derart daß jedes Ende von G, außer ω^*, in einer Komponente von $G - S^*$ enthalten ist. Die Konstruktion des gesuchten Teilgraphen erfolgt dann in drei Schritten: Im ersten Schritt verbinden wir die endenenthaltenden Komponenten von $G - S^*$ über die Ecken aus S^*, so daß ein zu G gleichmäßig endengleicher zusammenhängender Graph ensteht, welcher keinen $K_{\aleph_0}$ von ω^* enthält.
In den anderen beiden Schritten streichen wir dann aus diesem Graphen Kanten zwischen S^* und den endenenthaltenden Komponenten, so daß der dadurch entstandene Graph auch keinen dicken $TK_{\aleph_0}$ von ω^* enthält, und dennoch zusammenhängend und gleichmäßig endengleich zu G ist.
Induktiv schließen wir dann auf die Existenz eines zusammenhängenden gleichmäßig endengleichen Teilgraphen von G, der keinen $K_{\aleph_0}$ oder dicken $TK_{\aleph_0}$ enthält.

2.1 Konstruktion von S^*

Da der uniforme Endenraum $\Omega(G)$ nach Voraussetzung metrisierbar ist, besitzt er eine abzählbare Nachbarschaftsbasis; denn es gilt der folgende Satz:

Satz 4: [S] *Ein uniformer Raum ist genau dann metrisierbar, wenn er separiert ist und eine abzählbare Nachbarschaftsbasis besitzt.*

Für einen Filter mit abzählbarer Basis gilt außerdem: Jede Basis $\mathcal{B}$ enthält eine abzählbare Basis $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Daher enthält die in Kapitel 1.1 definierte Nachbarschaftsbasis $\mathcal{V}_G$ eine abzählbare Basis $\mathcal{V}'$. Wir setzen nun $\tilde{S} := \bigcup_{V_S \in \mathcal{V}'} S$ und $\tilde{\mathcal{V}} := \{V_S | S \subset \tilde{S}, |S| < \aleph_0\}$; da $\tilde{S}$ abzählbar ist, ist $\tilde{\mathcal{V}}$ ebenfalls abzählbar. Außerdem ist $\tilde{\mathcal{V}}$ als Obermenge der Filterbasis $\mathcal{V}'$ von $\Omega(G)$ ebenfalls eine Filterbasis von $\Omega(G)$. Damit haben wir folgendes Lemma bewiesen:

Lemma 1: *Es gibt eine abzählbare Eckenmenge $\tilde{S} \subset V(G)$, so daß die Filterbasis $\tilde{\mathcal{V}} = \{V_S | S \subset \tilde{S}, |S| < \aleph_0\}$ dieselbe uniforme Struktur auf $\Omega(G)$ erzeugt wie die Filterbasis $\mathcal{V}_G = \{V_S | S \subset V(G), |S| < \aleph_0\}$.*

Bemerkung: *Wenn wir von nun an sagen, daß $\tilde{S}$ die uniforme Struktur von $\Omega(G)$ erzeugt, so meinen wir dies im Sinne von Lemma 1. Anschaulich bedeutet dies, daß zu je zwei Enden von G eine endliche Teilmenge von $\tilde{S}$ existiert, die diese beiden Enden trennt.*

Falls $\tilde{S}$ endlich ist, ist jedes Ende von G in einer Komponente von $G - \tilde{S}$ enthalten, die kein weiteres Ende von G enthält. Daher können wir in diesem Fall aus jedem Ende von G einen in $\tilde{S}$ beginnenden Strahl T_ω so auswählen, daß alle diese Strahlen bis auf die Anfangsecken disjunkt sind. Die Ecken aus $\tilde{S}$ verbinden wir über einen endlichen Weg w aus G.
Der aus w und den Strahlen T_ω bestehende Teilgraph G^* von G enthält dann offensichtlich weder einen $K_{\aleph_0}$ noch einen dicken $TK_{\aleph_0}$, da alle Ecken von G^* mit unendlichem Grad in w liegen; $V(w)$ ist aber endlich. Außerdem ist G^*, wie man leicht sieht, gleichmäßig endengleich zu G.

Wir nehmen daher im folgenden an, daß $\tilde{S}$ unendlich ist.

Konstruktion von S^*: Wir konstruieren S^* aus der Eckenmenge $\tilde{S} := \{b_1, b_2, ...\}$. Dazu setzen wir $S_i := \{b_1, ..., b_i\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Der Graph $G - S_i$ zerfällt in Komponenten; da S_i endlich ist, enthält eine dieser Komponenten, sagen wir C_i^*, das Ende ω^*. Wir setzen nun $S^i := (V(C_i^*) \cup N_G(C_i^*)) \cap \tilde{S}$ und $S^* := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} S^i$.

Bemerkung: Da $S_k \subset S_{k+1}$ ist, gilt $C_k^* \supseteq C_{k+1}^*$ und somit $S^k \supseteq S^{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Außerdem zeigt man leicht, daß S^* nicht leer ist, denn mindestens ein $K_{\aleph_0}$ oder dicker $TK_{\aleph_0}$ gehört zu ω^* (im übrigen folgt dies auch aus Lemma 13).

Im folgenden bezeichnen wir mit $\mathcal{C}$ die Menge der Komponenten von $G - S^*$, die mindestens ein Ende $\omega \in \Omega(G)$, $\omega \neq \omega^*$, enthalten. Wir setzen $\tilde{C} := \bigcup \mathcal{C}$ und $S_C^* := N_G(C) \subset S^*$ für jede Komponente $C \in \mathcal{C}$. Wir beweisen nun einige Lemmata über Eigenschaften der Komponenten aus $\mathcal{C}$.

Lemma 2: *Jedes Ende $\omega \in \Omega(G)$, $\omega \neq \omega^*$, ist in einer Komponente aus $\mathcal{C}$ enthalten.*

Beweis: Sei $\omega \in \Omega(G)$, $\omega \neq \omega^*$, beliebig gegeben. $\tilde{S}$ erzeugt den uniformen Raum $\Omega(G)$, also existiert eine endliche Menge $S \subset \tilde{S}$, die ω und ω^* trennt. Da S endlich ist, existiert eine Menge S_m (aus der Konstruktion von S^*) mit $S \subseteq S_m$, d.h. ω und ω^* sind in verschiedenen Komponenten von $G - S_m$ enthalten. Hierbei ist C_m^* die Komponente, die ω^* enthält; C' sei die Komponente, die ω enthält. Jede Ecke von S^* liegt entweder in S_m oder in C_m^*, denn es gilt $S^* \subset S^m \subset V(C_m^*) \cup S_m$; daher ist $S^* \cap V(C')$ leer, d.h. C' ist Teilgraph einer Komponente C von $G - S^*$. Damit ist ω aber in C enthalten und C ist aus $\mathcal{C}$. $\square$

Lemma 3: *Die Komponenten aus $\mathcal{C}$ enthalten keine Hauptecken der $K_{\aleph_0}$ oder dicken $TK_{\aleph_0}$ von ω^*.*

Beweis: Angenommen es gibt eine Komponente $C \in \mathcal{C}$ und eine Hauptecke t eines $K_{\aleph_0}$ oder dicken $TK_{\aleph_0}$ von ω^*, die in C liegt. Nach Definition enthält C mindestens ein von ω^* verschiedenes Ende ω von G. Da $\tilde{S}$ die uniforme Struktur von $\Omega(G)$ erzeugt, gibt es eine endliche Menge $S \subset \tilde{S}$, die ω und ω^* trennt. Dann trennt S die Ecke t von mindestens einem der beiden Enden. Da t eine Hauptecke eines $K_{\aleph_0}$ oder dicken $TK_{\aleph_0}$ von ω^* ist, trennt S diese Ecke nur dann von ω^*, wenn t in S liegt. Dann trennt S die Ecke t aber auch von ω. Dies gilt daher in jedem Fall. Das heißt aber, daß $S \cap V(C)$ nicht leer ist. Es sei s die erste Ecke von $\tilde{S}$ auf einem t-S-Weg in C (da C zusammenhängend ist, gibt es mindestens einen solchen Weg in C). Dann wird s durch keine endliche Teilmenge von $\tilde{S} \backslash \{s\}$ von ω^* getrennt. Somit gilt $s \in S^*$, im Widerspruch zu $s \in V(C)$. $\square$

Bemerkung: Aus Lemma 3 folgt direkt, daß die Komponenten aus $\mathcal{C}$ keinen $K_{\aleph_0}$ oder dicken $TK_{\aleph_0}$ von ω^* enthalten, denn sie enthalten keine der zugehörigen Hauptecken.

2.2 Konstruktion von G'

Wir werden nun einen zusammenhängenden gleichmäßig endengleichen Teilgraphen G' von G konstruieren, welcher keinen $K_{\aleph_0}$ von ω^* enthält. Um den Zusammenhang der Enden von G möglichst wenig zu verändern, soll G' die Komponenten aus $\mathcal{C}$ enthalten. Da G' gleichmäßig endengleich zu G sein soll, müssen aus jedem Ende von G Strahlen in G' vorhanden sein. Sämtliche Enden von G, außer ω^*, sind aber in den Komponenten aus $\mathcal{C}$ enthalten. Um sicherzustellen, daß G' auch Strahlen von ω^* enthält, wählen wir einen Strahl H von ω^* aus G aus und fügen ihn zu den Komponenten aus $\mathcal{C}$ hinzu. Den Strahl H verbinden wir dann über Bäume mit den Ecken aus S^* und fügen sämtliche S^*-$\tilde{\mathcal{C}}$-Kanten ein. Der entstandene Graph ist zusammenhängend, denn für alle Komponenten $C \in \mathcal{C}$ ist S^*_C nicht leer. Wir führen diese Konstruktion jetzt genauer aus:

Konstruktion von G': Wir nehmen den Untergraphen $\tilde{C} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ und fügen alle S^*-$\tilde{C}$-Kanten von G ein. Anschließend wählen wir einen Strahl H durch die Hauptecken eines $K_{\aleph_0}$ oder dicken $TK_{\aleph_0}$ von ω^* (nach Voraussetzung gehört mindestens ein $K_{\aleph_0}$ oder dicker $TK_{\aleph_0}$ zu ω^*). Den Strahl H verbinden wir dann über abzählbar viele endliche Wege w_j mit den Ecken aus $S^* := \{t_1, t_2, ...\}$. Die Wege w_j definieren wir induktiv :
Falls $S^* \subset V(H)$ ist, ist die Konstruktion von G' beendet. Ansonsten setzen wir $a_1 := t_{m_1}$, wobei $m_1 := \min\{j \in \mathbb{N} | t_j \notin V(H)\}$ ist. Da G zusammenhängend ist, können wir dann einen a_1-H-Weg aus G wählen. Dies sei der Weg w_1. Den Ecken dieses Weges ordnen wir durch eine Abbildung $r : V(w_1) \to \mathbb{N}$ den Wert 1 zu. Ferner sei $W_0 = \emptyset$.
Die Wege w_k mit $k > 1$, wählen wir nun folgendermaßen: Die Ecken a_i und die Wege w_i seien für alle $i < k$ gewählt, die Abbildung r sei für alle Ecken $v \in V(W_{k-1}) := V(\bigcup_{i<k} w_i)$ so definiert, daß $r(v) = i$ gilt für alle $i < k$ und $v \in V(W_i \backslash W_{i-1})$. Die Konstruktion von G' ist beendet, falls $S^* \subset V(H) \cup V(W_{k-1})$ ist. Ansonsten setzen wir $a_k := t_{m_k}$, wobei $m_k := \min\{j \in \mathbb{N} | t_j \notin V(H) \cup V(W_{k-1})\}$ ist. Da G zusammenhängend ist, können wir dann einen a_k-$(H \cup W_{k-1})$-Weg aus G nach folgenden Regeln wählen:
R1) Falls möglich sei die Endecke v_k dieses Weges aus $V(H) \backslash V(W_{k-1})$.
R2) Falls v_k nicht nach Regel R1) gewählt werden kann, wähle man $v_k \in V(W_{k-1})$ so, daß $r(v_k)$ größtmöglich ist.
R3) Bei der Wahl von v_k nach Regel R2) wähle man $v_k \in V(w_{r(v_k)})$ so, daß v_k in $w_{r(v_k)}$ größtmöglichen Abstand von H hat.
Der so gewählte a_k-$(H \cup W_{k-1})$-Weg sei w_k. Anschließend setzen wir $W_k := \bigcup_{i \leq k} w_i$ und definieren die Abbildung r nun auch auf den Ecken aus $V(w_k)$, indem wir $r(v) := k$ für alle $v \in V(W_k \backslash W_{k-1})$ setzen. Der durch diese Konstruktion entstandene Graph sei der gesuchte Graph G'.

Bemerkung: Da v_j die einzige Ecke von w_j ist, die in $H \cup W_{j-1}$ liegt, gilt auch nach Abschluß der Konstruktion $r(v) = j$ für alle $v \in V(w_j) \backslash \{v_j\}$. Dagegen gilt $r(v_j) < j$, es sei denn, v_j liegt in H.

Es sei $\mathcal{W}$ die Menge aller Wege w_i aus der Konstruktion von G'. Nach Konstruktion ist der Graph $W := \bigcup_{w_i \in \mathcal{W}} w_i$ kreisfrei, d.h. W ist ein Wald. Da $\mathcal{W}$ abzählbar ist, besitzt W abzählbar viele Komponenten. Die Menge dieser Komponenten bezeichnen wir mit $\mathcal{B}$. Für jeden Baum $B \in \mathcal{B}$ setzen wir $B =: B_{m(B)}$, wobei $m(B) := \min\{k \in \mathbb{N} | w_k \subset B\}$ ist; ferner sei $\tilde{B} := W \cup H$.
Die einzelnen Bäume aus $\mathcal{B}$ sind in $\tilde{B}$ über H miteinander verbunden und dadurch linear angeordnet, denn jeder Baum enthält genau eine Ecke von H. Man beachte jedoch, daß sowohl die Bäume von $\mathcal{B}$ als auch H nicht unbedingt disjunkt zu den Komponenten von $\mathcal{C}$ sind. Da H aber unendlich viele Ecken eines $K_{\aleph_0}$ oder dicken $TK_{\aleph_0}$ von ω^* enthält, die wegen Lemma 3 nicht in den Komponenten von $\mathcal{C}$ liegen, enthält keine der Komponenten aus $\mathcal{C}$ einen Teilstrahl von H. Lediglich endliche zusammenhängende Abschnitte von H können in einer Komponente von $\mathcal{C}$ liegen.
Außerdem werden wir in Lemma 7 sehen, daß die Bäume aus $\mathcal{B}$ keine unendlichen Wege enthalten.

Es folgen nun drei Lemmata über die Existenz von $\tilde{B}$-$\tilde{B}$-Wegen in G, die für den Beweis von Lemma 7 und für spätere Beweise benötigt werden. Hierbei sind die Bezeichnungen w_j, a_j und v_j wie in der Konstruktion von G' zu verstehen: w_j bezeichne den im j-ten Konstruktionschritt gewählten Weg, a_j die Anfangsecke und v_j die Endecke von w_j.

Lemma 4: *In G existiert nur dann ein $\tilde{B}$-$\tilde{B}$-Weg mit Anfangs- und Endecke aus demselben Baum von $\mathcal{B}$, wenn eine von beiden in Fallinie der anderen liegt.*

Beweis: Es sei B_n ein beliebiger Baum aus $\mathcal{B}$. Angenommen es gibt einen $\tilde{B}$-$\tilde{B}$-Weg w mit Endecken $h, h' \in V(B_n)$, derart daß keine von beiden Ecken in Fallinie der anderen liegt. Es sei $r(h) = i, r(h') = k$ und o.B.d.A. $i > k$. Es sei $m > k$ minimal mit $v_m \in V(f(a_i))$; ein solches m existiert, da $i > k$ ist. Dann wurde w_m nach den Regeln R2) und R3) gewählt. Weil m minimal ist, ist $r(v_m) \leq k$.
Falls $r(v_m) < k = r(h')$ ist, genügt w_m nicht Regel R2), denn der Weg $\tilde{w} := a_m B_n h w$ endet in h' mit $r(h') = k > r(v_m)$. Falls $r(v) = k$ ist, liegt v_m in Fallinie von h' oder umgekehrt. Letzteres bedeutet aber h' liegt in Fallinie von h, im Widerspruch zur Annahme. Wir können daher annehmen, daß v_m in Fallinie von h' liegt. Dann genügt w_m aber nicht Regel R3), denn $\tilde{w}$ endet in h' und h' hat größeren Abstand zur Wurzel von B_n als v_m. $\Box$

Lemma 5: *Jeder $\tilde{B}$-$\tilde{B}$-Weg von einem Baum $B_i \in \mathcal{B}$ nach $H \backslash W$, beginnt in w_i.*

Beweis: Es sei w ein $\tilde{B}$-$\tilde{B}$-Weg in G mit Anfangsecke $h \in V(B_i)$ mit $r(h) := n \geq i$ und Endecke $h' \in V(H \backslash W)$. Mit $\tilde{w}$ bezeichnen wir den Weg $a_n w_n h w$. Dann ist $\tilde{w}$ ein Weg, der zur Wahl von w_n Regel R1) genügt. Also ist w_n nach Regel R1) gewählt worden und somit gilt $n = i$. $\Box$

Lemma 6: *Jeder $\tilde{B}$-$\tilde{B}$-Weg von einem Baum B_i zu einem Baum B_j mit $i < j$ beginnt in w_i.*

Beweis: Angenommen es gibt einen $\tilde{B}$-$\tilde{B}$-Weg w in G mit Endecken $h \in V(B_i)$, $h' \in V(B_j)$ und $i < j$, so daß $r(h) = n > i$ ist. Es sei $m > i$ minimal mit $v_m \in V(f(a_n))$; dann wurde w_m nach Regel R2) und R3) gewählt. Da m minimal ist, ist $r(v_m) = i$.
Falls $m < j$ ist, gibt es einen Weg $a_m B_i h w$, der nach Regel R1) als Weg w_m gewählt werden könnte, im Widerspruch zur Annahme. Es gilt daher $m > j$ und damit $r(v_m) \leq i < j \leq r(h')$. Dann genügt w_m aber nicht Regel R3), denn der Weg $a_n B_i h w$ endet in h', im Widerspruch zu Wahl von w_m. $\square$

Korollar 1: *Die Eckenmenge $\bigcup_{k \leq i} V(w_k)$ trennt B_i in G von $\tilde{B} \backslash B_i$.*

Beweis: Sei w ein $\tilde{B}$-$\tilde{B}$-Weg aus G von B_i nach $\tilde{B} \backslash B_i$ mit Anfangsecke h und Endecke h'. Falls $h' \in V(H)$ ist, gilt $h \in V(w_i)$ wegen Lemma 5. Ansonsten gilt $h' \in V(B_j)$ für ein $j \neq i$. Wegen Lemma 6 gilt dann $h' \in V(w_i)$, falls $i < j$ ist, und $h' \in V(w_j)$, falls $i > j$ ist. Also trennt $\bigcup_{k \leq i} V(w_k)$ den Baum B_i von $\tilde{B} \backslash B_i$. $\square$

Bemerkung: Korollar 1 besagt, daß die Eckenmenge $\bigcup_{k \leq i} V(w_k)$ den Baum B_i in G von allen anderen Bäumen aus $\mathcal{B}$ und von H trennt.

Korollar 2: *Für alle $B_i \in \mathcal{B}$ und $x, y \in V(B_i)$ trennt die Eckenmenge $\bigcup_{k \leq i} V(w_k) \cup (f(x) \cap f(y))$ die Ecken x und y in G.*

Beweis: Es seien $B_n \in \mathcal{B}$ und $x, y \in V(B_n)$ beliebig aber fest gewählt.
Falls eine von beiden Ecken in Fallinie der anderen liegt, trennt $f(x) \cap f(y)$ die beiden Ecken trivialerweise.
Andernfalls sei w ein x-y-Weg aus G, der $\bigcup_{i \leq n} V(w_i)$ vermeidet. Wir zeigen nun, daß w eine Ecke aus $f(x) \cap f(y)$ enthält: Nach Korollar 1 trifft w den Baum $\tilde{B}$ nur in B_n. Es sei z die zu $f(x) \cap f(y)$ benachbarte Ecke aus $f(x) \backslash f(y)$ und v die erste Ecke aus $w \cap B_n$ mit $z \notin f(v)$.
Ein solches v existiert, denn angenommen z liegt in Fallinie von jeder Ecke aus $B_n \cap w$. Es sei x' die Ecke aus $w \cap B_n$ mit minimalem Abstand zu y. Dann ist der Weg $x'wy$ ein $\tilde{B}$-$\tilde{B}$-Weg. Da z in Fallinie von x' liegt, liegt keine der beiden Ecken x' und y in Fallinie der anderen, im Widerspruch zu Lemma 4.
Es sei u die letzte Ecke vor v aus $w \cap B_n$. Die Ecke u existiert, da x Ecke von w ist. Dann ist uwv ein $\tilde{B}$-$\tilde{B}$-Weg. Da z in Fallinie von u, aber nicht in Fallinie von v liegt, liegt u nicht in Fallinie von v. Wegen Lemma 4 liegt v dann in Fallinie von u. Da $v \neq z$ ist, gilt dann aber $v \in f(x) \cap f(y)$.
Damit haben wir gezeigt, daß jeder x-y-Weg in G eine Ecke aus $\bigcup_{k \leq i} V(w_k) \cup (f(x) \cap f(y))$ enthält. Folglich trennt diese Menge die beiden Ecken x und y in G. $\square$

Mit Hilfe von Korollar 1 sind wir in der Lage, das oben erwähnte Lemma 7 zu beweisen:

Lemma 7: *Die Bäume aus $\mathcal{B}$ enthalten keine unendlichen Wege.*

Beweis: Angenommen es gibt einen Baum $B_n \in \mathcal{B}$, welcher einen unendlichen Weg w enthält. Nach Konstruktion der Bäume gibt es dann eine unendliche Eckenmenge $A \subseteq S^*$, welche nicht durch eine endliche Eckenmenge von G von w getrennt werden kann.
Wegen Korollar 1 trennt $S' := \bigcup_{j \leq n} V(w_j)$ den Baum B_n, und damit auch w, in G von H. Daher gehört w nicht zu ω^*. Es sei $\omega \in \Omega(G)$ das Ende, das w enthält; S_m sei die Eckenmenge aus der Konstruktion von S^*, die ω und ω^* trennt (diese existiert, da $\tilde{S}$ den uniformen Raum $\Omega(G)$ erzeugt). Dann trennt S_m unendlich viele Ecken aus A von ω^*. Dies ist aber ein Widerspruch zu $A \subseteq S^*$. $\square$

Im folgenden sei $\eta : \Omega(G') \rightarrow \Omega(G)$ die Abbildung, die jedes Ende von $\Omega(G')$ auf das Ende von $\Omega(G)$ abbildet, das es als Teilmenge enthält (vgl. Kapitel 1.1). Wir zeigen nun, daß G' gleichmäßig endengleich zu G ist.

Hilfssatz 1: *Die Abbildung $\eta : \Omega(G') \rightarrow \Omega(G)$ ist ein Isomorphismus uniformer Räume.*

Den Beweis dieses Satzes gliedern wir in zwei Teile. In Teil 1) zeigen wir die Bijektivität von η, in Teil 2) die gleichmäßige Stetigkeit der Abbildungen η und η^{-1}.
Für den Beweis von Teil 1) benötigen wir die folgenden Lemmata:

Lemma von König: [H3] *Jeder unendliche lokalendliche Baum enthält einen unendlichen Weg.*

Lemma 8: *Für jeden Teilgraphen $\tilde{G}$ von G mit $\tilde{B} \subseteq \tilde{G}$ gilt: Jeder Strahl T von $\tilde{G}$ mit unendlich vielen paarweise disjunkten T-S^*-Wege in $\tilde{G}$ ist in $\tilde{G}$ äquivalent zu H.*

Beweis: Sei T ein Strahl aus $\tilde{G}$, zu dem unendlich viele paarweise disjunkte T-S^*-Wege in $\tilde{G}$ existieren. Ferner sei $\mathcal{W}$ eine unendliche Menge solcher Wege; mit $V_e(\mathcal{W}) \subset S^*$ bezeichnen wir die Menge der Endecken, mit $V_a(\mathcal{W}) \subset T$ die Menge der Anfangsecken der Wege aus $\mathcal{W}$.
Dann gilt für jede unendliche Teilmenge $V \subset V_e(\mathcal{W})$: Keine endliche Eckenmenge von $\tilde{G}$ trennt alle Ecken aus V voneinander.
Angenommen es gilt $T \not\sim H$ in $\tilde{G}$. Dann gibt es nur endlich viele Bäume aus $\mathcal{B}$, die Ecken aus $V_e(\mathcal{W})$ enthalten. Da $V_e(\mathcal{W})$ unendlich ist, gibt es folglich mindestens einen Baum $B_n \in \mathcal{B}$, der unendlich viele dieser Ecken enthält. Wir setzen $A := V_e(\mathcal{W}) \cap V(B_n)$. Da A unendlich ist, gibt es wegen Lemma 7 und dem Lemma von König eine Ecke v aus B_n mit unendlich vielen v-A-Wege in B_n, die bis auf v paarweise disjunkt sind. Es bezeichne $\tilde{\mathcal{W}}$ eine unendliche Menge solcher v-A-Wege und $A' \subset A$ die Menge der zugehörigen Endecken aus A.
Dann gilt $f(x) \cap f(y) \subseteq f(v)$ für je zwei Ecken $x, y \in A'$. Wegen Korollar 2 trennt somit $S = \bigcup_{j<i} V(w_j) \cup f(v)$ je zwei Ecken aus A' in G. Da A' unendliche Teilmenge von $V_e(\mathcal{W})$ und S endlich ist, steht dies aber im Widerspruch zu unseren obigen Betrachtungen. Also ist T in $\tilde{G}$ äquivalent zu H. $\square$

Lemma 9: *Für jeden Teilgraphen $\tilde{G} \subseteq G'$ mit $\tilde{B} \cup \tilde{C} \subseteq \tilde{G}$ gilt: Jeder Strahl T aus $\tilde{G}$, zu dem in $\tilde{G}$ nur endlich viele disjunkte T-S^*-Wege existieren, enthält entweder ein Teilstrahl von H oder es gibt eine Komponente von $\mathcal{C}$, die einen Teilstrahl von T enthält.*

Beweis: Es sei $\tilde{G}$ ein Teilgraph von G' mit $\tilde{B} \cup \tilde{C} \subseteq \tilde{G}$ und T ein Strahl von $\tilde{G}$, zu dem in $\tilde{G}$ nur endlich viele paarweise disjunkte T-S^*-Wege existieren.
Dann enthält T höchstens endlich viele Ecken aus S^*. Es sei $\tilde{T}$ ein Teilstrahl von T, der keine Ecke aus S^* enthält. Da die Komponenten aus $\mathcal{C}$ in G', und damit auch in $\tilde{G}$, nur über Ecken aus S^* mit dem Restgraphen $G \backslash \tilde{C}$ verbunden sind, liegt $\tilde{T}$ entweder in einer Komponente $C \in \mathcal{C}$ oder in $G \backslash \tilde{C} \subset \tilde{B}$. Angenommen letzteres ist der Fall. Da $\tilde{B}$ kreisfrei ist, und die Bäume aus $\mathcal{B}$ wegen Lemma 7 keine unendlichen Wege enthalten, gibt es dann einen Teilstrahl von $\tilde{T}$, welcher auch Teilstrahl von H ist. $\square$

Von nun an bezeichnen wir mit C_G bzw. $C_{G'}$ für jedes $C \in \mathcal{C}$ den Teilgraphen von G, den man durch Streichung aller S^*-S^*-Kanten aus C_G^+ bzw. $C_{G'}^+$ erhält.

Lemma 10: *Zu jedem Strahl $T \in \omega^*$ aus G', der keinen Teilstrahl von H enthält, gibt es unendlich viele paarweise disjunkte T-S^*-Wege in G'.*

Beweis: Angenommen es gibt einen Strahl $T \in \omega^*$ aus G', der keinen Teilstrahl von H enthält und zu dem nur endlich viele paarweise disjunkte T-S^*-Wege in G' existieren. Dann gibt es wegen Lemma 9 eine Komponente $C \in \mathcal{C}$ und einen Teilstrahl $\tilde{T}$ von T, derart daß gilt $\tilde{T} \subset C$.
Da C_G und $C_{G'}$ identisch sind und C nur über Ecken aus S_C^* Verbindung zum Restgraphen $G \backslash C$ hat, existieren dann auch in G nur endlich viele paarweise disjunkte $\tilde{T}$-S^*-Wege. Dann kann H nur endlich viele Ecken aus S_C^* enthalten, denn T ist in G äquivalent zu H.
Nach Wahl von H enthält H unendlich viele Hauptecken eines $K_{\aleph_0}$ oder dicken $TK_{\aleph_0}$, welche wegen Lemma 3 nicht in C liegen. Daher besitzt H keinen Teilstrahl in C.
Da H aber auch nur endlich viele Ecken aus $S_C^* = N_G(C)$ enthält, besitzt H einen Teilstrahl $\tilde{H}$, welcher außerhalb von C_G^+ liegt. Die beiden Strahlen $\tilde{T}$ und $\tilde{H}$ liegen somit in verschiedenen Komponenten von $G - S_C^*$. Da auch in G höchstens endlich viele paarweise disjunkte $\tilde{T}$-S_C^*-Wege existieren, gilt dann $T \not\sim H$ in G, im Widerspruch zu $T \in \omega^*$. $\square$

Im folgenden bezeichnen wir mit $\omega, \omega', \ldots$ Enden von G und mit $\alpha, \alpha', \ldots$ Enden von G'. Wir kommen nun zum Beweis von Hilfssatz 1:

Teil 1):

Zunächst beweisen wir, daß η injektiv ist. Dazu zeigen wir, daß zwei Strahlen T und $\tilde{T}$ aus G', die in G äquivalent sind, auch in G' äquivalent sind. Denn dann gilt für je zwei Enden $\alpha, \tilde{\alpha} \in \Omega(G') : \eta(\alpha) = \eta(\tilde{\alpha})$ impliziert $\alpha = \tilde{\alpha}$, d.h. η ist injektiv.
Es seien also T und $\tilde{T}$ zwei Strahlen aus G', die in G äquivalent sind; ω sei das zugehörige Ende von G, das diese beiden Strahlen enthält. Wir betrachten getrennt

die Fälle $\omega \neq \omega^*$ und $\omega = \omega^*$:
Falls $\omega \neq \omega^*$ ist, gibt es wegen Lemma 2 eine Komponente $C \in \mathcal{C}$, die ω enthält. Da $\tilde{C}$ Teilgraph von G' ist, folgt aus der Definition von "enthalten" sofort die Äquivalenz von T und $\tilde{T}$ in G'.
Falls $\omega = \omega^*$ ist, genügt es zu zeigen, daß jeder Strahl von ω^* aus G' in G' äquivalent zu H ist. Da $\tilde{B}$ ein Teilgraph von G' ist, folgt diese Behauptung aber sofort aus Lemma 8 und 10. Damit haben wir gezeigt, daß η injektiv ist.
Wir zeigen nun, daß η auch surjektiv ist. Wegen Lemma 2 gibt es zu jedem Ende $\omega \in \Omega(G), \omega \neq \omega^*$, eine Komponente $C \in \mathcal{C}$, die ω enthält. Alle Komponenten aus $\mathcal{C}$ sind in G' enthalten. Daher gibt es in G' von jedem Ende $\omega \neq \omega^*$ mindestens einen Strahl. Da H ein Strahl von ω^* und in G' enthalten ist, enthält G' auch einen Strahl aus ω^*.
Das zu einem Strahl zugehörige Ende von G' wird nach Definition von η auf das Ende von G abgebildet, das diesen Strahl in G enthält. Somit gibt es zu jedem Ende $\omega \in \Omega(G)$ ein Ende $\alpha \in \Omega(G')$ mit $\eta(\alpha) = \omega$. Also ist η surjektiv. □

Da η bijektiv ist, gibt es eindeutig ein Ende $\alpha^* \in \Omega(G')$ mit $\eta(\alpha^*) = \omega^*$.
Im folgenden werden wir die Komponenten aus $\mathcal{C}$ zum einen als Teilgraphen von G, zum anderen als Teilgraphen von G' betrachten. Aus dem Zusammenhang wird dann jeweils klar sein, um wessen Teilgraphen es sich handelt. Wenn wir z.B. sagen $C \in \mathcal{C}$ enthält das Ende ω bzw. α, dann meinen wir damit den Teilgraphen von G bzw. von G'. Dasselbe gilt für Teilgraphen der Komponenten aus $\mathcal{C}$.
Für Teil 2) des Beweises von Hilfssatz 1 benötigen wir Lemma 11:

Lemma 11: *Jede Komponente $C \in \mathcal{C}$ enthält genau die Enden $\alpha \in \Omega(G')$, deren Bild $\eta(\alpha) \in \Omega(G)$ in C enthalten ist.*

Beweis: Sei $\alpha \in \Omega(G')$ gegeben. Da η bijektiv ist, gibt es genau ein Ende $\omega \in \Omega(G)$ mit $\eta(\alpha) = \omega$.
Falls $\alpha = \alpha^*$ ist, ist ω^* das zugehörige Ende von G. Da H ein Strahl von ω^* ist, der keinen Teilstrahl besitzt, welcher in einer Komponente aus $\mathcal{C}$ liegt, ist ω^* in keiner Komponente aus $\mathcal{C}$ enthalten. Dann ist aber auch α^* in keiner Komponente aus $\mathcal{C}$ enthalten, denn H ist ein Strahl von G'.
Sei nun $\alpha \neq \alpha^*$. Da α Teilmenge von ω ist, folgt aus der Definition von "enthalten" sofort, daß auch α in C enthalten ist. Wir zeigen nun die umgekehrte Richtung: Es sei C eine beliebige Komponente aus $\mathcal{C}$, und α sei in C enthalten. Dann gilt $\omega \neq \omega^*$ wegen der Bijektivität von η. Wegen Lemma 2 gibt es daher eine Komponente $C' \in \mathcal{C}$, die ω enthält. Da α Teilmenge von ω ist, folgt $C = C'$. □

Korollar 3: *Jedes Ende $\alpha \in \Omega(G'), \alpha \neq \alpha^*$, ist in einer Komponente $C \in \mathcal{C}$ enthalten.*

Beweis: Wegen Lemma 2 ist jedes Ende $\omega \in \Omega(G)$, $\omega \neq \omega^*$, in einer Komponente $C \in \mathcal{C}$ enthalten. Dann folgt aus der Bijektivität von η und Lemma 11 sofort die Behauptung. □

Für den Beweis von Teil 2) benötigen wir außerdem folgende Betrachtungen: Es sei $S \subset V(G)$ eine beliebige endliche Eckenmenge. Dann gibt es genau eine Komponente

$C^*(S)$ von $G\backslash S$, die Teilstrahlen von H enthält. Da die Bäume aus $\mathcal{B}$ über H linear angeordnet sind und S endlich ist enthält $C^*(S)$ alle bis auf endlich viele Bäume aus $\mathcal{B}$. Es sei m minimal mit $B_i \subset C^*(S)$, für alle $i > m$, und n :=max$\{i \in \mathbb{N} | V(w_i) \cap S \neq \emptyset\}$. Wir setzen $A_1(S) := \bigcup_{i \leq r} V(w_i)$ mit r :=max$\{n, m\}$ und $A_2(S) := (S^* \cap V(H)) \backslash V(C^*(S))$.
Man beachte, daß $A_1(S)$ die Fallinien $f(t)$ der Ecken t aus $S \cap V(W)$ enthält.

Dann gilt folgendes Lemma:

Lemma 12: *Für jedes endliche $S \subset V(G)$ gilt:*
(i) Trennt S zwei Ecken aus $S^* \cap W$ in $\tilde{B}$, so trennt $S \cup A_1(S)$ diese Ecken in G;
(ii) trennt S zwei Ecken aus $S^* \cap V(H)$ in $\tilde{B}$, so trennt $S \cup A_2(S)$ diese Ecken in G;
(iii) trennt S eine Ecke aus S^* in $\tilde{B}$ von H, so trennt $S' \cup A_1(S) \cup A_2(S)$ diese Ecke in G von H;
(iv) trennt S zwei Ecken aus S^* in $\tilde{B}$, so trennt $S' \cup A_1(S) \cup A_2(S)$ diese Ecken in G.

Beweis: (i) Wir zeigen zunächst, daß $S \cup A_1(S)$ die Ecken aus verschiedenen Bäumen in G trennt, die durch S in $\tilde{B}$ getrennt werden.
Wegen Korollar 1 trennt $A_1(S)$ in G jeden Baum B_i mit Index $i \leq m \leq r$ von allen anderen Bäumen aus $\mathcal{B}$. Da B_m der Baum mit maximalem Index ist, der nicht vollständig in $C^*(S)$ liegt, trennt $A_1(S) \cup S$ jeden Baum in G, der nicht vollständig in $C^*(S)$ liegt, von allen anderen Bäumen. Für alle $B_i, B_j \in \mathcal{B}$ mit $i \neq j$ und für alle $t \in V(B_i), t' \in V(B_j)$ gilt also: $t \not\sim_S t'$ in $\tilde{B}$ impliziert $t \not\sim_{S \cup A_1(S)} t'$ in G.
Wir zeigen jetzt, daß $A_1(S) \cup S$ auch die Ecken eines Baumes B_i, die von S in $\tilde{B}$ getrennt werden, in G trennt. Dazu seien $h, h' \in V(B_i)$ so gegeben, daß h und h' in verschiedenen Komponenten von $\tilde{B} - S$ liegen. Dies ist nur dann der Fall, wenn $i < r$ ist, und eine Ecke $v \in V(B_i) \cap S$ existiert mit $f(v) \supseteq (f(h) \cap f(h'))$. Da $A_1(S)$ die Fallinie von jeder Ecke aus $S \cap V(W)$ enthält, gilt $A_1(S) \supseteq \bigcup_{j \leq i} V(w_j) \cup (f(h) \cap f(h'))$.
Wegen Korollar 2 trennt $A_1(s)$ daher h und h' in G.
Somit gilt für alle $t, t' \in V(W)$: $t \not\sim_S t'$ in $\tilde{B}$ impliziert $t \not\sim_{A_1(S) \cup S} t'$ in G. $S \cup A_1(S)$ trennt daher in G die Ecken von $S^* \cap W$, die durch S in $\tilde{B}$ getrennt werden.

(ii) Trennt S zwei Ecken aus $S^* \cap H$ in $\tilde{B}$, so liegen diese nicht beide in $C^*(S)$. Nach Definition von $A_2(S)$ liegt dann mindestens eine dieser Ecken in $A_2(S)$. Folglich trennt $A_2(S)$ diese beiden Ecken.

(iii) Es sei h eine Ecke aus S^*, die S in $\tilde{B}$ von H trennt. Da $C^*(S)$ nach Definition sämtliche Teilstrahlen von H aus $\tilde{B} \backslash S$ enthält, liegt h nicht in $C^*(S)$. Ist h eine Ecke von H, so liegt h in $A_2(S)$, und $A_2(S)$ trennt h von H in G.
Andernfalls ist h Ecke eines Baumes $B_i \in W$ mit Index $i \leq r$. Dann trennt $A_1(S)$ den Baum B_i (und damit h) von H.
In beiden Fällen trennt somit $S \cup A_1(S) \cup A_2(S)$ die Ecke h in G von H.

(iv) Es seien h, h' zwei Ecken aus S^*, die S in $\tilde{B}$ trennt. Falls beide Ecken aus W oder beide Ecken aus H sind, so folgt die Behauptung aus (i) und (ii). Andernfalls sei o.b.d.A. $h \in V(H)$ und $h' \in V(B_i)$ für ein $B_i \in W$. Da S die beiden Ecken h und h' trennt, liegen nicht beide Ecken in $C^*(S)$. Falls h nicht in $C^*(S)$ liegt, gilt $h \in A_2(S)$; dann trennt $A_2(S)$ die Ecken h und h' in G. Falls h in $C^*(S)$ liegt, ist

B_i kein Teilgraph von C^*, d.h. es gilt $i \leq r$. Dann trennt $A_1(S)$ wegen Korollar 1 den Baum B_i in G von H, und da jeder Teilstrahl von H in $G - S$ in $C^*(S)$ liegt, trennt $A_1(S)$ somit die Ecken h und h' in G.
In jedem Fall trennt somit $S \cup A_1(S) \cup A_2(S)$ die Ecken h und h' in G. $\square$

Teil 2):

Wie wir in Kapitel 1 gesehen haben, ist η gleichmäßig stetig. Wir müssen also nur noch nachweisen, daß η^{-1} gleichmäßig stetig ist. Dazu zeigen wir, daß zu jeder endlichen Menge $S' \subset V(G')$ eine endliche Menge $S \subset V(G)$ existiert, so daß für alle $\alpha, \alpha' \in \Omega(G')$ mit $\alpha \not\sim_{S'} \alpha'$ gilt: $\eta(\alpha) \not\sim_S \eta(\alpha')$.

Es sei $S' \subset V(G)$ eine beliebige endliche Menge. Wir zeigen nun, daß $S := S' \cup A_1(S') \cup A_2(S')$ das Gewünschte leistet.
Dazu betrachten wir zunächst ein beliebiges Ende $\alpha \in \Omega(G')$, $\alpha \neq \alpha^*$ mit $\eta(\alpha) = \omega \in \Omega(G)$. Wegen Korollar 3 gibt es eine Komponente aus $C \in \mathcal{C}$, die α enthält. Ferner gibt es eine Komponente C_α von $C - S'$, die α enthält, denn S' ist endlich. Wir setzen $S_\alpha := N_{G'-S'}(C_\alpha)$; da C_α eine Komponente von $C - S'$ ist, gilt $S_\alpha \subseteq S^*$. Ferner gilt $S_\alpha = N_{G-S'}(C_\alpha)$, denn $N_G(C)$ und $N_{G'}(C)$ sind identisch. Dann ist C_α in $G - S'$ nur über Ecken aus S_α mit $G \backslash C_\alpha$ verbunden.
Da ω wegen Lemma 11 ebenfalls in C enthalten ist und S endlich ist, gibt es eine Komponente C_ω von $C - S$, die ω enthält. $C - S$ zerfällt aber in feinere Komponenten als $C - S'$, denn S ist Obermenge von S'. Dann folgt aus der Definition von η, daß C_ω ein Teilgraph von C_α ist.
Daher kann C_ω in $G - S$ ebenfalls nur über Ecken aus S_α mit $G \backslash C_\alpha$ verbunden sein.

Es seien nun $\alpha, \alpha' \in \Omega(G')$, mit $\alpha \not\sim_{S'} \alpha'$, beliebig gegeben; ω, ω' seien die zugehörigen Enden aus $\Omega(G)$.

Zunächst betrachten wir den Fall $\alpha, \alpha' \neq \alpha^*$.
C und C' seien die Komponenten aus $\mathcal{C}$, die α bzw. α' enthalten (diese existieren wegen Korollar 3). C_α, C_ω, $C_{\alpha'}$ und $C_{\omega'}$, sowie S_α und $S_{\alpha'}$ seien wie oben definiert. Man beachte daß $S_\alpha \cap S_{\alpha'}$ leer ist und C_α und $C_{\alpha'}$ disjunkt sind, denn S' trennt α und α'. Also sind auch C_ω und $C_{\omega'}$ disjunkt.
Da ω in C_ω enthalten ist, können wir zu jedem Strahl $T \in \omega$ einen Teilstrahl R_T so wählen, daß $V(R_T) \subset V(C_\omega)$ ist. Analog können wir zu jedem Strahl T' von ω' einen Teilstrahl $R_{T'}$ wählen, so daß $V(R_{T'}) \subset V(C_{\omega'})$ ist.
Wie wir oben gesehen haben, ist C_ω in $G - S$ nur über Ecken aus S_α mit $G \backslash C_\alpha$ verbunden. Dasselbe gilt für $C_{\omega'}, S_{\alpha'}$ und $G \backslash C_{\alpha'}$. Da C_α und $C_{\alpha'}$ disjunkt sind, muß daher jeder C_ω-$C_{\omega'}$-Weg in $G - S$ mindestens eine Ecke aus S_α und eine Ecke aus $S_{\alpha'}$ enthalten. Dann enthält aber auch jeder R_T-$R_{T'}$-Weg in $G - S$ mindestens eine Ecke aus $\tilde{S}_\alpha$ und eine Ecke aus $\tilde{S}_{\alpha'}$.
Da S' die Enden α und α' in G' trennt, trennt S' in G' die Eckenmengen S_α und $S_{\alpha'}$. Wegen Lemma 12 (iv) trennt dann S diese Mengen in G. Also existiert kein R_T-$R_{T'}$-Weg in $G - S$; somit gilt: $\omega \not\sim_S \omega'$.

Es sei nun $\alpha' = \alpha^*$, $\alpha \neq \alpha^*$.
Auch hier können wir zu jedem beliebigen Strahl $T \in \omega$ einen Teilstrahl R so wählen, daß $V(R) \subset V(C_\omega) \subset V(C_\alpha)$ ist.
Weil S' die beiden Enden α und α^* trennt, gibt es in $G' - S'$ einen Teilstrahl R_H von H, so daß $V(R_H) \cap V(C_\alpha) = \emptyset$ ist. Dann enthält jeder R-R_H-Weg aus $G - S$ mindestens eine Ecke aus S_α. Ferner trennt S' die Eckenmenge S_α in G' von H. Wegen Lemma 12 (iii) trennt dann S die Menge S_α in G von H und damit von R_H. Also existiert kein R-R_H-Weg in $G - S$ und es gilt: $\omega \not\sim_S \omega^*$.

Damit haben wir bewiesen, daß für alle $\alpha, \alpha' \in \Omega(G')$ mit $\alpha \not\sim_{S'} \alpha'$ gilt: $\eta(\alpha) \not\sim_S \eta(\alpha')$. Der Beweis von Hilfssatz 1 ist damit vollständig. □

Nun zeigen wir noch, daß G' keinen $K_{\aleph_0}$ von ω^* enthält:

Lemma 13: *G' enthält keinen $K_{\aleph_0}$ von ω^*.*

Beweis: Diese Behauptung folgt direkt aus Lemma 3, denn es gilt $G' \backslash \tilde{C} \subset \tilde{B}$ und $\tilde{B}$ ist ein Baum. □

Bemerkung: Damit haben wir gezeigt, daß der Graph $G' \subset G$ zusammenhängend und gleichmäßig endengleich zu G ist und keinen $K_{\aleph_0}$ von ω^* enthält.

2.3 Beseitigung der dicken $TK_{\aleph_0}$ von ω^* aus G: Erster Teil

Wie wir bereits in Kapitel 2.2 gesehen haben, enthält α^* keinen $K_{\aleph_0}$. Dicke $TK_{\aleph_0}$ von ω^* können aber durchaus in G' vorhanden sein, und gehören dann offensichtlich zu α^*. Die Hauptecken dieser dicken $TK_{\aleph_0}$ liegen, wie wir im nächsten Lemma sehen werden, in S^*. Wenn wir daher aus G' so viele in S^* endende Kanten streichen, daß in dem dadurch entstandenen Graphen jede Menge paarweise semidisjunkter S^*-S^*-Wege mit identischen Anfangs- und Endecken abzählbar ist, dann enthält der entstandene Graph keinen dicken $TK_{\aleph_0}$ von α^*.
In diesem und dem nächsten Kapitel werden wir eine solche Menge von S^*-S^*-Kanten bestimmen. Der durch Streichung dieser Kantenmenge aus G' entstandene Graph wird außerdem gleichmäßig endengleich zu G' (und damit zu G) sein.

Lemma 14: *Die Hauptecken der dicken $TK_{\aleph_0}$ von α^* liegen in S^*.*

Beweis: Angenommen G' enthält einen zu α^* zugehörigen dicken $TK_{\aleph_0}$. Dieser ist in G dann ein dicker $TK_{\aleph_0}$ von ω^*.
Jede Hauptecke eines dicken $TK_{\aleph_0}$ hat überabzählbaren Grad. Da wegen Lemma 3 die Hauptecken eines dicken $TK_{\aleph_0}$ von ω^* nicht in $\tilde{C}$ liegen, müssen sie in $G \backslash \tilde{C} = \tilde{B} \backslash \tilde{C}$ enthalten sein.
$\tilde{B}$ ist jedoch abzählbar. Daher haben in G' nur solche Ecken aus $\tilde{B} \backslash \tilde{C}$ überabzählbaren Grad, die zu $\tilde{C}$ benachbart sind. Diese Ecken sind aber in S^*. □

Es folgen nun einige Lemmata über Eigenschaften der Komponenten aus $\mathcal{C}$.

Lemma 15: *Jede Komponente $C \in \mathcal{C}$ mit unendlichem S_C^* enthält Ecken aus $\tilde{S}$.*

Beweis: Angenommen es gibt eine Komponente $C \in \mathcal{C}$ mit unendlichem S_C^*, für die $\tilde{S} \cap V(C)$ leer ist. Es sei $\omega \neq \omega^*$ ein Ende von G, welches in C enthalten ist (nach Definition von $\mathcal{C}$ existiert mindestens ein solches Ende). Da $\tilde{S}$ die uniforme Struktur $\Omega(G)$ erzeugt, gibt es eine endliche Menge $S \subset \tilde{S}$, die ω und ω^* trennt. Dann existiert aber eine Teilmenge S_n von $\tilde{S}$ aus der Konstruktion von S^* mit $S_n \supseteq S$, die ω und ω^* trennt.
Ist $C_n \neq C_n^*$ die Komponente von $G - S_n$, die ω enthält, so gilt $C \subset C_n$, da C nach Voraussetzung keine Ecken aus $\tilde{S}$ enthält; somit gilt $V(C) \cup S_C^* \subset V(C_n) \cup S_n$. Da S_C^* unendlich, S_n aber endlich ist, gilt dann $\emptyset \neq S^* \cap C_n \subset S^n \cap C_n$. Dies widerspricht der Definition von S^n. $\square$

Korollar 4: *Nur für abzählbar viele Komponenten $C \in \mathcal{C}$ ist S_C^* unendlich.*

Beweis: Da die Komponenten aus $\mathcal{C}$ disjunkt sind und $\tilde{S}$ abzählbar ist, kann nur für endlich viele Komponenten $C \in \mathcal{C}$ gelten $V(C) \cap \tilde{S} \neq \emptyset$. Aus Lemma 15 folgt daher die Behauptung. $\square$

Lemma 16: ([D1]) *Es seien U und C disjunkte Teilgraphen eines Graphen G, derart daß U unendlich ist, jede Ecke aus U Nachbarn in C besitzt und C zusammenhängend ist. Dann enthält G entweder einen unendlichen v-U-Fächer für ein v aus C, oder es gibt einen Strahl $R \subset C$, zu dem unendlich viele paarweise disjunkte R-U-Wege in G existieren.*

Lemma 17: *Für die Komponenten $C \in \mathcal{C}$ gilt: C_G enthält keinen v-S^*-Fächer mit v aus C.*

Beweis: Angenommen es gibt eine Komponente $C \in \mathcal{C}$, derart daß C_G einen v-S^*-Fächer mit v aus C enthält. Dann muß S_C^* unendlich sein. Wegen Lemma 13 gibt es dann in C Ecken aus $\tilde{S}$. Daher können wir eine Ecke $s \in \tilde{S} \cap V(C)$ wählen, so daß in C ein s-v-Weg existiert, welcher außer s keine Ecke aus $\tilde{S}$ enthält. Dann gibt es keine endliche Teilmenge von $\tilde{S} \backslash \{s\}$, die s von S_C^* trennt. Daher hat s in jedem Schritt k der Konstruktion von S^* Nachbarn in C_k^*. Somit gilt $s \in S^*$, im Widerspruch zu $s \in V(C)$. $\square$

Lemma 18: *Für $C \in \mathcal{C}$ ist S_C^* genau dann unendlich, wenn C einen Strahl aus ω^* enthält.*

Beweis: '$\Rightarrow$' : Es sei $C \in \mathcal{C}$ eine Komponente mit unendlichem S_C^*. Da S_C^* disjunkt zu C ist, jede Ecke aus S_C^* nach Definition einen Nachbarn in C besitzt und C zusammenhängend ist, gibt es wegen Lemma 16 und 17 in G einen Strahl T aus C, zu dem unendlich viele paarweise disjunkte T-S^*-Wege existieren. Wegen Lemma 8 gilt dann aber $T \in \alpha^* \subset \omega^*$.

'$\Leftarrow$' : Es sei $T \subset C$ ein Strahl aus ω^* und $w_1, w_2, ...$ seien unendlich viele paarweise disjunkte T-H-Wege in G. Nach Wahl von H und Lemma 3 besitzt H keinen Teilstrahl in $\mathcal{C}$. Ist $H \cap C$ unendlich, so enthält H unendlich viele C-S^*-Kanten mit paarweise verschiedenen Endecken; dann ist S^*_C aber unendlich. Ist $H \cap C$ endlich, so treffen alle bis auf endlich viele der Wege w_i die Menge S^*_C, und wiederum ist S^*_C unendlich. $\square$

Unser Ziel ist es, einen gleichmäßig endengleichen Teilgraphen von G zu konstruieren, in dem kein $K_{\aleph_0}$ oder dicker $TK_{\aleph_0}$ zu dem ω^* entsprechenden Ende gehört. Wie schon zu Beginn dieses Kapitels erwähnt wurde, erhalten wir einen solchen Graphen, wenn wir so viele in S^* endende Kanten aus G' streichen, daß in dem dadurch entstandenen Graph jede Menge paarweise semidisjunkter S^*-S^*-Wege abzählbar ist.
Nach Definition von G' gilt $N_{G'}(S^*) \subset \tilde{B} \cup \tilde{C}$, d.h. die Ecken aus S^* haben in G' nur Nachbarn in $\tilde{B} \cup \tilde{C}$. Da $\tilde{B}$ jedoch abzählbar ist, ist jede Menge paarweise disjunkter S^*-S^*-Wege aus $\tilde{B}$ abzählbar. Es genügt daher nur solche S^*-S^*-Wege mit inneren Ecken aus $\tilde{C}$ zu betrachten, und aus G' nur S^*-$\tilde{C}$-Kanten zu streichen. Dies werden wir in zwei Schritten ausführen:
Im ersten Schritt streichen wir nur solche S^*-$\tilde{C}$-Kanten aus G', die in den Komponenten $C \in \mathcal{C}$ mit endlichem S^*_C enden. Der dadurch entstandene Graph G'' wird gleichmäßig endengleich zu G' sein und nur abzählbar viele unabhängige S^*-S^*-Wege über die Komponenten $C \in \mathcal{C}$ mit endlichem S^*_C enthalten.
Den zweiten Konstruktionsschritt, durch den wir dasselbe für die Komponenten $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ mit unendlichem S^*_C erreichen, führen wir dann im nächsten Kapitel aus. Wir kommen nun zur Konstruktion von G'':

Konstruktion von G'': Wir betrachten die Komponenten aus $\mathcal{C}$ mit endlichem S^*_C.
Da $S^* = \{t_1, t_2, ...\}$ abzählbar ist, existieren nur abzählbar viele endliche Teilmengen von S^*; es sei $X_1, X_2, ...$ eine Aufzählung derjenigen endlichen Teilmengen von S^*, die als S^*_C für ein $C \in \mathcal{C}$ auftreten.
Für jedes dieser X_i sei M_i die Menge aller $C \in \mathcal{C}$ mit $S^*_C = X_i$; ferner sei t^i die Ecke t_m aus X_i mit maximalem Index m.
Wir streichen nun zunächst aus G' alle Kanten zwischen S^* und den Komponenten aus $\mathcal{C}$ mit endlichem S^*_C, außer den Kanten aus $E(\tilde{B})$. Da $E(\tilde{B})$ abzählbar ist, bleiben nur abzählbar viele Kanten erhalten.
Für alle Indizes i verfahren wir nun folgendermaßen: Für jede Komponente $C \in M_i$ fügen wir eine t^i-C-Kante aus G' ein (nach Definition von G' hat jede Ecke aus S^*_C in G' einen Nachbarn in C). Der enstandene Graph sei der gesuchte Graph G''.

Bemerkung: Man beachte, daß G'' so konstruiert wurde, daß alle Komponenten aus $\mathcal{C}$, alle Bäume aus $\mathcal{B}$ und der Strahl H in G'' enthalten sind. Daher enthält G'' von jedem Ende von G' mindestens einen Strahl. Außerdem ist G' zusammenhängend, denn für jedes $C \in \mathcal{C}$ enthält G' mindestens eine S^*-C-Kante.

Im folgenden bezeichnen wir mit $\alpha, \alpha', ...$ Enden von G' und mit $\beta, \beta', ...$ Enden von G''; ferner bezeichne $C_{G'}$ bzw. $C_{G''}$ für jedes $C \in \mathcal{C}$ den Teilgraphen von G, den man durch Streichung aller S^*-S^*-Kanten aus $C^+_{G'}$ bzw. $C^+_{G''}$ erhält. Es sei

$\eta : \Omega(G'') \to \Omega(G')$ die Abbildung, die jedes Ende aus $\Omega(G'')$ auf das Ende aus $\Omega(G')$ abbildet, die es als Teilmenge enthält (vgl. Kapitel 1.1). Wir zeigen nun, daß G'' topologisch endengleich zu G' ist.

Hilfssatz 2: *Die Abbildung $\eta(G'') :\to \eta(G')$ ist ein Isomorphismus uniformer Räume.*

Der Beweis dieses Hilfssatzes erfolgt, wie der Beweis von Hilfssatz 1, in zwei Teilen. Im ersten Teil zeigen wir, daß η bijektiv ist, und im zweiten Teil, daß η^{-1} gleichmäßig stetig ist.
Zum Beweis von Teil 1) benötigen wir das folgende Analogon zu Lemma 10:

Lemma 19: *Zu jedem Strahl $T \in \omega^*$ aus G'', der keinen Teilstrahl von H enthält, gibt es unendlich viele paarweise disjunkte T-S^*-Wege in G''.*

Beweis: Es sei $T \in \omega^*$ ein Strahl aus G'', der keinen Teilstrahl von H enthält. Angenommen es gibt in G'' nur endlich viele paarweise disjunkte T-S^*-Wege. Da $\tilde{B} \cup \tilde{C}$ Teilgraph von G' ist, gibt es dann wegen Lemma 9 eine Komponente $C \in \mathcal{C}$ und einen Teilstrahl R von T mit $R \subset C$.
Da T ein Strahl von ω^* ist, der keinen Teilstrahl von H enthält, ist auch R ein solcher Strahl. Wegen Lemma 9 gibt es daher unendlich viele paarweise disjunkte R-S^*-Wege in G'; somit ist S^*_C unendlich. Dann sind nach Definition von G'' die Teilgraphen $C_{G''}$ und $C_{G'}$ identisch, d.h. es gibt auch in G'' unendlich viele paarweise disjunkte R-S^*-Wege. $\square$

Teil 1):

Da G'', wie oben bemerkt, aus jedem Ende von G' einen Strahl enthält, ist η surjektiv.
Zum Beweis der Injektivität von η seien T und $\tilde{T}$ Strahlen aus G'', welche in G' äquivalent sind. Ferner sei α das Ende aus $\Omega(G')$, das T und $\tilde{T}$ enthält.
Wir betrachten zunächst den Fall $\alpha \neq \alpha^*$. Wegen Korollar 3 existiert eine Komponente $C \in \mathcal{C}$, die α enthält. Daher gibt es einen Teilstrahl R von T und einen Teilstrahl $\tilde{R}$ von $\tilde{T}$ aus C, welche in C äquivalent sind. Da C in G'' enthalten ist, sind T und $\tilde{T}$ dann auch in G'' äquivalent.
Sei nun $\alpha = \alpha^*$. Es genügt zu zeigen, daß jeder Strahl von α^* aus G'' in G'' äquivalent zu H ist. Da $\tilde{B}$ Teilgraph von G'' ist, folgt dies aber direkt aus Lemma 8 und 19. Damit haben wir gezeigt, daß η injektiv ist; somit ist η bijektiv. $\square$

Wie wir eben bewiesen haben, ist η bijektiv. Daher gibt es genau ein Ende $\beta^* \in \Omega(G'')$ mit $\eta(\beta^*) = \alpha^*$.
Im folgenden werden wir die Komponenten aus $\mathcal{C}$ zum einen als Teilgraphen von G', zum anderen als Teilgraphen von G'' betrachten. Aus dem Zusammenhang wird dann jeweils klar sein, um wessen Teilgraphen es sich handelt. Dasselbe gilt für Teilgraphen der Komponenten aus $\mathcal{C}$.
Für den Beweis von Teil 2 benötigen wir das folgende Analogon zu Lemma 11:

Lemma 20: *Jede Komponente $C \in \mathcal{C}$ enthält genau die Enden $\beta \in \Omega(G'')$, deren Bild $\eta(\beta)$ in C enthalten ist.*

Beweis: Da η bijektiv ist, alle Komponenten aus $\mathcal{C}$ in G'' enthalten sind und jede dieser Komponenten wegen Lemma 11 in G' mindestens ein Ende aus $\Omega(G')$ enthält, läuft dieser Beweis völlig analog zum Beweis von Lemma 11. $\square$

Aus der Bijektivität von η erhalten wir sofort das folgende Korollar:

Korollar 5: *Jedes Ende $\beta \in \Omega(G'')$, $\beta \neq \beta^*$, ist in einer Komponente $C \in \mathcal{C}$ enthalten.*

Teil 2):

Aufgrund ihrer Definition ist die Abbildung η gleichmäßig stetig (siehe Kapitel 1.2). Wir zeigen jetzt, daß η^{-1} ebenfalls gleichmäßig stetig ist.

Es sei S' eine beliebige endliche Teilmenge von $V(G'')$. Wir suchen eine endliche Teilmenge $S \subset V(G')$, so daß für alle $\beta, \beta' \in \Omega(G'')$ mit $\beta \not\sim_{S'} \beta'$ gilt: $\eta(\beta) \not\sim_S \eta(\beta')$.

Dazu setzen wir zunächst $S'' := S' \cup A_1(S') \cup A_2(S')$. Da $\tilde{B}$ ein Teilgraph von G'' ist, trennt S'' in G' wegen Lemma 12 (iv) alle Ecken aus S^*, die S' in G'' trennt. Wegen Lemma 12 (iii) trennt S'' in G die Ecken aus S^* von H, die S' in G'' von H trennt; somit trennt S'' diese Ecken auch in G' von H.

Wir definieren nun eine weitere endliche Eckenmenge $A_3(S') \subset V(G')$. Falls $S' \cap S^*$ nicht leer ist, sei m_1 der maximale Index j aller t_j aus diesem Schnitt (dieser existiert, weil S' endlich ist); ansonsten setzen wir $m_1 = 0$. Falls $S' \cap \tilde{C}$ nicht leer ist, sei $m_2 := \max\{j \mid \exists C \in \mathcal{C} \text{ mit } |S^*_C| < \infty, t_j \in S^*_C \text{ und } V(C) \cap S' = \emptyset\}$; ansonsten sei $m_2 = 0$. Wir setzen $A_3(S') := \bigcup_{i \leq l} X_i$, wobei $l := \max\{m_1, m_2\}$ ist, und $S := S'' \cup A_3(S')$.

Wir zeigen nun, daß S das Gewünschte leistet. Dazu sei $\beta \in \Omega(G'')$, $\beta \neq \beta^*$, ein beliebiges Ende von G'' und $\alpha = \eta(\beta) \in \Omega(G')$. Ferner sei C die Komponente aus $\mathcal{C}$, die β enthält (diese existiert wegen Korollar 5). Da S' endlich ist, gibt es eine Komponente C_β von $C - S'$, die β enthält. Wir setzen $S_\beta := \{t \in S^*_C \mid t \sim_{S'} \beta \text{ in } G''\} \supseteq N_{G''-S'}(C_\beta)$.
Wegen Lemma 20 ist auch α in C enthalten. Da außerdem S eine endliche Obermenge von S' ist, gibt es eine Komponente $C_\alpha \subseteq C_\beta$ von $C - S$, die α enthält.

Als nächstes zeigen wir, daß gilt: $S_\beta \supseteq N_{G'-S}(C_\beta)$. Falls S^*_C unendlich ist, gilt $S_\beta = N_{G''-S'}(C_\beta)$. Ferner sind $N_{G''}(C)$ und $N_{G'}(C)$ identisch und S ist Obermenge von S'; somit gilt $S_\beta \supseteq N_{G''-S'}(C_\beta) \supseteq N_{G'-S}(C_\beta)$.
Es sei nun S^*_C endlich und M_n sei die Menge aus der Konstruktion von G'', die C enthält; dann ist $S^*_C = X_n$ und S' trennt die Eckenmengen S_β und $X_n \backslash S_\beta$ in G''. Da $\tilde{B} \subset G''$ ist und S_β und X_n Teilmengen von S^* sind, trennt $S'' \subseteq S$ diese Eckenmengen nach Lemma 12 (iv) in G und damit auch in G'. Weil jede Ecke aus X_n in G' zu C benachbart ist, tritt dann einer der folgenden Fälle ein:
(i) $V(C) \cap S'' \neq= \emptyset$
(ii) $V(C) \cap S'' = \emptyset$ und $S_\beta \subseteq S''$

(iii) $V(C) \cap S'' = \emptyset$ und $X_n \backslash S_\beta \subseteq S''$, d.h. $X_n \backslash S'' \subseteq S_\beta$.
Im ersten Fall ist $X_n \subseteq A_3(S')$ und damit $N_{G'-S}(C_\beta) = \emptyset$. Im zweiten Fall gilt entweder $t^n \in S_\beta \subseteq S''$ oder $S_\beta = \emptyset$ und damit $t^n \in S' \subseteq S''$; somit gilt ebenfalls $X_n \subseteq A_3(S')$ und damit $N_{G'-S}(C_\beta) = \emptyset$. Da $N_{G'-S}(C_\beta) \subseteq X_n \backslash S \subseteq X_n \backslash S''$ ist, ist der dritte Fall trivial.

Damit haben wir gezeigt, daß in allen Fällen $S_\beta \supseteq N_{G'-S}(C_\beta)$ ist.
Die Komponente C_β ist also in $G' - S$ nur über Ecken aus S_β mit $G' \backslash C_\beta$ verbunden. Da $C_\alpha \subseteq C_\beta$ ist und die Komponenten von $C - S$ feiner als die Komponenten von $C - S'$ sind, kann C_α in $G' - S$ ebenfalls nur über Ecken aus S_β mit $G' \backslash C_\beta$ verbunden sein. Entsprechendes gilt für $C_{\beta'}$, $C_{\alpha'}$ und $S_{\beta'}$.
Da S' die Enden β und β' in G'' trennt, andererseits für jede Ecke $t \in S_\beta$ gilt $t \sim_{S'} \beta$ während für jede Ecke $t' \in S_{\beta'}$ gilt $t' \sim_{S'} \beta'$, trennt S' die Eckenmengen S_β und $S_{\beta'}$ in G''. Wegen Lemma 12 (iv) trennt S diese Eckenmengen dann in G und damit auch in G'.
Der Rest dieses Beweises kann wörtlich aus dem Beweis von Hilfssatz 1 übernommen werden. Daher verzichten wir hier auf weitere Ausführungen.

Damit ist der Beweis von Hilfssatz 2 vollständig. □

Lemma 21: *Jede Menge $\mathcal{W}$ von paarweise semidisjunkten S^*-S^*-Wegen aus G'', derart daß zu jedem $w \in \mathcal{W}$ eine Komponente $C \in \mathcal{C}$ mit endlichem S^*_C und $w \subset C_{G''}$ existiert, ist abzählbar.*

Beweis: Nach Definition von G'' gibt es für jede Komponente $C \in \mathcal{C}$ mit endlichem S^*_C höchstens eine S^*-C-Kante, die nicht in $E(\tilde{B})$ liegt. Da $E(\tilde{B})$ abzählbar ist und die Komponenten aus $\mathcal{C}$ disjunkt sind, gibt es somit nur abzählbar viele $C \in \mathcal{C}$ mit endlichem S^*_C und mehr als einer S^*-C-Kante in G''. Es gibt daher nur abzählbar viele Komponenten $C \in \mathcal{C}$ mit endlichem S^*_C und einem S^*-S^*-Weg w mit $w \subset C_{G''}$ und jede dieser Komponenten besitzt nur abzählbar viele S^*-C-Kanten in G''. Folglich gibt es in G'' nur abzählbar viele paarweise semidisjunkte S^*-S^*-Wege w mit $w \subset C_{G''}$ für eine Komponente $C \in \mathcal{C}$ mit endlichem S^*_C. □

Bemerkung: Wegen Lemma 21 entsteht durch den Zusammenhang der Komponenten $C \in \mathcal{C}$ mit endlichem S^*_C kein dicker $TK_{\aleph_0}$, denn dieser enthält überabzählbar viele unabhängige S^*-S^*-Wege.

2.4 Beseitigung der dicken $TK_{\aleph_0}$ von ω^* aus G: Zweiter Teil

Wie wir im letzten Kapitel gezeigt haben, enthält G'' nur abzählbar viele paarweise semidisjunkte S^*-S^*-Wege über die Komponenten $C \in \mathcal{C}$ mit endlichem S^*_C. Jeder dicke $TK_{\aleph_0}$ von β^* enthält aber überabzählbar viele paarweise semidisjunkte S^*-S^*-Wege, da seine Hauptecken wegen Lemma 14 in S^* liegen. Wegen Korollar 4 gibt es nur abzählbar viele Komponenten $C \in \mathcal{C}$ mit unendlichem S^*_C. Wenn wir also alle bis auf abzählbar viele Kanten von G'' zwischen S^* und jeder dieser Komponente streichen, so enthält der entstandene Graph G''' nur abzählbar viele paarweise se-

midisjunkte S^*-S^*-Wege über die Komponenten aus $\mathcal{C}$.
Da die Ecken aus S^* in G'' nur Nachbarn in $\tilde{B} \cup \tilde{C}$ besitzen und $V(\tilde{B})$ abzählbar ist, enthält G''' somit keinen dicken $TK_{\aleph_0}$ von β^*.
Bevor wir dies näher ausführen, untersuchen wir die Eigenschaften der Komponenten $C \in \mathcal{C}$ mit unendlichem S^*_C.

Definition 1: *Es sei $\mathcal{R}$ eine unendliche Menge von paarweise disjunkten Strahlen aus ω^* und v eine Ecke von G, derart daß wir zu jedem Strahl $T \in \mathcal{R}$ einen in v beginnenden Strahl T_v aus G wählen können, der einen Teilstrahl von T enthält, so daß alle diese Teilstrahlen T_v paarweise außer v keine gemeinsame Ecke enthalten. Dann heißt der aus allen Teilstrahlen T_v bestehende Teilgraph großer Stern mit Zentrum v.*

Lemma 22: *Die Komponenten aus $\mathcal{C}$ enthalten keinen großen Stern.*

Beweis: Angenommen es gibt eine Komponente $C \in \mathcal{C}$, die einen großen Stern mit Zentrum v enthält. Da H nach Definition und Lemma 3 keinen Teilstrahl in C besitzt, gibt es zu jedem Strahl $T \in \omega^*$ mit $T \subset C$ nach Lemma 10 unendlich viele disjunkte T-S^*-Wege in C_G. Weil diese Wege endlich sind, können wir iterativ über die einzelnen Äste des Sterns unendlich viele v-S^*-Wege wählen, welche paarweise außer v keine gemeinsame Ecke enthalten. Dann enthält C_G aber einen v-S^*-Fächer mit $v \in V(C)$, im Widerspruch zu Lemma 17. □

Wir betrachten nun die Komponenten aus $\mathcal{C}$ mit unendlichem S^*_C. Wegen Lemma 18 enthält jede dieser Komponenten einen Strahl aus ω^*. Es sei C eine solche Komponente. Wir fassen C als Teilgraphen von G'' auf. $\Omega(C)$ sei der Endenraum von C, δ bezeichene ein Ende aus $\Omega(C)$. Dieser Endenraum enthält zwei Sorten von Enden: Zum einen die Enden aus $\Omega(G'')$, die in C enthalten sind, zum anderen solche Enden, die in G'' eine Teilmenge von β^* sind. Im folgenden bezeichne $\mathcal{E}_C$ die Menge der Enden der zweiten Sorte.

Definition 2: *Es sei E eine Teilmenge von $\Omega(G)$, M eine Menge von Strahlen aus G derart, daß die Abbildung $f : M \to E$, die jeden Strahl aus M auf das Ende von $\Omega(G)$ abbildet, das diesen Strahl enthält, bijektiv ist. Dann heißt M repräsentierende Strahlenmenge von E.*

Bemerkung: *Definition 2 besagt nichts anderes, als daß M aus jedem Ende von E genau einen Strahl enthält, aber keine weiteren Strahlen.*

Definition 3: *Es sei M eine Menge von Strahlen aus G. Dann heißt eine abzählbare Eckenmenge $Y \subset V(G)$, die von jedem Strahl aus M unendlich viele Ecken enthält, für M geeignet.*

Wir wählen nun aus jedem Ende von $\mathcal{E}_C$ einen Strahl aus; Γ_C sei die Menge dieser Strahlen. Dann ist Γ_C eine repräsentierende Strahlenmenge von $\mathcal{E}_C$. Wir zeigen jetzt, daß für Γ_C eine geeignete Eckenmenge aus C existiert.

Lemma 23: *Für jede Komponente $C \in \mathcal{C}$ gibt es eine für Γ_C geeignete Eckenmenge aus C.*

Der vorliegende Beweis dieses Lemmas beruht auf einer Idee von Reinhard Diestel; er stellt eine wesentliche Vereinfachung des ursprünglichen Beweises dar.

Beweis: [D2] Es sei C eine Komponente aus $\mathcal{C}$ und $v_0 \in V(C)$ eine beliebig aber fest gewählte Ecke. Zu jedem Strahl $T \in \Gamma_C$ wählen wir einen in v_0 beginnenden Strahl $T_{v_0} \subset C$, der einen Teilstrahl von T enthält. Dann sei $\Gamma'_C := \{T_{v_0} | T \in \Gamma_C\}$.
Nach dem Wohlordungssatz läßt sich jede Menge wohlordnen; es sei daher "$\subseteq$" eine Wohlordnung von Γ'_C und α die Ordinalzahl von $(\Gamma'_C, \subseteq)$.
Dann ist $(\Gamma'_C, \subseteq)$ ähnlich zu dem Abschnitt aller Ordinalzahlen β, die kleiner als α sind. Daher können wir Γ'_C durch folgende Indizierung der Strahlen $T \in \Gamma'_C$ abzählen: Wir setzen $T := T_\beta$, wenn T an der Stelle β der Wohlordnung "$\subseteq$" von Γ'_C steht.
Induktiv definieren wir nun Bäume B_β für alle $\beta < \alpha$: Es sei $B_0 := T_0$ für $\beta = 0$. Ferner seien für bliebiges $\beta > 0$ die Bäume B_γ für alle $\gamma < \beta$ definiert. Dann setzen wir $B_\beta := B'_\beta$, falls $|V(B'_\beta \cap T_\beta)| = \infty$, ansonsten $B'_\beta \cup xT_\beta$. Dabei ist $B'_\beta := \bigcup_{\gamma<\beta} B_\beta$; ferner ist x die letzte Ecke von T_β in B'_β und xT_β ist der in x beginnende Teilstrahl von T_β (die Ecke x existiert, da T_β in $v_0 \in B_0 \subset B'_\beta$ beginnt).
Wir setzen $B := \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$; dann ist B ein Baum und jedes $T_\beta \in \Gamma'_C$ hat unendlich viele Ecken in B. Da B Teilgraph von C ist, hat jede Ecke von B wegen Lemma 17 endlichen Grad, d.h. $V(B)$ ist abzählbar. Dann ist aber die Eckenmenge $V(B)$ für Γ'_C, und damit für Γ_C, geeignet. $\square$

Wie schon zu Anfang dieses Kapitels erwähnt wurde, enthält der Graph G'' nur dann einen dicken $TK_{\aleph_0}$ von β^*, wenn überabzählbar viele paarweise semidisjunkte S^*-S^*-Wege über die Komponenten aus $\mathcal{C}$ in G'' vorhanden sind. Zur Konstruktion von G'' haben wir daher aus G' so viele Kanten zwischen S^* und den Komponenten $C \in \mathcal{C}$ mit endlichem S^*_C gestrichen, daß G'' nur noch abzählbar viele paarweise semidisjunkte S^*-S^*-Wege über solche Komponenten aus $\mathcal{C}$ emthält.
Wir verfahren nun genauso für die Komponenten $C \in \mathcal{C}$ mit unendlichen S^*_C. Dann erhalten wir einen Graphen G''', der keinen dicken $TK_{\aleph_0}$ von β^* enthält. Außerdem wird G''' gleichmäßig endengleich zu G'', und damit auch zu G, sein.

Konstruktion von G''': Wir streichen aus G'' alle Kanten zwischen S^* und den Komponenten $C \in \mathcal{C}$ mit unendlichem S^*_C, außer denen, die in $E(\tilde{B})$ enthalten sind. Dann verfahren wir mit jeder dieser Komponenten $C \in \mathcal{C}$ folgendermaßen: Es seien $\mathcal{E}_C$ und Γ_C definiert wie oben. Dann gibt es wegen Lemma 23 eine für Γ_C geeignete Menge $Y_\Gamma \subseteq V(C)$. Es sei $\mathcal{P} := Y_\Gamma \times S^*_C$; da Y_Γ und S^*_C abzählbar sind, ist auch $\mathcal{P}$ abzählbar. Für jede endliche Teilmenge P von $\mathcal{P}$, für die dies möglich ist, wählen wir nun zu jedem Paar $(a,b) \in P$ einen a-b-Weg in $C_{G''}$ so, daß diese Wege paarweise semidisjunkt sind. Zwei Wege, die zu verschiedenen endlichen Teilmengen von $\mathcal{P}$ gewählt wurden, müssen dagegen nicht semidisjunkt sein. Sämtliche S^*_C-C-Kanten aller gewählten Wege fügen wir nun wieder ein. Der entstandene Graph sei der gesuchte Graph G'''.

Bemerkung: Da für jede Komponente $C \in \mathcal{C}$ mit unendlichem S^* auch zu jeder einelementigen Teilmengen von $\mathcal{P}$ ein Weg gewählt wird, wird jede Ecke aus S^*_C mit C verbunden; somit ist G''' zusammenhängend.

Im folgenden bezeichnen wir mit $\gamma, \gamma', \ldots.$ Enden von G''' und mit $\beta, \beta', \ldots$ Enden von G''; ferner bezeichne $C_{G''}$ bzw. $C_{G'''}$ für jedes $C \in \mathcal{C}$ den Teilgraphen von G, den man durch Streichung aller S^*-S^*-Kanten aus $C^+_{G''}$ bzw. $C^+_{G'''}$ erhält. Es sei $\eta : \Omega(G''') \to \Omega(G'')$ die in Kapitel 1.1 definierte Abbildung.
Wir zeigen jetzt, daß G''' gleichmäßig endengleich zu G'' ist:

Hilfssatz 3: *Die Abbildung $\eta : \Omega(G''') \to \Omega(G'')$ ist ein Isomorphismus uniformer Räume.*

Auch der Beweis dieses Hilfssatzes erfolgt wie die Beweise der Hilfsätze 1 und 2 in zwei Teilen. Im ersten Teil zeigen wir, daß η bijektiv ist, und im zweiten Teil, daß η und η^{-1} gleichmäßig stetig sind.
Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir die beiden folgenden Lemmata:

Lemma 24: *Es sei C eine Komponente aus $\mathcal{C}$ und R ein Strahl aus C, zu dem in G'' unendlich viele paarweise disjunkte R-S^*-Wege existieren. Ferner sei $\mathcal{W}$ eine Menge solcher Wege und A die Menge zu den Wegen aus $\mathcal{W}$ zugehörigen Endecken aus S^*. Dann gibt es in G''' unendlich viele disjunkte R-A-Wege.*

Beweis: Es sei C eine Komponente aus $\mathcal{C}$ und R ein Strahl mit $R \subset C$ zu dem unendlich viele disjunkte R-S^*-Wege in G'' existieren. Ferner sei $\mathcal{W}$ eine unendliche Menge solcher Wege und A sei die Menge der zugehörigen Endecken aus S^*. Dann ist S^*_C unendlich und wir definieren $\mathcal{E}_C, \Gamma_C$ und Y_Γ wie oben.
Wegen Lemma 8 ist R in G'' äquivalent zu H; daher gibt es ein Ende $\delta \in \mathcal{E}_C$, so daß gilt: $R \in \delta$. Nach Definition von Γ_C gibt es dann einen Strahl $T_R \in \Gamma_C$, der zu R in C äquivalent ist. Folglich gibt es unendlich viele paarweise disjunkte T_R-A-Wege in $C_{G''}$.
Da $Y_{T_R} := Y_\Gamma \cap V(T_R)$ nach Definition von Y_Γ unendlich ist, gibt es dann auch unendlich viele paarweise disjunkte Y_{T_R}-A-Wege in $C_{G''}$.
Nach Definition von G''' enthält G''' zu jeder endlichen Teilmenge $P \subset \mathcal{P} = \Gamma_C \times S^*_C$, für die dies in G'' möglich ist, eine Menge von paarweise disjunkten Wegen, deren Anfangs- und Endecken genau den Paaren aus P entsprechen. Da A Teilmenge von S^*_C und Y_{T_R} Teilmenge von Γ_C ist, gibt es daher zu jedem $i \in \mathbb{N}$ eine Menge von paarweise disjunkten Y_{T_R}-A-Wegen in $C_{G''}$ mit Mächtigkeit echt größer i.
Angenommen in $C_{G'''}$ ist jede Menge paarweise disjunkter T_R-A-Wege endlich. Dann ist auch jede Menge paarweise disjunkter Y_{T_R}-A-Wege endlich. Daher können wir eine endliche Menge M von paarweise disjunkten Y_{T_R}-A-Wegen wählen, zu der in G''' keine echte Obermenge solcher Wege existiert.
Dann ist $V(M) := \bigcup_{w \in M} V(w)$ endlich, sagen wir $|V(M)| = n$, und trennt die Eckenmengen Y_T und A in $C_{G'''}$. Somit gibt es in $C_{G'''}$ höchstens n paarweise disjunkte Y_{T_R}-A-Wege. Dies steht aber im Widerspruch zu obigen Ergebnissen.
Es gibt also in $C_{G'''}$ unendlich viele paarweise disjunkte T_R-A-Wege und damit auch unendlich viele paarweise disjunkte R-A-Wege. □

Lemma 25: *Zu jedem Strahl $T \in \omega^*$ aus G''', der keinen Teilstrahl von H enthält, gibt es unendlich viele paarweise disjunkte T-S^*-Wege in G'''.*

Beweis: Es sei $T \in \omega^*$ ein Strahl von G''', der keinen Teilstrahl von H enthält. Angenommen es gibt in G''' nur endlich viele disjunkte T-S^*-Wege. Da $\tilde{B} \cup \tilde{C}$ ein Teilgraph von G'' ist, gibt es dann wegen Lemma 9 eine Komponente $C \in \mathcal{C}$ und einen Teilstrahl $\tilde{T}$ von T mit $\tilde{T} \subset C$.
Da G''' ein Teilgraph von G'' ist, gibt es wegen Lemma 19 unendlich viele paarweise disjunkte $\tilde{T}$-S^*-Wege in G''. Dann gibt es wegen Lemma 24 auch in G''' unendlich viele paarweise disjunkte T-S^*-Wege, im Widerspruch zur Annahme. $\Box$

Teil 1):

Da G''' alle Komponenten $C \in \mathcal{C}$ und den Strahl H enthält, ist η surjektiv.
Wir zeigen nun, daß η auch injektiv ist. Dazu seien T und T' zwei Strahlen von G''', welche in G'' äquivalent sind; β sei das Ende von $\Omega(G'')$, das T und T' enthält.
Wir betrachten zunächst den Fall $\beta \neq \beta^*$. Wegen Korollar 5 existiert eine Komponente $C \in \mathcal{C}$, die β enthält. Dann gibt es einen Teilstrahl R von T und einen Teilstrahl R' von T' aus C, welche in C äquivalent sind. Da C auch in G''' enthalten ist, sind T und T' dann auch in G''' äquivalent.
Sei nun $\beta = \beta^*$. Es genügt zu zeigen, daß jeder Strahl von β^* aus G''' in G''' äquivalent zu H ist; dann sind auch die beiden Strahlen T und T' in G''' äquivalent. Da jedoch $\tilde{B} \cup \tilde{C}$ ein Teilgraph von G''' ist, folgt dies sofort aus Lemma 8 und 25.
Damit haben wir gezeigt, daß η injektiv und damit bijektiv ist. $\Box$

Da η bijektiv ist, gibt es genau ein Ende $\gamma^* \in \Omega(G''')$ mit $\eta(\gamma^*) = \beta^*$. Im folgenden werden wir die Komponenten aus $\mathcal{C}$ zum einen als Teilgraphen von G'', zum anderen als Teilgraphen von G''' betrachten. Wie in den Kapiteln 2.2 und 2.3 wird auch hier aus dem Zusammenhang klar sein, um wessen Teilgraphen es sich handelt. Dasselbe gilt für Teilgraphen dieser Komponenten.
Für den Beweis von Teil 2 benötigen wir das folgende Analogon zu den Lemmata 13 und 20:

Lemma 26: *Jede Komponente $C \in \mathcal{C}$ enthält genau die Enden $\gamma \in \Omega(G''')$, deren Bild $\eta(\gamma)$ in C enthalten ist.*

Beweis: Da η bijektiv ist, alle Komponenten aus $\mathcal{C}$ in G''' enthalten sind und jede dieser Komponenten in G'' wegen Lemma 20 mindestens ein Ende von G'' enthält, läuft dieser Beweis völlig analog zum Beweis von Lemma 20. $\Box$

Da η bijektiv ist, folgt aus Lemma 26 sofort das folgende Korollar:

Korollar 6: *Jedes Ende $\gamma \in \Omega(G''')$, $\gamma \neq \gamma^*$, ist in einer Komponente aus $\mathcal{C}$ enthalten.*

Teil 2):

Wie wir in Kapitel 1.2 gesehen haben, ist die Abbildung η gleichmäßig stetig. Wir zeigen jetzt, daß η^{-1} ebenfalls gleichmäßig stetig ist. Dazu benötigen wir folgende Behauptung:

Es sei C eine Komponente aus $\mathcal{C}$ mit unendlichem S^*_C. Ferner sei S' eine endliche Eckenmenge aus C und $\mathcal{K}_{S'}(C)$ sei die Menge der Komponenten von $C - S'$. Dann gibt es eine endliche Menge $A_{S'}(C) \subseteq S^*$, so daß für alle $K \in \mathcal{K}_{S'}(C)$ gilt: $S_K := N_{G''-S'}(K) \backslash N_{G'''-S'}(K) \subseteq A_{S'}(C)$.
Man beachte, daß aufgrund der Definition von $\mathcal{K}_{S'}(C)$ gilt: $N_{G'''-S'}(K) \subseteq S^*_C$ für alle $K \in \mathcal{K}_{S'}(C)$.

Zuerst zeigen wir, daß nur für endlich viele Komponenten aus $\mathcal{K}_{S'}(C)$ die Menge $N_{G''-S'}(K)$ unendlich ist. Dazu beweisen wir, daß jede Komponente aus $\mathcal{K}_{S'}(C)$, für die dies gilt, einen Strahl aus β^* enthält. Dann impliziert dies mit Lemma 22 die Behauptung; denn angenommen unendlich viele Komponenten aus $\mathcal{K}_{S'}(C)$ enthalten einen Strahl aus β^*. Da S'' endlich ist, gibt es dann eine Ecke aus S'', die zu unendlich vielen dieser Komponenten benachbart ist. Dann enthält C aber einen großen Stern, im Widerspruch zu Lemma 22.
Es sei also $K \in \mathcal{K}_{S'}(C)$ mit unendlichem $N_{G''-S'}(K)$ beliebig gegeben. Wir bezeichnen mit $K_{G''-S'}$ den Teilgraphen von G'', der entsteht, wenn man aus $K^+_{G''-S'}$ alle S^*-S^*-Kanen streicht.
Da $K_{G''-S'}$ zusammenhängend ist, enthält K wegen Lemma 16 und 17 einen Strahl T mit unendlich vielen paarweise disjunkten T-S^*-Wege in $K_{G''-S'}$ und dieser ist wegen Lemma 8 und der Bijektivität von η ein Strahl von β^*.
Also ist $N_{G''-S'}(K)$ nur für endlich viele Komponenten aus $\mathcal{K}_{S'}(C)$ unendlich.

Wir zeigen jetzt, daß für jede Komponente aus $\mathcal{K}_{S'}(C)$ mit unendlicher Menge $N_{G''-S'}(K)$ die Menge S_K endlich ist.
Angenommen, es gibt eine Komponente $K \in \mathcal{K}_{S'}(C)$, so daß $N_{G''-S'}(K)$ und S_K unendlich sind. Da $K_{G''-S'}$ zusammenhängend ist und wegen Lemma 17 keinen v-S^*-Fächer mit $v \in K$ enthält, gibt es wegen Lemma 16 einen Strahl T aus K mit unendlich vielen paarweise disjunkten T-S_K-Wege in $K_{G''}$. Nach Lemma 24 enthält dann auch $K_{G'''-S'}$ unendlich viele paarweise disjunkte T-S_K-Wege im Widerspruch dazu, daß die endliche Eckenmenge S' nach Definition von S_K die Eckenmenge S_K in G''' von K trennt.
Damit haben wir gezeigt, daß für jede Komponente $K \in \mathcal{K}_{S'}(C)$ mit unendlichem $N_{G''-S'}(K)$ die Menge S_K endlich ist. Wie wir oben gesehen haben, ist nur für endlich viele Komponenten $K \in \mathcal{K}_{S'}(C)$ die Menge $N_{G''-S'}(K)$ unendlich. Daher gibt es eine endliche Menge $\tilde{A}_{S'}(C) \subset S^*$, derart daß für diese Komponenten $K \in \mathcal{K}_{S'}(C)$ gilt: $S_K \subseteq \tilde{A}_{S'}(C)$.

Es sei $\mathcal{K}'_{S'}(C) := \{K \in \mathcal{K}_{S'}(C) : |N_{G''-S'}(K)| < \aleph_0\}$. Als nächstes zeigen wir, daß eine endliche Menge $\hat{A}_{S'}(C) \subset S^*$ existiert, so daß für alle $K \in \mathcal{K}'_{S'}(C)$ gilt: $N_{G''-S'}(K) \subseteq \hat{A}_{S'}(C)$. Angenommen jede Teilmenge von S^*, für die dies gilt, ist unendlich. Dann ist $\mathcal{K}'_{S'}(C)$ ebenfalls unendlich, weil für jedes $K \in \mathcal{K}'_{S'}(C)$ die Menge $N_{G''-S'}(K)$ unendlich ist.
Da die Komponenten aus $\mathcal{K}_{S'}(C)$ disjunkt sind, S' endlich und C zusammenhängend

ist, gibt es eine Ecke v aus C, die zu unendlich vielen Komponenten aus $\mathcal{K}'_{S'}(C)$ benachbart ist. Dann können wir induktiv einen v-S^*-Fächer aus C_G konstruieren, denn $N_{G''-S'}(K)$ ist für alle $K \in \mathcal{K}'_{S'}(C)$ endlich; dies steht aber im Widerspruch zu Lemma 17.
Wir wählen nun eine endliche Eckenmenge $\hat{A}_{S'}(C) \subset S^*$, die obiges erfüllt, beliebig aber fest.

Aufgrund dieser Betrachtungen kann für $A_{S'}(C)$ die Menge $\hat{A}_{S'}(C) \cup \tilde{A}_{S'}(C)$ gewählt werden.

Es sei nun S' eine beliebige endliche Teilmenge von $V(G''')$. Wir suchen eine endliche Menge $S \subset V(G'')$, so daß für alle $\gamma, \gamma' \in \Omega(G''')$ aus $\gamma \not\sim_{S'} \gamma'$ folgt $\eta(\gamma) \not\sim_S \eta(\gamma')$.

Die Mengen $A_1(S'), A_2(S')$ und $A_3(S')$ seien wie im Beweis von Hilfssatz 2 definiert. Wegen Lemma 12 (iv) trennt dann $S' \cup A_1(S') \cup A_2(S')$ die Ecken aus S^* in G'', die durch S' in G''' getrennt werden; wegen Lemma 12 (iii) trennt $S' \cup A_1(S') \cup A_2(S')$ die Ecken aus S^* in G'' von H, die durch S' in G''' von H getrennt werden.
Wir definieren nun eine weitere endliche Mengen $A_4(S') \subset V(G'')$. Dazu setzen wir $\mathcal{C}_1 := \{C \in \mathcal{C} : |S^*_C| = \aleph_0, V(C) \cap S' \neq \emptyset\}$. Die Menge $\mathcal{K}_{S'}(C)$ sei für S' und jedes C aus $\mathcal{C}_1$ wie oben definiert.
Da S' endlich ist und die Komponenten aus $\mathcal{C}$ disjunkt sind, ist $\mathcal{C}_1$ endlich. Wie wir oben gesehen haben gibt es zu jedem $C \in \mathcal{C}_1$ eine endliche Menge $A_{S'}(C)$, so daß für alle $K \in \mathcal{K}S'(C)$ gilt: $N_{G''-S''}(K) \backslash N_{G'''-S'}(K) \subset A_{S'}(C)$. Dann ist auch $A_4(S') := \bigcup_{C \in \mathcal{C}_1} A_{S'}(C)$ endlich.

Wir setzen $S := \bigcup_{i=1,..,4} A_i(S') \cup S'$ und zeigen, daß diese Menge das Gewünschte erfüllt. Dazu sei $\gamma \neq \gamma^*$ ein beliebiges Ende von G''' und $\beta = \eta(\gamma)$; ferner sei C die Komponente aus $\mathcal{C}$, die γ enthält (diese existiert wegen Lemma 26). Da S' endlich ist, gibt es eine Komponente C_γ von $C - S'$, die, aufgefaßt als Teilgraph von G''', γ enthält.
Da β wegen Lemma 26 in C enthalten ist, S endlich und Obermenge von S' ist, gibt es eine Komponente $C_\beta \subseteq C_\gamma$ von $C - S$, die β enthält.
Wir setzen (völlig analog zum Beweis von Hilfssatz 1) $S_\gamma := N_{G'''-S'}(C_\gamma)$.

Als nächstes zeigen wir, daß gilt: $S_\gamma \supseteq N_{G''-S}(C_\gamma)$.
Falls C eine Komponente aus $\mathcal{C}$ mit endlichem S^*_C ist, so sind $C_{G'''}$ und $C_{G''}$ identisch. Dieser Fall wurde daher schon im Beweis von Hilfssatz 2 betrachtet und muß hier nicht wiederholt werden.
Nach Konstruktion von G''' gilt $N_{G'''}(C) = N_{G''}(C) = S^*_C$ für jede Komponente $C \in \mathcal{C}$ mit unendlichem S^*_C. Es gilt daher entweder $V(C) \cap S' \neq \emptyset$ oder $S^*_C \backslash S_\gamma \subseteq S'$. Letzteres bedeutet aber $S_\gamma \supseteq N_{G''-S}(C_\gamma)$, weil $S \supseteq S'$ ist.
Falls $V(C) \cap S'$ nicht leer ist, gilt für die oben definierte Menge $A_{S'}(C) \subseteq S^*$ $N_{G''-S'}(K) \backslash N_{G'''-S'}(K) \subset A_{S'}(C)$ für jede Komponente K von $C - S'$. Dies bedeutet aber $S_\gamma = N_{G'''-S'}(K) \supseteq N_{G''-S'}(K) \backslash A_{S'}(C)$.
C_γ ist aber eine Komponente von $C - S'$ und $A_{S''}(C)$ ist Teilmenge von S; somit folgt $S_\gamma \supseteq N_{G''-S}(C_\gamma)$.
Damit haben wir gezeigt, daß in allen Fällen $S_\gamma \supseteq N_{G''-S}(C_\gamma)$ ist.

Die Komponente C_γ ist daher auch in $G'' - S$ nur über Ecken aus S_γ mit $G'' \backslash C_\gamma$ verbunden. Da $C_\beta \subseteq C_\gamma$ ist und die Komponenten von $C - S$ feiner als die Kom-

ponenten von $C - S'$ sind, kann C_β in $G'' - S$ ebenfalls nur über Ecken aus S_γ mit $G''\backslash C_\gamma$ verbunden sein. Entsprechendes gilt für $C_{\gamma'}, C_{\beta'}$ und $S_{\gamma'}$.
Da S' die Enden γ und γ' in G''' trennt, andererseits für jede Ecke $t \in S_\gamma$ gilt $t \sim_{S'} \gamma$, während für jede Ecke $t' \in S_{\gamma'}$ gilt $t' \sim_{S'} \gamma'$, trennt S' die Eckenmengen S_γ und $S_{\gamma'}$ in G'''. Wegen Lemma 12 (iv) trennt S diese Mengen dann in G''.
Der Rest dieses Beweises kann wörtlich aus dem Beweis von Hilfssatz 1 übernommen werden. Daher verzichten wir hier auf weitere Ausführungen.
Der Beweis von Hilfssatz 3 ist somit vollständig. □

Lemma 27: *Jede Menge $\mathcal{W}$ von paarweise semidisjunkten S^*-S^*-Wegen aus G''' ist abzählbar.*

Beweis: Wegen Lemma 21 gibt es in G''' nur abzählbar viele semidisjunkte S^*-S^*-Wege über die Komponenten $C \in \mathcal{C}$ mit endlichem S^*_C. Ferner besitzt S^* in G''' nach Konstruktion nur abzählbar viele Nachbarn in den Komponenten $C \in \mathcal{C}$ mit unendlichem S^*_C. Aber auch in $G'''\backslash\tilde{C} \subseteq \tilde{B}$ besitzt S^* nur abzählbar viele Nachbarn, denn $\tilde{B}$ ist abzählbar. Daher können in G''' nur abzählbar viele paarweise semidisjunkte S^*-S^*-Wege vorhanden sein. □

Korollar 7: *G''' enthält keinen $K_{\aleph_0}$ oder dicken $TK_{\aleph_0}$ von ω^*.*

Beweis: Da G''' ein Teilgraph von G' ist, folgt aus Lemma 15 direkt, daß G''' keinen $K_{\aleph_0}$ von ω^* enthält.
Wie wir in Lemma 14 bewiesen haben, liegen die Hauptecken von jedem dicken $TK_{\aleph_0}$ von ω^* in S^*. Da zu jedem Paar (v, v') von Hauptecken eines dicken $TK_{\aleph_0}$ überabzählbar viele semidisjunkte v-v'-Wege existieren, kann G''' wegen Lemma 27 keinen dicken $TK_{\aleph_0}$ von ω^* enthalten. □

Lemma 28: *G''' ist gleichmäßig endengleich zu G.*

Beweis: Diese Behauptung folgt direkt aus den Hilfssätzen 1, 2 und 3. □

Wir beweisen nun den zentralen Satz dieser Arbeit:

Beweis von Satz 1:
Mit G''' haben wir einen Teilgraphen von G konstruiert, welcher gleichmäßig endengleich zu G ist und keinen $K_{\aleph_0}$ oder dicken $TK_{\aleph_0}$ von ω^* enthält. Besitzt G daher nur ein Ende, das einen $K_{\aleph_0}$ oder dicken $TK_{\aleph_0}$ enthält, dann enthält G wegen Satz 2 und 3 einen gleichmäßig endengleichen Baum.
Angenommen jeder Graph mit nur $n-1$ Enden, die einen $K_{\aleph_0}$ oder dicken $TK_{\aleph_0}$ enthalten, enthält einen gleichmäßig endengleichen Baum. Es sei G ein Graph, der n solcher Enden besitzt. Dann gibt es wegen Lemma 28 und Korollar 7 einen gleichmäßig endengleichen Teilgraphen von G mit nur $n-1$ solcher Enden. Somit enthält G nach Induktionsannahme einen gleichmäßig endengleichen Baum. □

An dieser Stelle möchte ich Reinhard Diestel für viele hilfreiche und anregende Diskussionen zur Darstellung dieser Arbeit danken.

Literaturverzeichnis

[D1] R. Diestel, *The End Structure of a Graph: Recent Results and Open Problems*, SFB 343 Universität Bielefeld, preprint 90-071, 1990.

[D2] R. Diestel, Private Mitteilung.

[H1] R. Halin, Über unendliche Wege in Graphen, *Math.Ann. 157*, 1964.

[H2] R. Halin, Simplicial decompositions in infinite graphs, in (B. Bollobás, Ed.): *Advances in Graph Theory*, Annals of Discrete Mathematics 3, North-Holland Publ. Co., Amsterdam / London 1978.

[H3] R. Halin, *Graphentheorie I, II*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1981.

[Ja] I.M. James, *Topological and Uniform Spaces*, Springer Verlag, New York, 1987.

[Ju] H.A. Jung, Wurzelbäume und unendliche Wege in Graphen, *Mathematische Nachrichten 41*, 1969.

[S] H. Schubert, *Topologie*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart, 1964.

[S/T] P.D. Seymour and R. Thomas, An end-faithful counterexample, in (R. Diestel, Ed.): *Directions in Infinite Graph Theory and Combinatorics*, Topics in Discrete Mathematics 3, North-Holland Publ. Co., Amsterdam / London, 1992.

[Th] C. Thomassen, Infinitely connected graphs with no end-preserving spanning trees, preprint, 1990.