Inhaltsverzeichnis

Abstract

The description of simple polytopes by Gale diagrams and ‚missing-cuts' (the dual of ‚missing-faces') is used for an investigation of compact hyperbolic Coxeter polytopes bounded by only a few facets:

Section 4 contains a list of all compact hyperbolic Coxeter polytopes the combinatorial type of which is the product of two simplices of dimension greater 1. Together with results of Kaplinskaja ([Ka]) this completes the classification of compact hyperbolic d-polytopes with $d+2$ facets.

In section 5 it is proved that compact hyperbolic Coxeter d-polytopes with $d+3$ facets exist only for $d \leq 8$ and that the example of Bugaenko ([Bu3]) for $d = 8$ is unique.

Due to a result of Nikulin ([Ni2],[Ni3]), the degree of the ground field of arithmetic Coxeter d-polytopes, $d \geq 10$, is bounded. In section 6 this is shown to be true also for $d = 9$ and for all d-polytopes bounded by at most $d+4$ facets.

The last section provides examples of arithmetic Coxeter polytopes with ground fields $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$ and $\mathbb{Q}(\sqrt{21})$.

Einleitung

Bezeichnen wir im folgenden den hyperbolischen Raum der Dimension d mit $\mathbb{H}^d$.

Ein Polyeder P im $\mathbb{H}^d$, das von endlich vielen Hyperebenen $H_1, \ldots, H_n$ berandet wird, heißt Coxeter-Polyeder, wenn für je zwei Hyperebenen H_i, H_j mit $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ der eingeschlossene Winkel, der in P liegt, von der Form $\frac{\pi}{k}$ für ein $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ ist.

Die Gruppe, die von den Spiegelungen an den Hyperebenen H_i erzeugt wird, ist diskret und hat P als einen Fundamentalbereich. Man erhält jede diskrete, endlich erzeugte Spiegelungsgruppe auf diese Weise: Der hyperbolische Raum wird durch die zu den Spiegelungen invarianten Hyperebenen in Coxeter-Polyeder unterteilt, von denen jedes ein Fundamentalbereich der Gruppe ist.

Diskrete Spiegelungsgruppen, deren Fundamentalbereiche von endlichem Volumen sind, heißen kristallographisch. Gegenstand dieser Arbeit sind kompakte Coxeter-Polyeder. Da ihr Volumen insbesondere endlich ist, sind die Ergebnisse in den Rahmen der Klassifikation kristallographischer Spiegelungsgruppen einzuordnen.

Zur Terminologie ist zu bemerken, daß alle Polyeder im $\mathbb{H}^d$ mit endlichem Volumen die konvexe Hülle endlich vieler Punkte im Abschluß $\overline{\mathbb{H}^d}$ des $\mathbb{H}^d$ sind. Die Ecken, die in $\overline{\mathbb{H}^d} \setminus \mathbb{H}^d$ liegen, heißen ‚Ecken im Unendlichen' oder auch ‚Spitzen'. Es macht also Sinn, auch in diesen Fällen den Sprachgebrauch der Polytope zu übernehmen. Dementsprechend meinen wir im folgenden mit einem Polytop immer ein Polyeder mit endlichem Volumen im $\mathbb{H}^d$ und mit einem kompakten Polytop ein solches, daß kompakt bezüglich des $\mathbb{H}^d$ ist, also insbesondere keine Spitzen besitzt.

Die Unterscheidung zwischen kompakten und nicht kompakten Coxeter-Polytopen ist methodisch von Bedeutung: Spitzwinklige Polyeder im hyperbolischen Raum sind einfach, d.h., ist d die Dimension eines einfachen Polyeders, so liegt jede Seite der Dimension k in genau $d-k$ Seiten der Dimension $d-1$. Die Seiten der Dimension $d-1$ heißen Facetten. Die Kombinatorik kompakter Coxeter-Polytope entspricht also der Kombinatorik einfacher Polytope wie sie Gegenstand zahlreicher Untersuchungen und Resultate in der allgemeinen Theorie konvexer Polytope ist. Neben der Anwendung dieser weit ausgearbeiteten Theorie erlauben uns einfache Polytope auch eine für Coxeter-Polytope geeignete Darstellung durch ‚Fehlschnitt-Diagramme'.

Diese Vorteile bei der Klassifikation kompakter Coxeter-Polytope mit wenigen Facetten zu nutzen, ist der methodische Leitgedanke dieser Arbeit.

Bevor wir die einzelnen Ergebnisse vorstellen und einordnen, haben wir noch eine Teilklasse der kristallographischen Spiegelungsgruppen hervorzuheben, die vom Zugang her deutliche Besonderheiten aufweist. Ist eine kristallographische Spiegelungsgruppe W auf dem hyperbolischen Raum arithmetisch, so ist sie von endlichem Index in der orthogonalen Gruppe eines Gitters L, wobei L über einem totalreellen, algebraischen Zahlkörper F definiert ist. Der Körper F heißt Grundkörper von W. Ein Coxeter-Polytop heißt arithmetisch, wenn es der Fundamentalbereich einer arithmetischen Spiegelungsgruppe ist. Die zusätzliche Struktur ermöglicht einerseits zahlentheoretische Ansätze, wirft andererseits aber auch neue Fragestellungen auf. Diese Arbeit liefert Beiträge zur Beantwortung einiger dieser Fragen.

Coxeter-Polytope in Dimension 2 und 3: Die Coxeter-Polytope im $\mathbb{H}^2$ wurden bereits 1882 von Poincaré [Po] und von Dyck [vD] beschrieben. Sie besitzen eine beliebige Anzahl von Seiten, und für die Winkel $\frac{\pi}{n_1}, \ldots, \frac{\pi}{n_k}$ gilt $\frac{1}{n_1} + \ldots + \frac{1}{n_k} < k-2$. (Dabei ist $n_i = \infty$ zu setzen, wenn die zugehörigen Seiten eine Spitze beschreiben.)

In [An] hat Andreev 1970 notwendige und hinreichende Bedingungen dafür formuliert, wann ein einfaches Polytop von gegebenem kombinatorischen Typ (ungleich einem Simplex) und gegebenen Winkeln zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ im $\mathbb{H}^3$ zu realisieren ist. Insbesondere hat er gezeigt, daß jedes spitzwinklige Polytop im $\mathbb{H}^d$, $d \geq 3$ bereits durch die Winkel bestimmt ist.

In diesen Dimensionen sind also im wesentlichen nur noch Fragen bezüglich arithmetischer Coxeter-Polytope offen.

Coxeter-Polytope mit wenigen Facetten: F. Lannér hat 1950 die kompakten Coxeter-Simplizes im hyperbolischen Raum beschrieben [La]. (Ein Simplex im $\mathbb{H}^d$ ist die konvexe Hülle von $d+1$ affin unabhängigen Punkten.) Ein solches d-dimensionales Simplex hat insbesondere $d+1$ Facetten.

Unter den Coxeter-Polytopen mit $d+2$ Facetten sind bislang nur die vollständig klassifiziert worden, deren kombinatorischer Typ das Produkt eines Simplexes mit einem Segment ist. Diese Ergebnisse von I.M. Kaplinskaya beruhen auf der speziellen Form dieser Polytope, sie umfassen sowohl die kompakten wie auch die nicht kompakten Fälle

[Ka]. (Die Liste ist in Dimension 3 unvollständig, die fehlenden Polytope sind [Vi3] zu entnehmen.)

In [ImH] hat H.-C. Im Hof die kristallographischen Napier-Zykel klassifiziert. Sie liefern eine Beschreibung kristallographischer Coxeter-Polytope (kompakter und nicht kompakter) im $\mathbb{H}^d$, die nicht mehr als $d+3$ Facetten besitzen und wo darüberhinaus noch einige stark einschränkende Bedingungen an die Winkel der Facetten gestellt sind. (Genauer lautet die Einschränkung, daß es eine zyklische Anordnung der Facetten gibt, so daß zwei in dieser Anordnung nicht benachbarte Facetten senkrecht aufeinander stehen.)

Wir werden in Abschnitt 4 die kompakten Coxeter-Polytope mit $d+2$ Facetten klassifizieren, deren kombinatorischer Typ das Produkt zweier Simplizes der Dimensionen größer 1 ist. Zusammen mit der oben erwähnten Arbeit von I.M. Kaplinskaya ergibt sich daraus die vollständige Liste aller kompakten Coxeter-Polytope im $\mathbb{H}^d, d \geq 3$ mit $d+2$ Facetten.

Als einen Ansatz zur Klassifikation der kompakten Coxeter-Polytope mit $d+3$ Facetten, werden wir in Abschnitt 5 zeigen, daß es im $\mathbb{H}^d, d \geq 9$ keine solchen Polytope gibt und daß im $\mathbb{H}^8$ bis auf Isometrie genau ein kompaktes Coxeter-Polytop existiert. Dabei handelt es sich um den Fundamentalbereich der Spiegelungsgruppe des Gitters $[-(\sqrt{5}+1)] \perp E_8$, der von V.O. Bugaenko berechnet wurde [Bu3]. Das Polytop ist insbesondere arithmetisch.

Die maximale Dimension kompakter Coxeter-Polytope: In [Vi2] hat Vinberg gezeigt, daß es im $\mathbb{H}^d, d \geq 30$ keine kompakten Coxeter-Polytope gibt. Der Fundamentalbereich von $[-(\sqrt{5}+1)] \perp E_8$ ist das bezüglich der Dimension maximale bekannte Beispiel. Nicht arithmetische, kompakte Coxeter-Polytope sind sogar nur im $\mathbb{H}^d, d \leq 5$ bekannt.

Die Ergebnisse aus Abschnitt 4 und 5 zusammen mit den bekannten Resultaten liefern folgende Aussagen:

- Ist P ein kompaktes Coxeter-Polytop im $\mathbb{H}^d$ mit $d+1$ Facetten, so ist $d \leq 4$.
- Ist P ein kompaktes Coxeter-Polytop im $\mathbb{H}^d$ mit $d+2$ Facetten, so ist $d \leq 5$.
- Ist P ein kompaktes Coxeter-Polytop im $\mathbb{H}^d$ mit $d+3$ Facetten, so ist $d \leq 8$.

Mit der Verwendung der affinen Gale-Diagramme zur Darstellung von Polytopen mit $d+4$ Facetten und den Ergebnissen aus dieser Arbeit läßt sich an eine Fortsetzung dieser Liste denken.

Grundkörper arithmetischer Coxeter-Polytope: V.V. Nikulin hat gezeigt, daß es zu einer festen Zahl N nur endlich viele Grundkörper arithmetischer Spiegelungsgruppen vom Grad kleiner N gibt und daß für einen festen Grundkörper die Anzahl der Konjugationsklassen maximaler, arithmetischer Spiegelungsgruppen endlich ist [Ni1].

Die Frage, ob bis auf Konjugation nur endlich viele solcher maximalen Gruppen existieren, ist also gleichbedeutend mit der Frage, ob es arithmetische Spiegelungsgruppen mit Grundkörpern beliebig hohen Grades gibt.

Daß dies für hyperbolische Räume der Dimensionen größer 9 nicht der Fall ist, hat Nikulin in [Ni3] gezeigt. Der Beweis beruht wesentlich auf der Tatsache, daß jedes einfache Polytop höherer Dimension zweidimensionale Seiten mit wenigen Facetten enthält. Mit einem Analogon dieses Argumentes für die dreidimensionalen Seiten eines Polytops im $\mathbb{H}^d, d \geq 16$ und einer etwas anderen Strategie hat V.V. Nikulin bereits 1980 die Beschränktheit der Körpergrade für arithmetische Spiegelungsgruppen in hyperbolischen Räumen der Dimensionen größer als 15 gezeigt.

In Abschnitt 6 untersuchen wir diese Fragestellung im Geiste der zweiten Beweisstrategie, da sie den Vorteil besitzt, sich auf höher dimensionale Teilseiten ausdehnen zu lassen. Zunächst zeigen wir, daß für die Menge der arithmetischen Coxeter-Polytope im $\mathbb{H}^d,\ d \geq 3$ mit weniger als $d+5$ Facetten der Grad der Grundkörper beschränkt ist. Dies nutzen wir dann für einen Beweis dieser Aussage für arithmetische Coxeter-Polytope beliebiger Facettenzahl im $\mathbb{H}^d,\ d > 8$.

Quadratische Grundkörper arithmetischer Coxeter-Polytope: Die allgemeinen Resultate über die Grundkörper arithmetischer, hyperbolischer Spiegelungsgruppen, wie z.B. die hohen Schranken für den Grad, stehen in einem Mißverhältnis zur geringen Zahl der bekannten Beispiele. So waren bislang nur Gruppen im $\mathbb{H}^d, d \geq 3$ mit Grundkörpern $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{5}), \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ und $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{7})$ bekannt.

In Abschnitt 7 werden wir Beispiele arithmetischer Coxeter-Polytope im $\mathbb{H}^3$ mit den quadratischen Grundkörpern $\mathbb{Q}(\sqrt{13}), \mathbb{Q}(\sqrt{17})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{21})$ angeben. Es handelt sich dabei durchweg um dreidimensionale Würfel. Diese Beispiele sind mit Bedacht so ausgewählt, da es sich um den einfachsten kombinatorischen Typ handelt, wo der Grundkörper nicht von den Cosinuswerten der Winkel erzeugt wird. Neben den drei vorgestellten Beispielen existieren zahlreiche weitere mit diesen Grundkörpern.

Von einer Schranke an die Diskriminante quadratischer Grundkörper, wie sie sich aus [Ni1] ergibt, sind auch diese Beispiele weit entfernt.

In den Abschnitten 1 und 2 stellen wir einige Fakten über Polytope und Coxeter-Polytope zusammen. Nur in Abschnitt 1.3 weichen wir dabei von der Literatur ab. Wir definieren das Fehlschnitt-Diagramm eines einfachen Polytops und beweisen einige der grundlegenden Eigenschaften.

In Abschnitt 3 führen wir die Begriffswelten der vorangegangenen Abschnitte zusammen und stellen darüberhinaus einige der im weiteren Verlauf benötigten technischen Hilfsmittel vor.

In den Abschnitten 4 bis 7 beweisen wir die dargestellten Resultate.

Abschließend möchte ich Herrn Prof. Dr. R. Scharlau für die gute Unterstützung während dieser Arbeit herzlich danken.

1 Polytope

1.1 Grundlegende Begriffe

In diesem Abschnitt werden wir die wesentlichen Begriffe und Resultate aus der Theorie der Polytope, die in dieser Arbeit Verwendung finden, einführen. Beispiele und Beweise finden sich in den Büchern von Grünbaum ‚Convex Polytopes' [Gr] und Brøndsted ‚An Introduction to Convex Polytopes' [Br].

Seien $x_1, \ldots, x_n$ Punkte im $\mathbb{R}^d$. Mit $\mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$ bezeichnen wir die konvexe und mit $\mathrm{aff}\{x_1, \ldots, x_n\}$ die affine Hülle von $x_1, \ldots, x_n$. Für eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^d$ ist die Dimension als $\dim N := \dim \mathrm{aff} N$ definiert. Das relative Innere einer konvexen Menge K ist das Innere von K in der affinen Hülle von K, es wird mit $\mathrm{relint}(K)$ bezeichnet.

Ein Polytop P im $\mathbb{R}^d$ ist die konvexe Hülle endlich vieler Punkte. Ein unterstützender Halbraum von P ist ein Halbraum H^- mit $P \subset H^-$ und $P \cap H \neq \emptyset$, wobei H die (affine) Hyperebene bezeichnet, die H^- beschränkt. Ein solches H heißt unterstützende Hyperebene von P.

Eine Teilmenge $f \subseteq P$ heißt Seite von P, wenn entweder $f = \emptyset$, $f = P$ ist oder eine unterstützende Hyperebene H mit $f = H \cap P$ existiert. Im letztgenannten Fall heißt f eigentliche Seite. Mit einer k-Seite bezeichnen wir eine Seite der Dimension k. Ist P ein d-Polytop (d.h. ein Polytop der Dimension d), so bezeichnen wir, den Konventionen folgend, die Seiten der Dimensionen $0, 1, d-1$ als Ecken, Kanten bzw. Facetten. Die Menge der Ecken wird mit $\mathrm{vert} P$ bezeichnet. Es ist zu bemerken, daß aus der Gleichheit der Dimensionen zweier Seiten $f' \subseteq f$ bereits $f' = f$ folgt. Jede Seite f ist selbst wieder ein Polytop, und es ist $\mathrm{vert} f = \mathrm{vert} P \cap \mathrm{aff} f$.

Die Menge der Seiten $\mathcal{F}(P)$ von P zusammen mit der durch die Teilmengenbeziehung gegebenen Halbordnung wird als Seitenverband von P bezeichnet. Zwei d-Polytope heißen kombinatorisch äquivalent oder auch isomorph, wenn ihre Seitenverbände isomorph sind. Zwei d-Polytope P und P^* heißen dual zueinander, wenn ihre Seitenverbände antiisomorph sind, d.h. eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen ihren Seitenverbänden existiert. Für eine solche Abbildung

$$\varphi : \mathcal{F}(P) \to \mathcal{F}(P^*)$$

gilt dann $\varphi(\emptyset) = P^*$, $\varphi(P) = \emptyset$ und allgemein $\dim f + \dim \varphi(f) = d - 1$ für jede Seite f von P. (Vereinbarungsgemäß ist $\dim \emptyset = -1$.) Zu jedem Polytop existiert ein duales Polytop.

Ein Polytop P heißt Simplex, wenn affin unabhängige Punkte $x_1, \ldots, x_n$ mit $P = \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$ existieren. Sei P ein d-Polytop. P heißt simplizial, wenn jede Facette von P ein Simplex ist. P heißt einfach, wenn jede k-Seite von P in genau $d-k$ Facetten enthalten ist. Die Klassen simplizialer und einfacher Polytope sind dual zueinander, insbesondere können Ergebnisse leicht von der einen in die andere übertragen werden.

Der Beschreibung der Seite eines Polytops durch die Ecken, deren konvexe Hülle sie ist, steht eine Beschreibung durch die Facetten, deren Schnitt sie ist, gegenüber: Jede eigentliche Seite f von P ist der Schnitt von Facetten, und umgekehrt ist jeder Schnitt von Facetten auch eine Seite. Für ein einfaches Polytop gilt genauer:

Lemma 1.1 *([Br], Th. 10.4, Th. 12.14) Sei P ein einfaches d-Polytop, und seien f_1, $\ldots$,f_{d-k} Facetten von P, wobei $0 \leq k \leq d-1$ ist. Angenommen*

$$f := \bigcap_{i=1}^{d-k} f_i$$

ist nicht leer. Dann ist f eine k-Seite von P und $f_1, \ldots, f_{d-k}$ sind die einzigen Facetten, die f enthalten. Umgekehrt ist jede eigentliche k-Seite von der obigen Form für eindeutige f_i.

Eine Teilmenge Q des $\mathbb{R}^d$ heißt Polyeder, wenn sie entweder der Schnitt einer endlichen Menge von abgeschlossenen Halbräumen oder gleich dem $\mathbb{R}^d$ ist. Ein Polyeder ist genau dann ein Polytop, wenn es nicht leer und beschränkt ist.

Von Interesse sind für uns einfache Polytope, da kompakte Coxeter-Polytope in der Tat einfach sind. Obwohl es für diese Klasse von Polytopen tiefliegende Ergebnisse gibt, deren Analoga im allgemeinen Fall noch völlig unklar sind, ist man weit von einer aufzählenden Beschreibung der kombinatorischen Typen entfernt. Ihre Anzahl wächst in fester Dimension mit steigender Zahl von Facetten exponentiell.

Eine solche Beschreibung existiert aber, wenn die Anzahl der Facetten eines d-Polytops kleiner oder gleich $d+3$ ist. Sie wird durch die Gale-Diagramme ermöglicht. Es existiert auch eine Verallgemeinerung dieses Konzepts für $d+4$-seitige Polytope, die sogenannten ‚affinen Gale-Diagramme', sie hat aber wesentliche Nachteile in der Handhabung.

1.2 Gale-Diagramme

Sei $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Menge von Punkten im $\mathbb{R}^d$ mit $\mathrm{aff}(X) = \mathbb{R}^d$. Der Koordinatenvektor von x_i sei durch $(x_{i,1}, \ldots, x_{i,d})$ gegeben. Betrachten wir die Menge $D(X)$ der affinen Abhängigkeiten von X, das ist die Menge der Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} &\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0, \\ &\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 0. \end{aligned}$$

Da die Dimension von X gleich d ist, hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{1,1} & x_{2,1} & \cdots & x_{n,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1,d} & x_{2,d} & \cdots & x_{n,d} \end{pmatrix}$$

den Rang $d+1$. Als Kern dieser Matrix ist $D(X)$ also ein linearer Unterraum im $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-d-1$. Wählen wir eine Basis $y_1, \ldots, y_{n-d-1}$ von $D(X)$ mit

$$y_i = (y_{i,1}, \ldots, y_{i,n}).$$

Wir definieren $\bar{x}_i$ als die i-te Spalte der Matrix M, deren Zeilen die y_i, $i = 1, \ldots, n-d-1$ bilden, also:

$$M = \begin{pmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n-d-1,1} & \cdots & y_{n-d-1,n} \end{pmatrix}$$

und

$$\bar{x}_i^t = (y_{1,i} \ldots, y_{n-d-1,i}).$$

Die Menge

$$\bar{X} = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$$

bezeichnen wir als eine Gale-Transformierte von X. Die Konstruktion ist natürlich nicht eindeutig, so hängt sie z.B. von der Wahl der Basis von $D(X)$ ab. Um die geometrische Bedeutung der Gale-Transformierten zu sehen, benötigen wir die Begriffe ‚Seite' und ‚Co-Seite' von X:

Eine Menge $Y \subseteq X$ heißt Seite von X, wenn $\mathrm{conv}(X \setminus Y) \cap \mathrm{aff}(Y) = \emptyset$ ist. Y heißt Co-Seite von X, wenn $X \setminus Y$ eine Seite von X ist. Ist X die Eckenmenge eines Polytops, so ist Y genau dann eine Seite bzw. Co-Seite von X, wenn $\mathrm{conv}Y$ bzw. $\mathrm{conv}(X \setminus Y)$ eine Seite von P ist.

Sei $J \subseteq \{1, \ldots n\}$. Mit $X(J)$ bzw. $\bar{X}(J)$ bezeichnen wir die Mengen $\{x_i \mid i \in J\}$ bzw. $\{\bar{x}_i \mid i \in J\}$. Von zentraler Bedeutung ist nun:

Satz 1.2 *([Gr], Chap. 5.4, 1.) Die Menge $X(J)$ ist genau dann eine Co-Seite von X, wenn entweder $X(J) = \emptyset$ oder $0 \in \mathrm{relint}\,\mathrm{conv}\bar{X}(J)$ ist.*

Aus der Definition und dem obigem Satz leiten sich leicht folgende Eigenschaften ab (siehe [Gr], Chap. 5.4):

1. Ist $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ und $\mathrm{aff}X = \mathbb{R}^d$, so ist X genau dann die Eckenmenge eines Polytops, wenn entweder

(i) $\bar{x}_i = 0$ für alle $x_i \in X$, oder

(ii) für jeden offenen Halbraum H^+ im $\mathbb{R}^{n-d-1}$ mit $0 \in \mathrm{bd}H^+$ ist die Mächtigkeit der Menge $\{i \mid \bar{x}_i \in H^+\}$ größer oder gleich 2.

Im ersten Fall handelt es sich bei dem Polytop um ein Simplex.

2. Ist P ein Polytop mit Eckenmenge X, so ist P genau dann simplizial, wenn $\dim \mathrm{conv}\bar{X}(J) = \dim \mathrm{conv}\bar{X}$ für jede nicht leere Co-Seite $X(J)$ von X ist.

3. Seien P und P' zwei d-Polytope im $\mathbb{R}^d$ mit den Eckenmengen $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ bzw. $X' = \{x'_1, \ldots, x'_n\}$. Dann sind P und P' genau dann kombinatorisch äquivalent unter der Abbildung $\varphi : \mathcal{F}(P) \to \mathcal{F}(P')$ mit $x'_{\tau i} = \varphi x_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und eine Permutation τ der Zahlen $1, \ldots, n$, wenn gilt:

(∗) Für jede Teilmenge $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ ist $0 \in \operatorname{relint} \operatorname{conv} \bar{X}(J)$ äquivalent zu $0 \in \operatorname{relint} \operatorname{conv} \bar{X}'(\tau(J))$, wobei $\tau(J) = \{\tau(j) \mid j \in J\}$ ist.

Gale-Transformierte $\bar{X}$ und $\bar{X}'$, die die Eigenschaft (∗) besitzen, heißen isomorph. Eigenschaft 3. läßt sich also so formulieren, daß zwei Polytope genau dann isomorph sind, wenn dies für ihre Gale-Transformierten zutrifft. Im Rest dieses Abschnitts werden wir beschreiben, wie man durch Wahl geeigneter Vertreter in den Isomorphieklassen von Gale-Transformierten zu einer effektiven Methode für die Aufzählung der kombinatorischen Typen von d-Polytopen mit $d+2$ und $d+3$ Ecken kommt.

Sei $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ mit $\operatorname{aff} X = \mathbb{R}^d$ gegeben. Zu einer Gale-Transformierten $\bar{X}$ von X definiert man das **Gale-Diagramm** $\hat{X}$ als die Menge der Punkte $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ mit

$$\hat{x}_i = 0, \text{ falls } \bar{x}_i = 0 \text{ ist, und}$$

$$\hat{x}_i = \frac{\bar{x}_i}{||\bar{x}_i||}, \text{ falls } \bar{x}_i \neq 0 \text{ ist.}$$

Dabei bezeichnet $||\bar{x}_i||$ die euklidische Länge von $\bar{x}_i$. Wir definieren die Vielfachheit eines Punktes $y \in \hat{X}$ als $\mathrm{v}(y) := |\{x \in X \mid \hat{x} = y\}|$.

Die Isomorphie von Gale-Diagrammen wird ganz analog zu der von Gale-Transformierten definiert. Es ist leicht zu sehen, daß die Aussagen 1.-3. auch für Gale-Diagramme gültig sind.

1.2.1 Gale-Diagramme von d-Polytopen mit $d+2$ und $d+3$ Ecken

Sei X die Eckenmenge eines d-Polytops P mit $d+2$ Ecken. Dann ist das Gale-Diagramm $\hat{X}$ eine Teilmenge von $\{0, +1, -1\}$. Nach 1. ist $\mathrm{v}(-1) \geq 2, \mathrm{v}(0) \geq 0$ und $\mathrm{v}(+1) \geq 2$. Ist P' ein weiteres d-Polytop mit $d+2$ Ecken und bezeichnen $\mathrm{v}'(0)$, $\mathrm{v}'(+1)$, $\mathrm{v}'(-1)$ die Vielfachheiten der Punkte im Gale-Diagramm von P', so sind P und P' genau dann kombinatorisch äquivalent, wenn $(\mathrm{v}(-1), \mathrm{v}(0), \mathrm{v}(+1)) = (\mathrm{v}'(-1), \mathrm{v}'(0), \mathrm{v}'(+1))$ oder $(\mathrm{v}(-1), \mathrm{v}(0), \mathrm{v}(+1)) = (\mathrm{v}'(+1), \mathrm{v}'(0), \mathrm{v}'(-1))$ ist. P ist genau dann simplizial, wenn $\mathrm{v}(0) = 0$ ist.

Sei X nun die Eckenmenge eines d-Polytops P mit $d+3$ Ecken. Dann ist $\hat{X}$ eine Teilmenge von $S^1 \cup \{0\}$, wobei S^1 den Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Wir geben ein Gale-Diagramm zusammen mit den Durchmessern der S^1 an, die einen Punkt $\hat{x}$ mit dem Nullpunkt verbinden. (Es ist möglich, daß beide Schnittpunkte eines Durchmessers mit der S^1 in $\hat{X}$ liegen. Wenn das nicht der Fall ist, nennen wir den Durchmesser einfach.) Folgende Operationen führen zu isomorphen Diagrammen:

1. Verschieben eines Punktes $\hat{x}$ auf der S^1, so daß der zugehörige Durchmesser keinen anderen Durchmesser (außer im Nullpunkt) berührt.

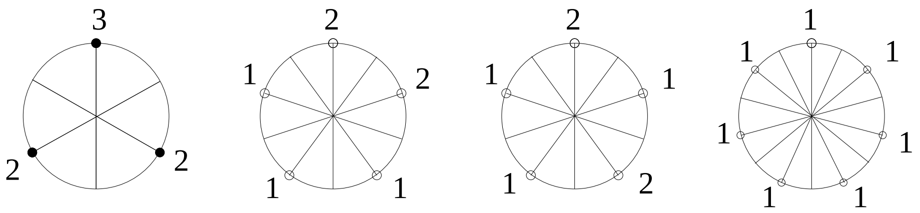
2. Zusammenfassen zweier Punkte $\hat{x}$ und $\hat{y}$ zu einem Punkt der Vielfachheit $\mathrm{v}(\hat{x}) + \mathrm{v}(\hat{y})$, wenn die zugehörigen Durchmesser einfach sind und durch keinen anderen Durchmesser getrennt werden.

Durch sukzessive Anwendungen dieser Operationen läßt sich jedem Gale-Diagramm ein isomorphes zuordnen, in dem die Punkte auf der S^1 äquidistant angeordnet sind und ihre Anzahl kleinstmöglich ist. Ein solches Diagramm heißt kontraktiertes Standard-Diagramm. Illustrierende Beispiele zu diesen Verfahren finden sich in [Gr], Ch. 6.3.

P ist genau dann simplizial, wenn $0 \notin \hat{X}$ ist und alle Durchmesser einfach sind. Damit hat das kontraktierte Standard-Diagramm eines simplizialen Polytops also eine ungerade Anzahl $k, k \geq 3$ von Durchmessern. In Abhängigkeit von k bezeichnen wir es im folgenden als vom ‚k-D-Typ'.

Eine Aufzählung der kombinatorischen Typen simplizialer d-Polytope mit $d+3$ Ecken ist also auf die Art möglich, daß man für festes d die k-D-Typen mit $3 \leq k \leq d+3$, k ungerade auflistet und dann die Vielfachheiten der Punkte in allen zulässigen Weisen verteilt.

Als Beispiel sei der Fall $d = 4$ angeführt:



Beschreiben wir explizit den Zusammenhang zwischen dem Gale-Diagramm eines simplizialen Polytops P und einem dualen Polytop P^*. Sei $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ die Eckenmenge von P und $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ die Menge der Facetten von P^*, dabei sei die Numerierung so gewählt, daß für den Antiisomorphismus $\varphi : \mathcal{F}(P) \to \mathcal{F}(P^*)$ gilt:

$$\varphi(x_i) = f_i.$$

Damit ist φ bereits festgelegt: Ist $f = \mathrm{conv}\{x_j \mid j \in J\}$ für $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ eine Seite von P, so ist aufgrund der inklusionsumkehrenden Wirkung von φ offensichtlich $\varphi(f) \subseteq \bigcap_{j \in J} f_j$, die Gleichheit ergibt sich aus der Gleichheit der Dimensionen.

Der Schnitt $\bigcap_{j \in J} f_j$ für beliebiges $J \subsetneq \{1, \ldots, n\}$, $J \neq \emptyset$ ist genau dann eine eigentliche Seite (der Dimension $d - |J|$) von P^*, wenn $\mathrm{conv}\{x_j \mid j \in J\}$ eine eigentliche Seite (der Dimension $|J| - 1$) von P ist, d.h., wenn 0 im relativen Inneren der konvexen Hülle von $\hat{X} \setminus \{\hat{x}_j \mid j \in J\}$ liegt.

Dieser unmittelbare Zusammenhang rechtfertigt es, daß wir im folgenden auch vom Gale-Diagramm von P^* schreiben, und die Punkte $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ als die den Facetten

$f_1, \ldots, f_n$ zugeordneten Punkte im Gale-Diagramm von P^* bezeichnen. Eine Teilmenge $\{\hat{x}_j \mid j \in J\}$ soll Seite bzw. Co-Seite von $\hat{X}$ heißen, wenn $\bigcap_{j \in J} f_j$ bzw. $\bigcap_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus J} f_j$ eine eigentliche Seite von P^* ist.

1.3 Fehlschnitt-Diagramme

Wir sind im folgenden daran interessiert, einfache Polytope durch das Schnittverhalten ihrer Facetten zu beschreiben. Als kombinatorisches Konzept für die Darstellung von Polytopen, das diesem Aspekt Rechnung trägt, werden wir das ‚Fehlschnitt-Diagramm' einführen. Dazu benötigen wir zunächst eine Terminologie, die es uns erlaubt von Polytopen und auch Teilen von Polytopen unabhängig von ihrer geometrischen Realisierung zu sprechen. In der Literatur steht dafür der Begriff des Komplexes zur Verfügung. Da wir aber an speziellen Situationen interessiert sind, treffen wir die folgenden Vereinbarungen.

Sei $\mathcal{M}$ ein endliche Menge mit der Teilordnung $\preceq$. Sei $\mathcal{M}_F$ die Menge der maximalen Elemente in $\mathcal{M}$, d.h. $\mathcal{M}_F = \{m \in \mathcal{M} \mid \text{ Es ex. kein } m' \text{ mit } m \preceq m' \text{ und } m \neq m'\}$. Setzen wir weiter $F(m) := \{m' \in \mathcal{M}_F \mid m \preceq m'\}$.

Definition 1.3 *Die Menge $\mathcal{M}$ heißt Facettenbündel, wenn*

1. *jedes $m \in \mathcal{M}$ eindeutig durch $F(m)$ bestimmt ist,*
2. *für jede Teilmenge $\mathcal{N}_F \subseteq \mathcal{M}_F$ entweder $\{m \in \mathcal{M} \mid m \preceq m' \text{ für alle } m' \in \mathcal{N}_F\} = \emptyset$ ist oder ein $n \in \mathcal{M}$ mit $F(n) = \mathcal{N}_F$ existiert, und*
3. *genau dann $m \preceq n$ ist, wenn $F(m) \supseteq F(n)$ ist.*

Ist P ein einfaches Polytop und F eine Teilmenge der Facetten, so ist die Menge

$$\{g = \bigcap_{f \in F'} f \mid g \neq \emptyset,\ F' \subseteq F\}$$

mit der durch $\subseteq$ gegebenen Teilordnung ein Facettenbündel. (Die zweite Eigenschaft in der Definition ergibt sich aus 1.1.) Insbesondere ist $\mathcal{F}(P) \setminus \{P, \emptyset\}$ ein Facettenbündel.

Mit Blick auf dieses Beispiel nennen wir die Elemente aus $\mathcal{M}_F$ Facetten und schreiben die Teilordnung als $\subseteq$. Weiter setzen wir $\bigcap_{m \in \mathcal{N}_F} m := n$, falls ein $n \in \mathcal{M}$ mit $F(n) = \mathcal{N}_F$ existiert und $\bigcap_{m \in \mathcal{N}_F} m := \emptyset$ sonst.

Ist $\mathcal{N}_F \subseteq \mathcal{M}_F$, so wollen wir unter dem Facettenbündel $\mathcal{N}$ immer die vollständige durch $\mathcal{N}_F$ induzierten Menge verstehen, d.h.

$$\mathcal{N} = \{\bigcap_{m \in \mathcal{N}'_F} m \mid \mathcal{N}'_F \subseteq \mathcal{N}_F\}.$$

Definition 1.4 *Sei $\mathcal{M}$ ein Facettenbündel und $\mathcal{N}_F \subseteq \mathcal{M}_F$. Dann heißt $\mathcal{N}_F$ Fehlschnitt, wenn $\bigcap_{m\in\mathcal{N}'_F} m \neq \emptyset$ für alle $\mathcal{N}'_F \subsetneq \mathcal{N}_F$ und $\bigcap_{m\in\mathcal{N}_F} m = \emptyset$ ist.*

Die definierende Eigenschaft eines Facettenbündels ist gerade so gewählt, daß sich aus der Kenntnis der Fehlschnitte bereits die ganze Menge ergibt: $\mathcal{M}$ besteht aus genau den Elementen $\bigcap_{m\in\mathcal{N}_F} m$, für die $\mathcal{N}_F \subseteq \mathcal{M}_F$ keinen Fehlschnitt enthält. Das Fehlschnitt-Diagramm wird nun die graphische Darstellung dieser Informationen sein:

Sei $\mathcal{M}$ ein Facettenbündel. Ein **Fehlschnitt-Diagramm** von $\mathcal{M}$ ist eine Menge von Punkten im $\mathbb{R}^2$, wo jeder Punkt einer Facette entspricht und jeder Fehlschnitt durch eine Linie umschlossen ist. Der besseren Darstellbarkeit wegen sollen auch folgende Varianten erlaubt sein: Sind mehrere Punkte in genau den selben umschlossenen Mengen enthalten, so können sie durch einen Punkt mit einer entsprechenden Zahl dargestellt werden. Diese Zahl heißt dann die Vielfachheit des Punktes. Besteht eine umschlossene Menge aus nur zwei Punkten (evtl. größerer Vielfachheit), so kann sie durch eine punktierte Verbindungslinie dargestellt werden.

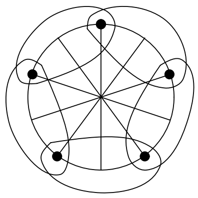
In ganz naheliegender Weise wollen wir den Begriff des Fehlschnitts auch für Teilmengen von Facetten eines Polytops gebrauchen, d.h. eine solche Teilmenge soll Fehlschnitt heißen, wenn die entsprechenden Facetten des Facettenbündels einen Fehlschnitt bilden.

Beispiele:

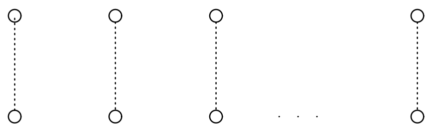
1) Ist $\hat{X} = \{\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n\}$ das Gale-Diagramm eines einfachen Polytops P mit Facettenmenge $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$, wobei $\hat{x}_i$ der Facette f_i zugeordnet sei, so ist eine Teilmenge $F' \subseteq F$ genau dann ein Fehlschnitt von P, wenn jede echte Teilmenge von $\hat{X}' = \{\hat{x}_i \mid f_i \in F'\}$ eine Seite von $\hat{X}$ ist, $\hat{X}'$ selber aber nicht.

2) In einem einfachen d-Polytop mit $d+2$ Seiten gibt es genau zwei Fehlschnitte, nämlich die disjunkten Mengen der Facetten, die im zugehörigen Gale-Diagramm der $+1$ und die, die der -1 zugeordnet werden.

3) In einem einfachen Polytop mit $d+3$ Seiten, dessen Gale-Diagramm vom k-D-Typ ist, sind die Fehlschnitte genau durch die Mengen von Facetten gegeben, die im Gale-Diagramm $\frac{k-1}{2}$ benachbarten Punkten zugeordnet werden. Hier sei z.B. der 5-D-Typ aufgeführt, die Fehlschnitte werden durch die umschlossenen Mengen dargestellt:

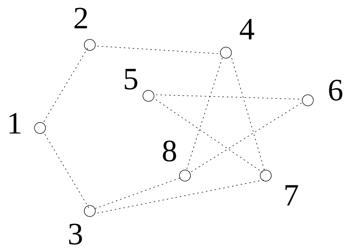


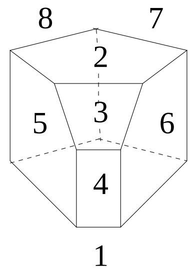
4) Das folgende Fehlschnitt-Diagramm stellt einen Würfel dar:



Die Dimension des Würfels ist gleich der Anzahl der Fehlschnitte.

5) Das folgende Fehlschnitt-Diagramm beschreibt das nebenstehende Polytop:





Definition 1.5 *Sei $k \in \mathbb{N}$. Ein Polytop P heißt k-frei, wenn es keine Fehlschnitte der Mächtigkeit größer oder gleich k enthält.*

An dieser Stelle ist zu bemerken, daß unser Begriff des Fehlschnitts einem etablierten ‚dualen' Begriff, nämlich dem der Fehlseite gegenübersteht. Eine Fehlseite eines Polytops ist eine Menge von Ecken, die minimal bezüglich der Eigenschaft ist, daß ihre konvexe Hülle keine Seite des Polytops ist, siehe z.B. [A-P] oder [Sh]. Ein Fehlschnitt ist also das Bild einer Fehlseite des dualen Polytops unter dem entsprechenden Antiisomorphismus der Seitenverbände.

1.3.1 Grundlegende Eigenschaften

Offensichtlich enthält jede Menge von Facetten, deren Schnitt leer ist, einen Fehlschnitt.

Sei P ein einfaches Polytop und f eine Facette von P. Dann ist f selbst ein Polytop. Das Fehlschnitt-Diagramm von f läßt sich leicht aus dem von P berechnen: Sei $\{f_1, \dots, f_k\}$ die Menge der Facetten von P mit $f_i \cap f \neq \emptyset$ und $f_i \neq f$. Setzen wir $f_i' := f_i \cap f$ für $i = 1, \dots, k$ und für eine Teilmenge $G \subseteq \{f_1, \dots, f_k\}$

$$G' := \{f_i' \mid f_i \in G\}.$$

Dann gilt:

Lemma 1.6 *G' ist genau dann ein Fehlschnitt von f, wenn entweder*

1. *$\{f\} \cup G$ ein Fehlschnitt von P ist, oder*
2. *G ein Fehlschnitt von P ist und kein $H \subsetneq G$ existiert, so daß $\{f\} \cup H$ ein Fehlschnitt von P ist.*

Beweis: Sei $G = \{f_1, \dots, f_l\}$. Angenommen G' ist ein Fehlschnitt, d.h., es ist

$$\bigcap_{f'_i \in G'} f'_i = \emptyset \quad \text{und} \quad \bigcap_{f'_i \in G' \setminus \{f'_j\}} f'_i \neq \emptyset \quad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, l\}.$$

Das ist äquivalent zu

$$(*) \quad f \cap \bigcap_{f_i \in G} f_i = \emptyset \quad \text{und} \quad f \cap \bigcap_{f_i \in G \setminus \{f_j\}} f_i \neq \emptyset \quad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, l\}.$$

Nun sind die beiden Fälle

$$(1) \quad \bigcap_{f_i \in G} f_i \neq \emptyset \ \text{ und } (2) \quad \bigcap_{f_i \in G} f_i = \emptyset$$

zu unterscheiden. Im Fall (1) ist $G \cup \{f\}$ und im Fall (2) ist G ein Fehlschnitt. Ein $H \subsetneq G$ wie in der Behauptung kann aufgrund der zweiten Eigenschaft unter $(*)$ nicht existieren.

Ist umgekehrt $\{f\} \cup G$ ein Fehlschnitt, so folgt offensichtlich $(*)$ und somit auch, daß G' ein Fehlschnitt ist.

Im zweiten Fall haben wir

$$\bigcap_{f_i \in G} f_i = \emptyset \quad \text{und} \quad \bigcap_{f_i \in G \setminus \{f_j\}} f_i \neq \emptyset \quad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, l\}.$$

Damit gilt auch $(*)$, denn $f \cap \bigcap_{f_i \in G \setminus \{f_j\}} f_i = \emptyset$ impliziert, daß $\{f\} \cup G \setminus \{f_j\}$ einen Fehlschnitt enthält. Das ist aber nach Voraussetzung nicht der Fall. Aus $(*)$ folgt wiederum, daß G' ein Fehlschnitt ist. □

Folgerung 1.7 *Ist P k-frei, so ist auch jede Facette f von P ein k-freies Polytop.*

Besonders einfach ist die Situation für 3-freie Polytope:

Folgerung 1.8 *Sei P ein einfaches, 3-freies Polytop mit einer Facette f. Seien $\{f_1, \ldots, f_k\}$ genau die Facetten, deren Schnitt mit f nicht leer ist. Dann ist das Fehlschnitt-Diagramm von f genau das von den $f_1, \ldots, f_k$ aufgespannte Teildiagramm im Fehlschnitt-Diagramm von P.*

Dank der oben erläuterten Eigenschaften eignen sich Fehlschnitt-Diagramme gut für Induktionsbeweise. Wir erhalten z.B.:

Lemma 1.9 *Jede Facette f eines einfachen Polytops P ist in einem Fehlschnitt von P enthalten.*

Beweis: Die Behauptung ist für 1- und 2-dimensionale Polytope klar. Sei P nun ein beliebiges d-Polytop mit einer weiteren Facette g. Sind f und g disjunkt, so ist $\{f, g\}$ ein Fehlschnitt. Ist dagegen $f \cap g \neq \emptyset$, so ist nach Induktionsvoraussetzung $f' = g \cap f$ in einem Fehlschnitt G' von g enthalten. Nach 1.6 ist G oder $G \cup \{g\}$ ein Fehlschnitt von P. $\square$

Unter dem Produkt zweier Fehlschnitt-Diagramme D_1 und D_2 wollen wir ein Fehlschnitt-Diagramm D verstehen, dessen Punktmenge die Vereinigung der Punktmengen von D_1 und D_2 ist und wo die Fehlschnitte von D genau aus den Fehlschnitten von D_1 und D_2 bestehen. Man überlegt sich leicht:

Lemma 1.10 *Seien $P_1 \subseteq \mathbb{R}^{d_1}$ und $P_2 \subseteq \mathbb{R}^{d_2}$ einfache Polytope. Das Fehlschnitt-Diagramm des Produktpolytops*

$$P := \{(x, y) \mid x \in P_1, y \in P_2\} \subseteq \mathbb{R}^{d_1+d_2}$$

ist das Produkt der Fehlschnitt-Diagramme von P_1 und P_2.

2 Coxeter-Polytope im hyperbolischen Raum

Wir erläutern zunächst den Zusammenhang zwischen Coxeter-Polytopen und diskreten Spiegelungsgruppen.

Im folgenden bezeichnen wir den hyperbolischen Raum der Dimension d mit $\mathbb{H}^d$. Eine Gruppe, die von Spiegelungen an Hyperebenen des $\mathbb{H}^d$ erzeugt wird, die diskret ist und einen Fundamentalbereich von endlichem Volumen besitzt, heißt **kristallographische, hyperbolische Spiegelungsgruppe**. Da es sich bei den Gruppen, die Gegenstand dieser Arbeit sind, durchweg um solche handelt, die auf dem hyperbolischen Raum operieren, lassen wir dies im folgenden häufig unerwähnt.

Beweise zu den Aussagen dieses Abschnitts finden sich in [Vi3].

Um den Fundamentalbereich kristallographischer Spiegelungsgruppen zu beschreiben, wählen wir das Kleinsche Modell des hyperbolischen Raumes:

Bezeichne $\mathbb{R}^{d,1}$ den Vektorraum $\mathbb{R}^{d+1}$ versehen mit der quadratischen Form $-x_0^2 + \ldots + x_d^2$ und der zugehörigen Bilinearform $(\, , \,)$. Die Menge der Vektoren

$$C = \{v \in \mathbb{R}^{d+1} \mid (v, v) < 0\}$$

zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten C_+ und C_-. Wir identifizieren den $\mathbb{H}^d$ mit der Menge $C_+/\mathbb{R}_{>0}$. Mit $\overline{\mathbb{H}^d}$ bezeichnen wir den Abschluß von $C_+/\mathbb{R}_{>0}$ in $(\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\})/\mathbb{R}_{>0}$. Die Punkte aus $\overline{\mathbb{H}^d} \setminus \mathbb{H}^d$ heißen Punkte im Unendlichen. Bezeichne π die natürliche Abbildung

$$\pi : \mathbb{R}^{d,1} \setminus \{0\} \longrightarrow (\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\})/\mathbb{R}_{>0}.$$

Die Hyperebenen im $\mathbb{H}^d$ sind in diesem Modell von der Form

$$H_v = \{\pi(w) \mid w \in C_+, (v, w) = 0\},$$

wobei $v \in \mathbb{R}^{d,1}$ mit $(v, v) > 0$ ist. Setzen wir

$$H_v^- = \{\pi(w) \mid w \in C_+, (v, w) \leq 0\} \text{ und } H_v^+ = \{\pi(w) \mid w \in C_+, (v, w) \geq 0\}.$$

Ein Fundamentalbereich einer diskreten Gruppe, die von endlich vielen Spiegelungen an Hyperebenen $\{H_{v_i} \mid i \in I\}$ erzeugt wird, ist durch ein sogenanntes Coxeter-Polyeder gegeben, d.h., ein Polyeder

$$P = \bigcap_{i \in I} H_{v_i}^-,$$

wo zwei Hyperebenen H_{v_i} und H_{v_j} entweder disjunkt sind, oder der von $H_{v_i}^-$, $H_{v_j}^-$ eingeschlossene Winkel $\angle(H_{v_i}, H_{v_j})$ von der Form $\frac{\pi}{k}$ für eine natürliche Zahl $k \geq 2$ ist. Umgekehrt beschreibt jedes solche, nicht leere Coxeter-Polyeder eine diskrete, endlich erzeugte Spiegelungsgruppe.

Analoge Aussagen gelten bekanntermaßen auch in euklidischen und sphärischen Räumen.

Unser Interesse gilt solchen kristallographischen Spiegelungsgruppen, deren Fundamentalbereiche kompakt sind. Insbesondere ist das Volumen eines kompakten Fundamentalbereichs endlich.

Vernachlässigen wir zunächst die spezielle Form der Winkel.

2.1 Spitzwinklige Polyeder im hyperbolischen Raum

Sei

$$P = \bigcap_{i \in I} H_{v_i}^-$$

im $\mathbb{H}^d$ mit $P \neq \emptyset$ und I endlich gegeben. Es sei vorausgesetzt, daß in der obigen Darstellung von P keine Hyperebene unwesentlich in dem Sinne ist, daß der entsprechende Halbraum den gesamten Schnitt der übrigen Halbräume enthält.

Das Volumen von P ist genau dann endlich, wenn P die konvexe Hülle endlich vieler Punkte im $\overline{\mathbb{H}^d}$ ist. P ist genau dann kompakt, wenn es die konvexe Hülle endlich vieler Punkte im $\mathbb{H}^d$ ist. Den Sprachgebrauch aus Abschnitt 1 verallgemeinernd, bezeichnen wir P auch im ersten Fall als Polytop. Ecken von P, die in $\overline{\mathbb{H}^d} \setminus \mathbb{H}^d$ liegen, heißen ‚Ecken im Unendlichen' oder ‚Spitzen'. Mit einer Seite f von P ist aber immer eine Seite mit $f \subseteq \mathbb{H}^d$ gemeint. Eine Ecke im Unendlichen ist in diesem Sinne also keine Seite von P.

Sei P weiter spitzwinklig, d.h. für zwei Hyperebenen H_{v_i}, H_{v_j} mit nicht leerem Schnitt sei $\angle(H_{v_i}^-, H_{v_j}^-) \leq \frac{\pi}{2}$.

Normieren wir die v_i auf die Länge $(v_i, v_i) = 1$ und setzen $G(P) := ((v_i, v_j))_{i,j \in I}$. Die v_i heißen dann Normalvektoren und $G(P)$ die Gram-Matrix von P. Unter den obigen Voraussetzungen ist $(v_i, v_j) \leq 0$ für alle $i, j \in I, i \neq j$, und es gilt:

1. Ist $(v_i, v_j) \in (-1, 0]$, so schneiden sich die entsprechenden Hyperebenen mit dem Winkel α, für den $-\cos\alpha = (v_i, v_j)$ ist.

2. Ist $(v_i, v_j) = -1$, so sind die Hyperebenen parallel, d.h., sie schneiden sich in $\overline{\mathbb{H}^d} \setminus \mathbb{H}^d$.

3. Ist $(v_i, v_j) < -1$, so sind die Hyperebenen disjunkt. Für die Distanz $\rho(H_{v_i}, H_{v_j})$ gilt dann, daß $-\cosh\rho(H_{v_i}, H_{v_j}) = (v_i, v_j)$ ist.

Eine Menge von Vektoren $\{w_i \mid i \in J\}$ heißt zerlegbar, wenn Indexmengen J_1, J_2 existieren, so daß $J = J_1 \cup J_2$ ist und $(w_i, w_j) = 0$ für alle $i \in J_1, j \in J_2$ ist. Entsprechend heißt die Gram-Matrix dieser Vektoren zerlegbar, wenn $\{w_i \mid i \in J\}$ zerlegbar ist.

Die Gram-Matrix eines Polyeders mit endlichem Volumen ist unzerlegbar.

Mit der Signatur einer Gram-Matrix bezeichnen wir das Tripel (n_+, n_-, n_0) bestehend aus der Anzahl der Eigenwerte $+1, -1$ bzw. 0.

Satz 2.1 *([Vi3], Th. 2.1) Sei $G = (g_{i,j})$ eine unzerlegbare, symmetrische Matrix der Signatur $(d, 1, n_0)$ mit $g_{i,i} = 1$ und $g_{i,j} \leq 0$ für $i \neq j$. Dann gibt es ein Polyeder im $\mathbb{H}^d$ mit $G(P) = G$. Bis auf Isometrie ist P eindeutig bestimmt.*

Ist G die Gram-Matrix von P und $J \subseteq I$ eine Teilmenge der Indexmenge, so bezeichne G_J die Gram-Matrix der Vektoren $\{v_i \mid i \in J\}$.

Der Seitenverband des Polyeders P läßt sich vermöge der folgenden Sachverhalte mittels der Gram-Matrix bestimmen:

Satz 2.2 *([Vi3], Th. 3.1) Sei $P \subseteq \mathbb{H}^d$ wie oben mit Gram-Matrix G gegeben. Sei $J \subseteq I$. Genau dann ist*

$$Q = P \cap \bigcap_{i \in J} H_{v_i}$$

eine eigentliche Seite von P, wenn G_J positiv definit ist. In diesem Fall hat die Seite die Dimension $d - |J|$.

Damit ergibt sich insbesondere:

Folgerung 2.3 *Jedes spitzwinklige Polyeder im hyperbolischen Raum ist einfach.*

Eine unzerlegbare, symmetrische Matrix mit nicht positiven Einträgen auf der Diagonalen heißt parabolisch, wenn sie positiv semidefinit und degeneriert ist. Insbesondere ist dann jede echte Untermatrix positiv definit. Eine symmetrische Matrix heißt parabolisch, wenn alle ihre unzerlegbaren Untermatrizen parabolisch sind.

Satz 2.4 *([Vi3], Th. 3.2) Seien Q und P wie oben gegeben. Genau dann ist Q eine Ecke von P im Unendlichen, wenn G_J eine parabolische Matrix vom Rang $d - 1$ ist.*

Satz 2.5 *(vgl. [Vi3], Th. 4.1) Sei $P \subseteq \mathbb{H}^d$ wie oben mit Gram-Matrix G gegeben. Ist P kompakt, so ist G_J für kein $J \subseteq I$ parabolisch.*

Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Kompaktheit von P wird im folgenden Satz beschrieben:

Satz 2.6 *(vgl. [Vi3], Prop. 4.2) Ein Polyeder $P \subseteq \mathbb{H}^d$ ist genau dann kompakt, wenn der Seitenverband von P mit dem Seitenverband eines d-dimensionalen, kompakten Polytops P' übereinstimmt.*

Dabei ist es nicht von Bedeutung, ob P' ein hyperbolisches Polytop ist oder eines der Polytope im $\mathbb{R}^d$ wie wir sie in Abschnitt 1 beschrieben haben. So überlegt man sich leicht, daß man zu jedem kompakten $P \subset \mathbb{H}^d$ ein $P' \subset \mathbb{R}^d$ mit isomorphen Seitenverband konstruieren kann und umgekehrt zu jedem $P \subset \mathbb{R}^d$ auch ein entsprechendes $P' \subset \mathbb{H}^d$. Wir können also die in Abschnitt 1 beschriebenen Hilfsmittel zur Beschreibung und Klassifikation von Polytopen, wie die Gale- und Fehlschnitt-Diagramme, übernehmen.

2.2 Coxeter-Diagramme

Kommen wir auf die Coxeter-Polytope zurück. Zu ihrer anschaulichen Darstellung stehen die Coxeter-Diagramme zur Verfügung.

Sei

$$P = \bigcap_{i \in I} H_{v_i}^-$$

ein solches Polytop. Das Coxeter-Diagramm $S(P)$ besteht aus einer Menge von Ecken $\{v_i' \mid i \in I\}$ und den gewichteten Kanten $[v_i', v_j']$. Das Gewicht der Kante $[v_i', v_j']$ ist als der negative Wert von (v_i, v_j) definiert. Graphisch werden die Kanten wie folgt dargestellt:

Hat die Kante $[v_i', v_j']$ das Gewicht $\cos(\frac{\pi}{k})$, so werden v_i' und v_j' entweder durch eine $(k-2)$-fache Linie oder eine einfache Linie mit der Beschriftung k verbunden.

Hat die Kante $[v_i', v_j']$ das Gewicht 1, so werden v_i' und v_j' entweder durch eine dicke Linie oder eine normale Linie mit der Beschriftung ∞ verbunden.

Hat die Kante $[v_i', v_j']$ ein Gewicht größer als 1, so werden v_i' und v_j' durch eine unterbrochene Linie verbunden, die im Bedarfsfall mit dem Gewicht beschriftet wird.

Die Vielfachheit einer Kante $[v_i', v_j']$ vom Gewicht $\cos(\pi/k)$ ist als

$$\mathrm{m}[v_i', v_j'] := k - 2$$

definiert. Wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, werden wir auf eine Unterscheidung in der Notation der Normalvektoren $\{v_i \mid i \in I\}$ und der Ecken im Coxeter-Diagramm $\{v_i' \mid i \in I\}$ verzichten. Der Anschauung entsprechend ist im folgenden mit einer Kante immer eine Kante vom Gewicht ungleich 0 gemeint, und $S(P)$ heißt zusammenhängend, wenn es zwischen je zwei Ecken einen Pfad aus Kanten vom Gewicht größer als 0 gibt.

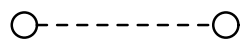
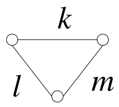
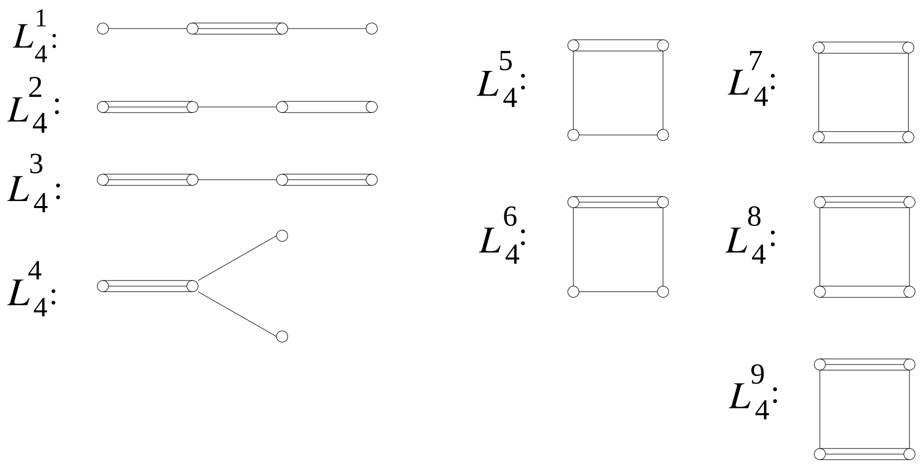
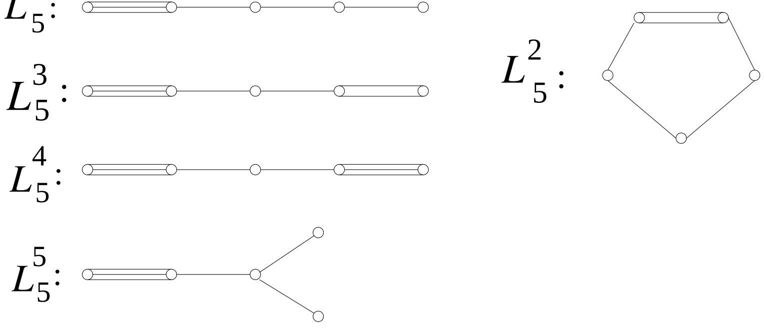
Da die Gram-Matrix eines Polyeders mit endlichem Volumen unzerlegbar ist, gilt dies auch im obigen Sinne für das Coxeter-Diagramm.

Auf umgekehrte Weise beschreibt ein Coxeter-Diagramm S natürlich auch eine symmetrische Matrix $G(S)$. Im folgenden heißt S sphärisch bzw. parabolisch, wenn $G(S)$ positiv definit bzw. parabolisch ist. Ist die Signatur von $G(S)$ gleich (n_+, n_-, n_0) für $n_+ \geq 1$ und $n_- = 1$, so heißt S hyperbolisch.

Die sphärischen und parabolischen Coxeter-Diagramme sind seit langem klassifiziert. Ihre Zusammenhangskomponenten bestehen aus den Diagrammen $\{A_n, B_n = C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2^{(m)}, H_3, H_4\}$ bzw. $\{\tilde{A}_n, \tilde{B}_n, \tilde{C}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8, \tilde{F}_4, \tilde{G}_2\}$. Die Diagramme finden sich z.B. in [Bou], Chap. V, VI.

1950 hat F. Lannér die kristallographischen Spiegelungsgruppen auf dem hyperbolischen Raum, deren Fundamentalbereich ein kompaktes Simplex ist, klassifiziert. Sie werden durch genau die hyperbolischen Coxeter-Diagramme beschrieben, deren echte Teildiagramme alle sphärisch sind. Diese Diagramme heißen auch Lannér-Diagramme. Da wir noch häufiger auf sie verweisen werden, haben wir denen mit mehr als 3 Ecken Namen gegeben, die der Tabelle 1 zu entnehmen sind. Die Ordnung eines Coxeter-Diagramms bezeichnet die Anzahl der Ecken.

Tabelle 1

Ordnung	Lannér-Diagramme
2	
3	 $(2 \le k, l, m < \infty,$ $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} < 1)$
4	
5	

Ist S ein Coxeter-Diagramm, so ist unter $v' \in S$ ein Element der Eckenmenge von S zu verstehen.

Im Zusammenhang mit den Coxeter-Diagrammen werden wir noch folgende Begriffe verwenden: Ein Diagramm heißt linear (zyklisch), wenn es homeomorph zu einem

Segment (Zykel) ist. Unter einem Teildiagramm verstehen wir immer den von einer Teilmenge der Ecken erzeugten Graphen, wobei die Gewichte der Kanten mit den ursprünglichen übereinstimmen. Zwei Teildiagramme S_1 und S_2 (insbesondere zwei Ecken) heißen benachbart, wenn es mindestens eine Kante $[v'_1, v'_2]$ mit $v'_i \in S_i$ gibt, die vom Gewicht $\cos(\frac{\pi}{k})$ für ein $k > 2$ ist. Das Erzeugnis mehrerer Teildiagramme $S_1, \ldots, S_l$ ist das Teildiagramm, daß von der Vereinigung der Eckenmengen erzeugt wird. Es wird mit $\langle S_1, \ldots, S_l \rangle$ bezeichnet. Die Determinante eines Coxeter-Diagramms ist die Determinante der zugehörigen Gram-Matrix.

2.3 Arithmetische Spiegelungsgruppen

Sei F ein algebraischer Zahlkörper mit dem Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O}_F$. Ein $\mathcal{O}_F$-Gitter L ist einen Modul über $\mathcal{O}_F$, der mit einer symmetrischen Bilinearform $(\ ,\ ) : L \times L \longrightarrow \mathcal{O}_F$ versehen ist.

Eine kristallographische Spiegelungsgruppe W, die auf dem hyperbolischen Raum operiert, ist arithmetisch, wenn ein algebraischer Zahlkörper F und ein $\mathcal{O}_F$-Gitter L mit folgenden Eigenschaften existieren:

- F ist totalreell,
- L ist für ein $k > 0$ von der Signatur $(k, 1)$,
- für jede Einbettung $\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{R}$ ungleich der Identität, ist ${}^{\sigma}L$ (d.h. das Gitter L mit der Bilinearform $\sigma(\ ,\ )$) positiv definit und
- W ist von endlichem Index in der orthogonalen Gruppe von L.

Der Körper F heißt dann Grundkörper von W. Er ist eindeutig bestimmt. Ausgangspunkt vieler Untersuchungen zu arithmetischen Spiegelungsgruppen ist das folgende Ergebnis von Vinberg:

Satz 2.7 *([Vi1], Th. 2) Sei W eine kristallographische Spiegelungsgruppe auf dem hyperbolischen Raum mit einem Fundamentalbereich P. Sei $G = (g_{i,j})_{i,j \in I}$ die Gram-Matrix von P. Setze*

$$\tilde{F} = \mathbb{Q}(\{g_{i,j}\}_{i,j \in I})$$

und

$$F = \mathbb{Q}(\{g_{i_1,i_2} g_{i_2,i_3} \cdots g_{i_{m-1},i_m} g_{i_m,i_1}\}).$$

Genau dann ist W arithmetisch, wenn $\tilde{F}$ ein totalreeller algebraischer Zahlkörper ist, wenn für jede Einbettung $\sigma : \tilde{F} \hookrightarrow \mathbb{R}$, $\sigma_{|F} \neq id$, die Matrix ${}^{\sigma}G$ positiv semidefinit ist und alle Zahlen $2g_{i,j}$ ganz sind.

Der im Satz definierte Körper F ist der Grundkörper von W. Ein Coxeter-Polytop heißt arithmetisch, wenn die zugehörige Spiegelungsgruppe arithmetisch ist.

3 Zur Realisierbarkeit von Polytopen als hyperbolische Coxeter-Polytope

Fassen wir zunächst einige der Ergebnisse aus Abschnitt 1 und 2 zusammen, um einen grundlegenden Gedanken der Arbeit zu formulieren:

Jedes kompakte Coxeter-Polytop

$$P = \bigcap_{i \in I} H_{v_i}^- \subset \mathbb{H}^d$$

wird durch ein zusammenhängendes Coxeter-Diagramm S beschrieben, für das

(1) das Facettenbündel $\mathcal{M}(S)$, das sich vermöge 2.2 aus S ergibt, ein einfaches, kompaktes d-Polytop beschreibt, und

(2) die Gram-Matrix $G(S)$ von der Signatur $(d, 1, n_0)$ ist (wie sich leicht aus 2.2 ergibt).

Ist umgekehrt ein zusammenhängendes Coxeter-Diagramm S mit diesen beiden Eigenschaften gegeben, so existiert auch ein einfaches, kompaktes, d-dimensionales Coxeter-Polytop mit diesem Diagramm (2.1, 2.6).

Die Klassifikation der hyperbolischen Coxeter-Polytope mit wenigen Facetten ist also gleichbedeutend mit der Klassifikation der entsprechenden Coxeter-Diagramme. Zur Überprüfung der Eigenschaft (1) ist es sinnvoll die Facettenbündel einfacher Polytope durch ihre Fehlschnitte zu beschreiben, denn mit 2.2 und 2.5 ergibt sich sofort:

Lemma 3.1 *Sei*

$$P = \bigcap_{i \in I} H_{v_i}^-$$

ein hyperbolisches, kompaktes Coxeter-Polytop. Genau dann ist $\{H_{v_i} \cap P \mid i \in J\}$ *ein Fehlschnitt, wenn daß von* $\{v_i' \mid i \in J\}$ *erzeugte Coxeter-Diagramm ein Lannér-Diagramm ist.*

Das Lemma kann auch so formuliert werden, daß in einem Coxeter-Diagramm S, das keine parabolischen Teildiagramme enthält, die Lannér-Diagramme genau den Fehlschnitten in $\mathcal{M}(S)$ entsprechen.

Da es keine Lannér-Diagramme der Ordnung größer als 5 gibt und nur wenige der Ordnung 4 und 5, ist der Seitenverband eines Coxeter-Polytops starken Einschränkungen unterworfen. So folgt z.B. unmittelbar, daß jedes Coxeter-Polytop 6-frei ist.

Die folgenden Formalismen ermöglichen es, für ein Facettenbündel $\mathcal{M}$ die Frage zu untersuchen, ob ein zusammenhängendes Coxeter-Diagramm S mit den Eigenschaften (1), (2) und $\mathcal{M}(S) = \mathcal{M}$ existiert.

Sei $\mathcal{M}$ ein Facettenbündel mit Facettenmenge $\mathcal{M}_F$. Bezeichne $C(\mathcal{M}_F)$ die Menge aller zusammenhängenden Coxeter-Diagramme S, die keine parabolischen Teildiagramme enthalten und deren Facettenbündel $\mathcal{M}(S)$ mit $\mathcal{M}$ übereinstimmen. Das Facettenbündel $\mathcal{M}$ heißt **Coxeter-realisierbar**, wenn $C(\mathcal{M}_F)$ nicht leer ist.

Ist $S \in C(\mathcal{M}_F)$ eine Coxeter-Realisierung von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'_F \subseteq \mathcal{M}_F$, so bezeichne $S_{|\mathcal{M}'_F}$ den Teilgraph von S, der von den Ecken erzeugt wird, die den Facetten aus $\mathcal{M}'_F$ entsprechen.

Mit $\mathcal{M}_1 \times_k \mathcal{M}_2$ bezeichnen wir ein Facettenbündel mit einer Facettenmenge $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ und den folgenden Eigenschaften:

1. Es ist $|\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2| = k$, und
2. eine Teilmenge $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ ist genau dann ein Fehlschnitt, wenn $\mathcal{N}$ Fehlschnitt einer der beiden Mengen $\mathcal{M}_1$ oder $\mathcal{M}_2$ (insbesondere also $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}_i$ für ein i) ist.

Das Facettenbündel von $\mathcal{M}_1 \times_k \mathcal{M}_2$ ergibt sich also aus den Facettenbündeln der $\mathcal{M}_i$ und der Schnittmenge $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$. Die Angabe der Schnittmenge erübrigt sich, wenn es sich bei den Mengen $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ entweder um Fehlschnitte handelt oder um Mengen, die keine Fehlschnitte enthalten.

Für ein Coxeter-Diagramm S und die Facettenmenge M_2 bezeichne $C(S \times_k \mathcal{M}_2)$ die Menge der zusammenhängenden Coxeter-Diagramme S', die das Facettenbündel von $\mathcal{M}_F(S) \times_k \mathcal{M}_2$ realisieren und wo darüberhinaus $S'_{|\mathcal{M}_F(S)} = S$ ist. Analog zu obigem heißt $S \times_k \mathcal{M}_2$ Coxeter-realisierbar, wenn $C(S \times_k \mathcal{M}_2) \neq \emptyset$ ist. Für zwei Coxeter-Diagramme S und S' ist $S \times_k S'$ entsprechend aufzufassen.

Ein Facettenbündel $\mathcal{M}$ heißt **Schnitt-vollständig**, wenn es keinen Fehlschnitt enthält. Ein Bündel, bestehend aus einer einzigen Facette, ist nach Definition Schnitt-vollständig.

Beispiel: Sei S ein Coxeter-Diagramm. Die Coxeter-Realisierungen von $S \times_0 \{f\}$ bestehen genau aus den zusammenhängenden Coxeter-Diagrammen, die S um eine Ecke vergrößern und die als zusammenhängende, nicht sphärische Teildiagramme genau die Lannér-Diagramme von S enthalten. Dabei ist f entweder die Facette eines einelementigen Facettenbündels oder die Ecke eines einelementigen Coxeter-Graphen.

Ein Facettenbündel $\mathcal{M}$ heißt **hyperbolisch realisierbar**, wenn es Coxeter-realisierbar ist und mindestens ein $S \in C(\mathcal{M}_F)$ hyperbolisch ist.

3.1 Zur Coxeter-Realisierbarkeit

Definition 3.2 *Sei S ein Coxeter-Diagramm. Eine Ecke v von S heißt offen (bezüglich S), wenn $S \times_0 \{v'\}$ Coxeter-realisierbar ist und die Ecken v und v' in einer Realisierung benachbart sind.*

Die Existenz einer offenen Ecke ist notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß man ein Coxeter-Diagramm um eine Ecke vergrößern kann, so daß es zusammenhängend bleibt und keine zusätzlichen, nicht sphärischen Teildiagramme enthält.

Setzt man in sphärischen Coxeter-Diagrammen die Vielfachheiten der Kanten herab, so bleiben sie sphärisch. Etwas allgemeiner ergibt sich damit:

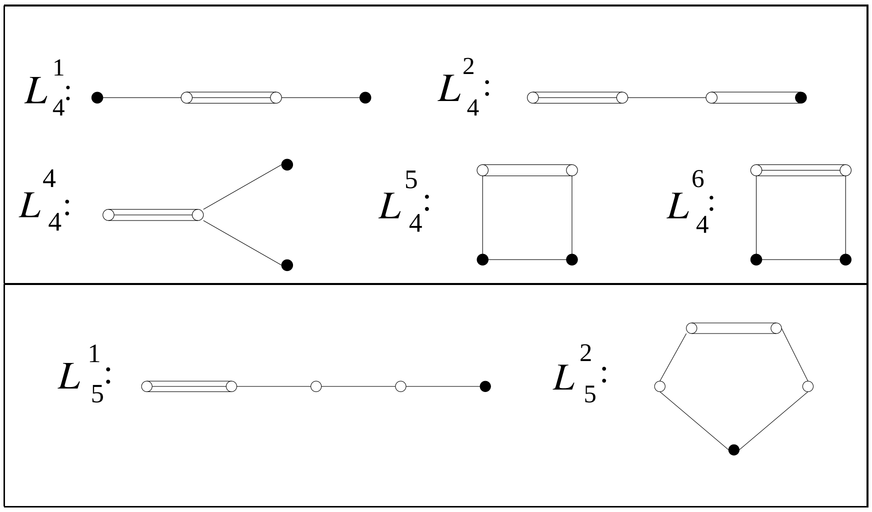
Lemma 3.3 *Seien S und S' Coxeter-Diagramme mit derselben Eckenmenge. Die Vielfachheit jeder Kante in S' sei größer oder gleich der Vielfachheit der entsprechenden Kante in S. Ist dann S_1 ein nicht sphärisches Teildiagramm von S, so ist auch der von den Ecken aus S_1 erzeugte Teilgraph in S' nicht sphärisch.*

Als Folgerung erhalten wir:

Lemma 3.4 *Sei S ein Coxeter-Diagramm mit offener Ecke v. Dann gibt es ein $S' \in C(S \times_0 \{v'\})$ mit $\mathrm{m}[v, v'] = 1$ und $\mathrm{m}[u, v'] = 0$ für alle $u \in S' \setminus \{v, v'\}$.*

Damit lassen sich leicht die offenen Ecken eines Coxeter-Diagramms bestimmen. Für die Lannér-Diagramme erhält man z.B. die in Tabelle 2 angegebene Liste aller Diagramme der Ordnung 4 und 5, die offene Ecken enthalten. Diese Ecken sind schwarz markiert.

Tabelle 2



Es bedeutet eine starke Einschränkungen für Coxeter-Diagramme, die Coxeter-Polytope mit endlichem Volumen beschreiben, daß sie zusammenhängend sind. Für ein sukzessives Vorgehen bei der Konstruktion von Diagrammen ist es also von Bedeutung festzustellen, welche Facettenbündel nur durch zusammenhängende Coxeter-Diagramme zu realisieren sind. Es gilt:

Lemma 3.5 *Sei $\mathcal{M}$ ein Facettenbündel. Angenommen zu je zwei Facetten f_1 und f_{k+1} existieren Facetten $f_2, \ldots, f_k$ und Fehlschnitte $F_1, \ldots, F_k$ mit $\{f_i, f_{i+1}\} \subseteq F_i$ für $i = 1, \ldots, k$. Dann ist jedes Coxeter-Diagramm S, das kein parabolisches Teildiagramm enthält und für das $\mathcal{M}(S) = \mathcal{M}$ ist, zusammenhängend.*

Beweis: Sei S ein solches Coxeter-Diagramm. Sei $v_i = S_{|f_i}$. Da $S_{|F_i}$ ein Lannér-Diagramm und somit zusammenhängend ist, gibt es einen Pfad von v_i nach v_{i+1}. Nach Voraussetzung gibt es also einen Pfad von v_1 nach v_{k+1}. $\square$

Die Voraussetzungen des Lemmas gelten genau für ‚ineinander geschachtelte' Fehlschnitte.

Betrachten wir das Facettenbündel

$$\mathcal{M}_F \times_k \mathcal{L}_F,$$

wobei $\mathcal{M}$ beliebig und $\mathcal{L}_F$ ein Fehlschnitt ist. Sei $f \in \mathcal{L}_F \setminus (\mathcal{M}_F \cap \mathcal{L}_F)$ und setzen wir $\mathcal{K}(f)_F := \mathcal{L}_F \setminus ((\mathcal{M}_F \cap \mathcal{L}_F) \cup \{f\})$. Dann ist $\mathcal{K}(f)$ Schnitt-vollständig und das Facettenbündel, das durch die Facetten $\mathcal{M}_F \cup \mathcal{K}(f)_F$ bestimmt wird, ist offensichtlich von der Form $\mathcal{M}_F \times_0 \mathcal{K}(f)_F$, d.h., es enthält nur Fehlschnitte, die in $\mathcal{M}_F$ liegen.

Zur Motivation dieser wenig anschaulichen, technischen Bemerkung und des nachfolgenden Lemmas, denke der Leser an folgende Situation: Das Facettenbündel $\mathcal{M}$, das den Teil eines Polytops beschreibt, sei bereits durch ein Coxeter-Diagramm realisiert. In einem nächsten Schritt soll nun ein weiterer Fehlschnitt ‚eingefügt' werden. Ist $|\mathcal{L}_F \setminus (\mathcal{L}_F \cap \mathcal{M}_F)| \geq 2$, so kann das Diagramm zunächst ‚sphärisch ergänzt' werden, d.h., es kann um eine Ecke vergrößert werden, ohne daß dabei ein neues Lannér-Diagramm entsteht. Dieser Sachverhalt ist Gegenstand des folgenden Lemmas:

Lemma 3.6 *Mit den Bezeichnungen von oben und unter der Voraussetzung, daß $|\mathcal{L}_F \setminus (\mathcal{L}_F \cap \mathcal{M}_F)| \geq 2$ und $S_{|\mathcal{M}_F}$ zusammenhängend für jedes $S \in C(\mathcal{M}_F \times_k \mathcal{L}_F)$ ist, gilt:*

(i) Zu $S \in C(\mathcal{M}_F \times_k \mathcal{L}_F)$ existiert ein $v \in S_{|\mathcal{L}_F \setminus (\mathcal{L}_F \cap \mathcal{M}_F)}$, so daß $S \setminus \{v\}$ zusammenhängend ist. Insbesondere ist dann $S \setminus \{v\} \in C(\mathcal{M}_F \times_0 \mathcal{K}(f)_F)$, wobei $v = S_{|f}$ ist.

(ii) Ist $S \in C(\mathcal{M}_F \times_k \mathcal{L}_F)$, so enthält $S_{|\mathcal{M}_F}$ eine offene Ecke.

(iii) Ist $k \geq 1$ und $S \in C(\mathcal{M}_F \times_k \mathcal{L}_F)$, so enthält $S_{|\mathcal{M}_F}$ eine offene Ecke x mit $x \in S_{|\mathcal{M}_F \cap \mathcal{L}_F}$.

Beweis: (i) gilt offensichtlich, da $S_{|\mathcal{M}_F}$ zusammenhängend ist.

Sei $v' \in S_{|\mathcal{L}_F \setminus (\mathcal{L}_F \cap \mathcal{M}_F)}$ benachbart zu $S_{|\mathcal{M}_F}$, und sei f' die durch v' repräsentierte Facette. Da nach Voraussetzung $|\mathcal{L}_F \setminus (\mathcal{L}_F \cap \mathcal{M}_F)| \geq 2$ ist, enthält $\mathcal{M}_F \cup \{f'\}$ nur die Fehlschnitte, die in $\mathcal{M}_F$ liegen. Also ist $\langle S_{|\mathcal{M}_F}, v' \rangle$ eine Coxeter-Realisierung von $S_{|\mathcal{M}_F} \times_0 \{f'\}$, womit (ii) gezeigt ist.

Für (iii) hat man sich nur zu überlegen, daß v' benachbart zu $S_{|\mathcal{M}_F \cap \mathcal{L}_F}$ gewählt werden kann. Das ist aber klar, da $S_{|\mathcal{L}_F}$ ein Lannér-Diagramm und somit zusammenhängend ist. $\square$

Lemma 3.7 *Sei $\mathcal{L}_F$ ein Fehlschnitt und $\mathcal{N}$ ein Schnitt-vollständiges Facettenbündel. Dann enthält jeder Zykel in einem Coxeter-Diagramm S, das $\mathcal{L}_F \times_0 \mathcal{N}_F$ realisiert, schon das ganze Coxeter-Diagramm $S_{|\mathcal{L}_F}$.*

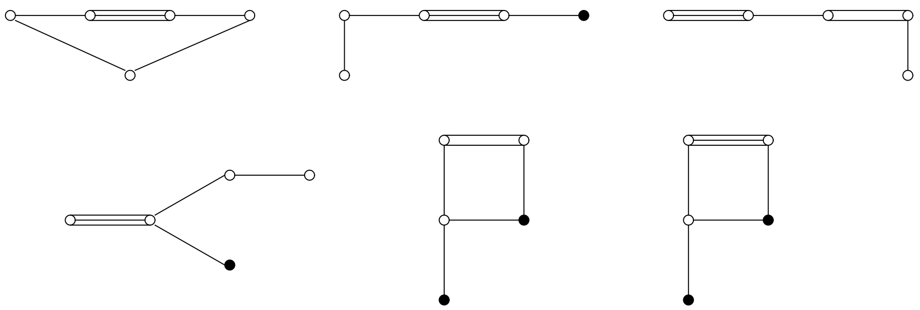
Beweis: Es gibt kein sphärisches Coxeter-Diagramm, das zyklisch ist. Jeder Zykel realisiert also ein Facettenbündel, das einen Fehlschnitt enthält. Damit ist die Behauptung klar. $\square$

Mit diesem Hilfsmittel beweist man nun leicht das folgende, durch 3.6 (i) motivierte, Lemma:

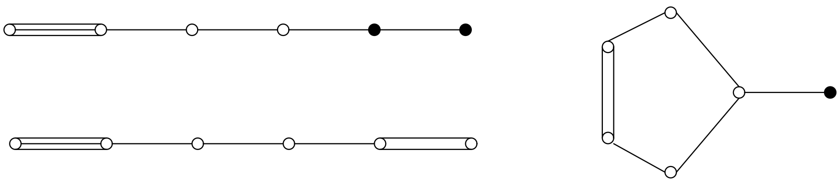
Lemma 3.8 *In der folgenden Tabelle sind alle möglichen Coxeter-Realisierungen der Facettenbündel $\mathcal{L}_F \times_0 \mathcal{N}_F$ für Fehlschnitte $\mathcal{L}_F$ der Mächtigkeiten 4 und 5 und Schnitt-vollständige Mengen $\mathcal{N}$ der Mächtigkeiten $1, 2$ und 3 angegeben.*

Tabelle 3

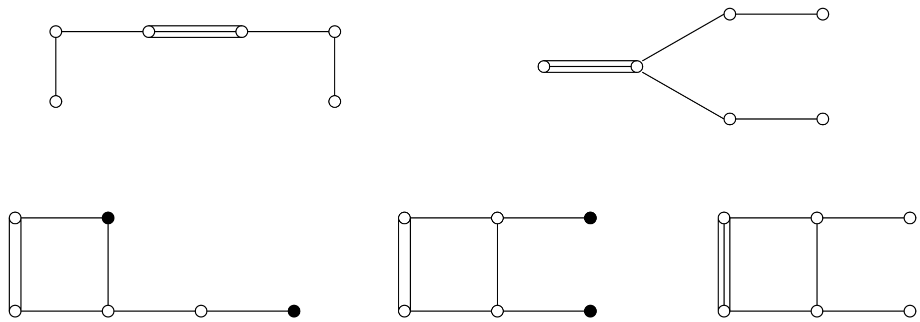
$|\mathcal{N}_F| = 1,\ |\mathcal{L}_F| = 4:$



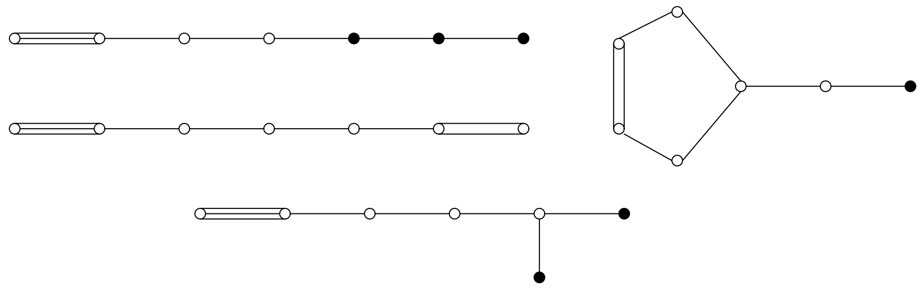
$|\mathcal{N}_F| = 1,\ |\mathcal{L}_F| = 5:$



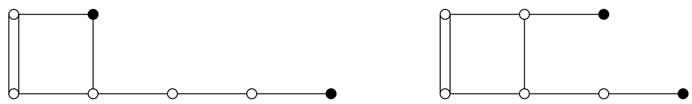
$|\mathcal{N}_F| = 2,\ |\mathcal{L}_F| = 4:$



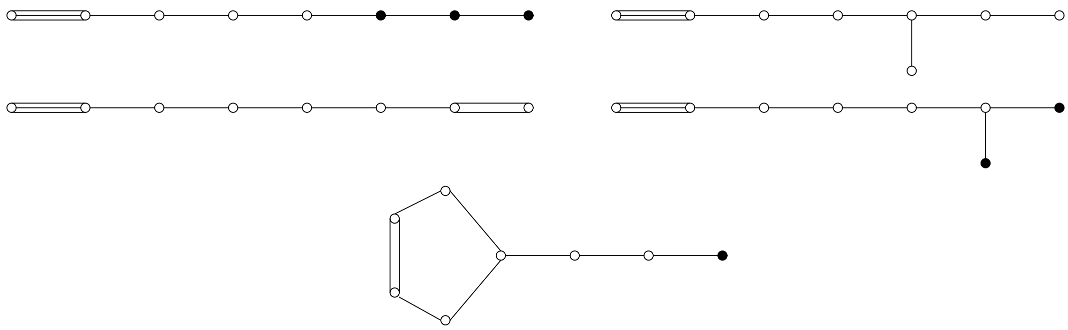
$|\mathcal{N}_F| = 2,\ |\mathcal{L}_F| = 5:$



$|\mathcal{N}_F| = 3,\ |\mathcal{L}_F| = 4:$



$|\mathcal{N}_F| = 3,\ |\mathcal{L}_F| = 5:$



Beweis: Wir zeigen nur exemplarisch die Vollständigkeit des ersten Teils der Liste: Sei S eine solche Coxeter-Realisierung. Für $S_{|\mathcal{L}_F}$ kommen nur Lannér-Diagramme in Frage, die eine offene Ecke besitzen. Nur für $S_{|\mathcal{L}_F} = L_4^1$ kann die hinzukommende Ecke

v zu beiden offenen Ecken benachbart sein (3.7). Sei v' eine der offenen Ecken. Ist die Vielfachheit m$[v, v']$ größer als die in der Tabelle angegebenen Werte, so enthält S offensichtlich ein nicht sphärisches Teildiagramm ungleich $S_{|\mathcal{L}_F}$.

Damit ist klar, daß die Liste für $|\mathcal{N}_F| = 1$ und $|\mathcal{L}_F| = 4, 5$ vollständig ist. Die übrigen Fälle zeigt man analog, wobei die bereits konstruierten Diagramme zu verwenden sind. Die offenen Ecken der Diagramme in der Tabelle sind schwarz markiert. □

3.2 Zur hyperbolischen Realisierbarkeit

Die Frage der hyperbolischen Realisierbarkeit beantwortet sich mit Hilfe der Berechnung der Determinanten von Coxeter-Diagrammen. Es ist klar, daß aufgrund der besonderen Form solcher Gram-Matrizen diese Berechnungen wesentlich einfacher sind als für allgemeine Matrizen. Wir übernehmen die folgenden Hilfsmittel mit ihrer Terminologie aus [Vi2]:

Für einen zyklischen Pfad γ in einem Coxeter-Diagramm S bezeichne $p(\gamma)$ das Produkt aller Gewichte der Kanten von γ. Damit gilt:

Lemma 3.9 *([Vi2], Prop. 11) Die Determinante von S ist gleich der Summe aller Produkte*

$$(-1)^l p(\gamma_1) \cdots p(\gamma_l),$$

wobei $\{\gamma_1, \dots \gamma_l\}$ über alle ungeordneten Mengen (einschließlich der leeren) von paarweise disjunkten, zyklischen Pfaden von S läuft.

Ist T ein Teildiagramm von S, und ist $\det(S \setminus T) \neq 0$, so ist die lokale Determinante von S bezüglich T definiert als

$$\det(S, T) := \frac{\det S}{\det(S \setminus T)}.$$

Lemma 3.10 *([Vi2], Prop. 12) Wenn ein Coxeter-Diagramm S von Unterdiagrammen $S_1, \dots, S_k$ erzeugt wird, wobei der Schnitt je zweier genau aus der Ecke v besteht, dann ist*

$$\det(S, v) - 1 = \sum_i (\det(S_i, v) - 1).$$

Lemma 3.11 *([Vi2], Prop. 13) Wird das Coxeter-Diagramm S von zwei disjunkten Teildiagrammen S_1 und S_2 erzeugt, und S_1 und S_2 werden durch eine einzige Kante $[v_1, v_2]$ mit Gewicht a verbunden, so ist*

$$\det(S, < v_1, v_2 >) = \det(S_1, v_1) \det(S_2, v_2) - a^2.$$

Wir nennen ein Coxeter-Diagramm **superhyperbolisch**, wenn die Anzahl der negativen Eigenwerte der Gram-Matrix größer als 1 ist.

Lemma 3.12 *([Vi2], Prop. 15) Angenommen das Coxeter-Diagramm S wird von zwei disjunkten, hyperbolischen Diagrammen S_1 und S_2 erzeugt, wobei S_1 und S_2 durch eine einzige Kante $[v_1, v_2]$ verbunden sind und die beiden Diagramme $S_1 \setminus v_1$ und $S_2 \setminus v_2$ sphärisch sind. Angenommen es gilt weiter einer der folgenden Fälle:*

1. $\mathrm{m}[v_1, v_2] = 1$ *und* $\det(S_1, v_1)\det(S_2, v_2) > \frac{1}{4}$,
2. $\mathrm{m}[v_1, v_2] = 2$ *und* $\det(S_1, v_1)\det(S_2, v_2) > \frac{1}{2}$.

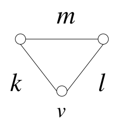
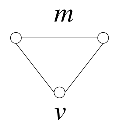
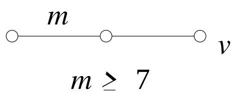
Dann ist S superhyperbolisch.

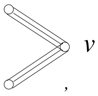
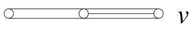
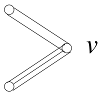
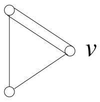
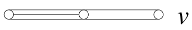
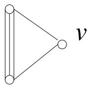
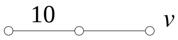
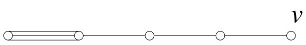
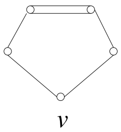
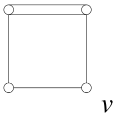
In der folgenden Tabelle sind einige Werte von $\det(S, v)$ aufgeführt, dabei ist

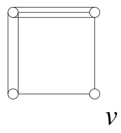
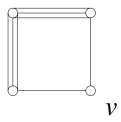
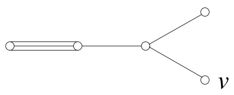
$$\mathrm{d}(k,l,m) := \frac{\cos^2(\pi/k) + \cos^2(\pi/l) + 2\cos(\pi/k)\cos(\pi/l)\cos(\pi/m)}{\sin^2(\pi/m)} - 1.$$

Bemerkung 3.13 $\mathrm{d}(k,l,m)$ *ist für $k,\ l,\ m \geq 2$ monoton wachsend.*

Tabelle 4

Graph	$\det(S,v)$	Werte
	$-\mathrm{d}(k,l,m)$	$< -\frac{1}{2}$ für $k, l \geq 3, m \geq 4$; $k = 2, l \geq 4, m \geq 6$; $k, l \geq 4, m = 3$; $k = 3, l \geq 5, m = 3$; $k = 2, l \geq 5, m = 5$;
	$\frac{-1}{4\sin^2(\pi/2m)} + 1$	$< -\frac{1}{\sqrt{2}}$ für $m \geq 5$; $= -\frac{1}{\sqrt{2}}$ für $m = 4$;
	$\frac{-1}{4\sin^2(\pi/m)} + 1$	$< -\frac{1}{\sqrt{2}}$ für $m \geq 9$; $= -\frac{1}{\sqrt{2}}$ für $m = 8$; ≈ -0.328 für $m = 7$;

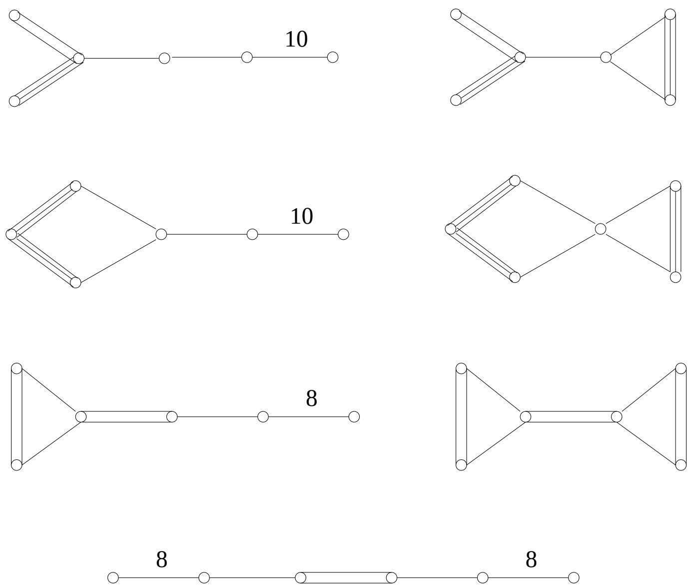
 , 	$\frac{1-\sqrt{5}}{4}$	$\approx -0,309$
	$\frac{1-\sqrt{5}}{8}$	$\approx -0,156$
	$\frac{-\sqrt{2}}{3}$	$\approx -0,471$
	$\frac{-\sqrt{5}}{5}$	$\approx -0,447$
 	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\approx -1,618$
	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\approx -1,618$
	$-1-\sqrt{2}$	$\approx -2,414$
	$\frac{-1-2\sqrt{2}}{4}$	≈ -0.957

	$\frac{5+2\sqrt{5}+3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}$	≈ 4.219
	$1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	≈ 2.618
	$-2(\sqrt{5}+2)$	≈ -8.472

4 Kompakte, hyperbolische Coxeter-Polytope mit $d+2$ Facetten

Ein natürlicher nächster Schritt, der auf die Klassifikation der Coxeter-Simplizes folgt, ist die Beschreibung der Coxeter-Polytope im $\mathbb{H}^d$ mit $d+2$ Facetten. Diejenigen dieser Polytope, deren kombinatorischer Typ das Produkt eines Simplexes mit einem Segment ist, wurden bereits 1974 von Kaplinskaya [Ka] klassifiziert. (In Dimension 3 ist die Liste nicht vollständig, die fehlenden Polytope sind [Vi3] zu entnehmen.) Die dabei verwendeten Methoden machen von deren spezieller Gestalt Gebrauch, für die Klassifikation der verbleibenden Polytope sind sie nicht geeignet. Wir werden die Liste der hyperbolischen Coxeter-Polytope mit $d+2$ Facetten im kompakten Fall vervollständigen, indem wir folgendes Theorem beweisen:

Theorem 4.1 *Es gibt im $\mathbb{H}^4$ bis auf Isometrie genau die folgenden kompakten Coxeter-Polytope deren kombinatorischer Typ das Produkt zweier Simplizes der Dimensionen größer* 1 *ist:*



Im $\mathbb{H}^d$, $d \geq 5$ existieren keine solchen Polytope.

Mittels 3.1 zeigt man leicht, daß die entsprechenden Gruppen arithmetisch sind.

Nach 2.2 sind kompakte Coxeter-Polytope im hyperbolischen Raum einfach. Sie werden also genau durch Facettenbündel $\mathcal{L}_1 \times_0 \mathcal{L}_2$ mit Fehlschnitten $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ beschrieben (vgl. Abschnitt 1.3, Beispiel 2). Genau diejenigen sind das Produkt eines Simplexes mit einem Segment, für die einer der beiden Fehlschnitte die Mächtigkeit 2 hat. Gegenstand des Theorems sind die Polytope, für die das nicht der Fall ist, d.h., wo $|\mathcal{L}_i| \geq 3$ ist.

Vorbereitend überlegt man sich leicht, daß aus 3.3 folgt:

Lemma 4.2 *Seien $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ Fehlschnitte und $S \in C(\mathcal{L}_1 \times_0 \mathcal{L}_2)$. Seien weiter $v \in S_{|\mathcal{L}_1}$ und $w \in S_{|\mathcal{L}_2}$ mit $\mathrm{m}[v,w] > 1$. Dann ist auch das Coxeter-Diagramm S', dessen Eckenmenge mit der von S übereinstimmt, und dessen Kanten wie folgt bewertet sind, eine Coxeter-Realisierung von $\mathcal{L}_1 \times_0 \mathcal{L}_2$:*

1. *Für alle v', w' mit $\{v', w'\} \neq \{v, w\}$ ist $\mathrm{m}[v', w']$ wie in S, und*

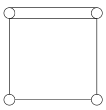
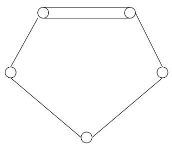
2. *es ist $\mathrm{m}[v, w]$ um eins kleiner als in S.*

Ist in S die Vielfachheit der Kante $[v, w]$ gleich 1, so ist ein wie oben gebildetes S' genau dann eine Coxeter-Realisierung von $\mathcal{L}_1 \times_0 \mathcal{L}_2$, wenn es noch eine andere Kante von $S_{|\mathcal{L}_1}$ nach $S_{|\mathcal{L}_2}$ gibt, deren Vielfachheit größer als 0 ist.

Wenn wir im folgenden von einem Diagramm S feststellen, daß es keine Coxeter-Realisierung von $\mathcal{L}_1 \times_0 \mathcal{L}_2$ ist, so wird das Argument sein, daß S nicht sphärische Teildiagramme ungleich den Lannér-Diagrammen $S_{|\mathcal{L}_1}$ und $S_{|\mathcal{L}_2}$ enthält.

Wir bestimmen zunächst in den Fällen die Coxeter-Realisierungen von $\mathcal{L}_1 \times_0 \mathcal{L}_2$, wo einer der Fehlschnitte mindestens vier Facetten enthält. Es wird sich herausstellen, daß sämtliche dieser Diagramme superhyperbolisch sind.

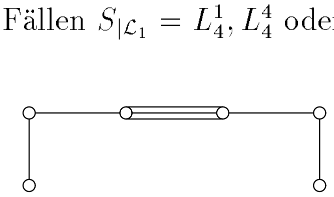
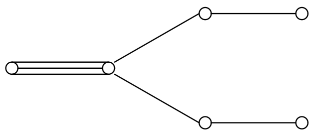
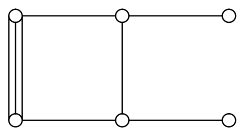
Lemma 4.3 *Seien $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ Fehlschnitte mit $|\mathcal{L}_1| \geq 4$ und $|\mathcal{L}_2| \geq 3$. Angenommen $\mathcal{L}_1 \times_0 \mathcal{L}_2$ ist Coxeter-realisierbar. Dann ist für jede solche Realisierung S das Teildiagramm $S_{|\mathcal{L}_1}$ eines der folgenden:*

L_4^5:  L_5^1: L_5^2: 

Beweis: Nach 3.6 (ii) enthält $S_{|\mathcal{L}_1}$ eine offene Ecke, also ist

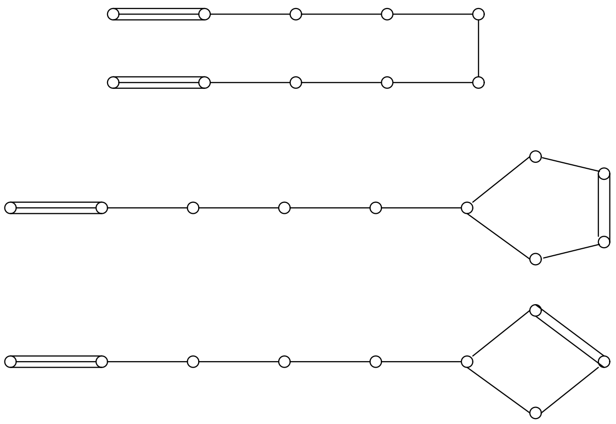
$$S_{|\mathcal{L}_1} \in \{L_4^1, L_4^2, L_4^4, L_4^5, L_4^6, L_5^1, L_5^2\}.$$

Mit Tabelle 3 ($|\mathcal{L}_F| = 4$, $|\mathcal{N}_F| = 2$) und 3.6 (i) folgt, daß $S_{|\mathcal{L}_1} \neq L_4^2$ ist, und daß S in den Fällen $S_{|\mathcal{L}_1} = L_4^1, L_4^4$ oder L_4^6 eines der Teildiagramme

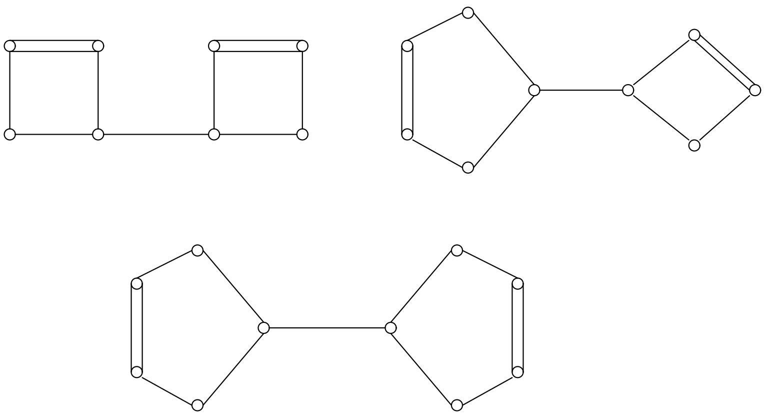
  

enthält. Da keines dieser Diagramme eine offene Ecke enthält, muß in diesen Fällen $|\mathcal{L}_2| = 3$ sein. Offensichtlich ist $\mathcal{L}_1 \times_0 \mathcal{L}_2$ unter diesen Voraussetzungen nicht Coxeter-realisierbar. □

Lemma 4.4 *Angenommen $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ sind Fehlschnitte mit $|\mathcal{L}_i| \geq 4$. Dann ist $\mathcal{L}_1 \times_0 \mathcal{L}_2$ nur durch folgende Diagramme Coxeter-realisierbar:*

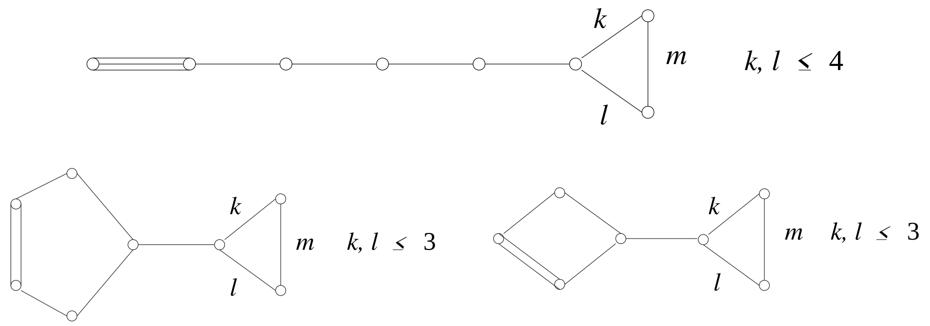


Beweis: Angenommen S ist eine Coxeter-Realisierung von $\mathcal{L}_1 \times_0 \mathcal{L}_2$. Nach 4.3 ist $S_{|\mathcal{L}_i} \in \{L_4^5, L_5^1, L_5^2\}$. Unter diesen ist L_4^5 das einzige Lannér-Diagramm mit zwei offenen Ecken. Ist $S_{|\mathcal{L}_1} = L_4^5$, so können nach 3.7 nicht beide offene Ecken zu $S_{|\mathcal{L}_2}$ benachbart sein. Das heißt, in S können die beiden Lannér-Diagramme $S_{|\mathcal{L}_1}$ und $S_{|\mathcal{L}_2}$ in allen Fällen nur durch eine einzige Kante verbunden sein. Da die folgenden Diagramme parabolische Teildiagramme enthalten und somit keine Coxeter-Realisierungen von $\mathcal{L}_1 \times_0 \mathcal{L}_2$ sind, folgt mit 4.2, daß die Facettenbündel $L_4^5 \times_0 L_4^5$, $L_4^5 \times_0 L_5^2$ und $L_5^2 \times_0 L_5^2$ nicht Coxeter-realisierbar sind.



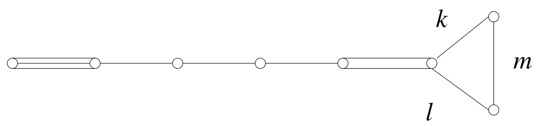
Ebenfalls mit 4.2 folgt, daß die Kombinationen, wie sie in der Behauptung vorkommen, nur mit einer verbindenden Kante der Vielfachheit 1 zu realisieren sind. $\square$

Lemma 4.5 *Angenommen $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ sind Fehlschnitte mit $|\mathcal{L}_1| \geq 4$ und $|\mathcal{L}_2| = 3$. Dann ist $\mathcal{L}_1 \times_0 \mathcal{L}_2$ nur durch folgende Diagramme Coxeter-realisierbar:*

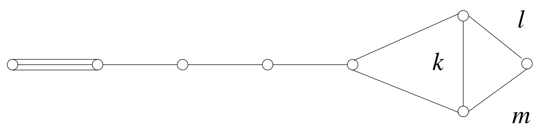


Dabei kann m alle Werte mit $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} < 1$ annehmen.

Beweis: Nehmen wir zunächst an, daß eine Coxeter-Realisierung S mit $S_{|\mathcal{L}_1} = L_5^1$ existiert. Wir diskutieren die möglichen Bewertungen der Kanten von $S_{|\mathcal{L}_1}$ nach $S_{|\mathcal{L}_2}$. In dem Diagramm



ist notwendigerweise $l = k = 2$ und für



ergibt sich $k = 2$ und $l,\ m \leq 4$. In beiden Fällen ist also $S_{|\mathcal{L}_2}$ kein Lannér-Diagramm. Nach 4.2 haben wir damit alle bis auf die in der Behauptung angegebenen Möglichkeiten ausgeschlossen. Ganz analog zeigt man die Behauptung, wenn $S_{|\mathcal{L}_1} = L_5^2$ oder L_4^5 ist. $\square$

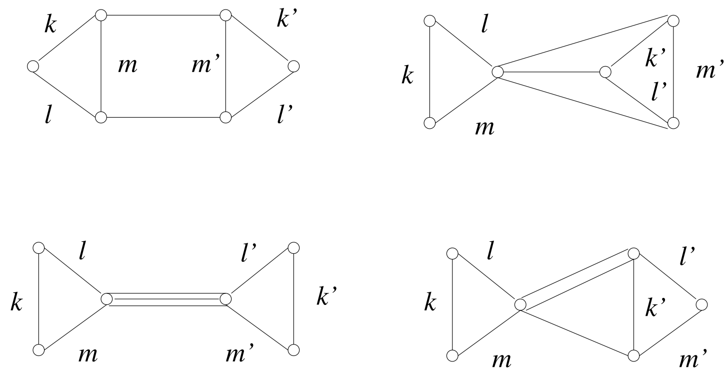
Lemma 4.6 *Seien $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ Fehlschnitte der Mächtigkeit 3. Dann gilt für jedes $S \in C(\mathcal{L}_1 \times_0 \mathcal{L}_2)$ einer der folgenden Fälle:*

1. Die beiden Lannér-Diagramme werden durch genau eine Kante der Vielfachheit 1 verbunden.

2. Die beiden Lannér-Diagramme werden durch genau eine Kante der Vielfachheit 2 verbunden.

3. Die beiden Lannér-Diagramme werden durch genau zwei Kanten der Vielfachheit 1 verbunden, die in einem der beiden Lannér-Diagramme eine gemeinsame Ecke haben.

Beweis: Nach 4.2 haben wir nur folgende Fälle auszuschließen:



.

Sei $S \in C(\mathcal{L}_1 \times_0 \mathcal{L}_2)$. Zum ersten Diagramm: Nach 3.7 ist $m = 2$ oder $m' = 2$, sei o.B.d.A. $m = 2$. Weiter gilt $l,\ k \leq 5$ und somit folgt $l,\ k \geq 4$ (wegen $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} < 1$). Das impliziert $k',\ l',\ m' \leq 3$, also kann $S_{|\mathcal{L}_2}$ kein Lannér-Diagramm sein.
Analog schließt man die übrigen Diagramme aus. □

Die weiteren Fälle erfordern Berechnungen der Determinanten:

Lemma 4.7 *Seien $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ Fehlschnitte mit $|\mathcal{L}_1| \geq 4$ und $|\mathcal{L}_2| \geq 3$. Dann ist jedes $S \in C(\mathcal{L}_1 \times_0 \mathcal{L}_2)$ superhyperbolisch.*

Beweis: Für alle möglichen Coxeter-Realisierungen, wie sie in 4.4 und 4.5 beschrieben werden, folgt mit 3.12 und den lokalen Determinanten aus Tabelle 4, daß die Diagramme superhyperbolisch sind. □

Zum Beweis von Theorem 4.1 bleibt also nur noch folgendes Lemma zu zeigen:

Lemma 4.8 *Seien $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ Fehlschnitte der Mächtigkeit 3. Es gibt genau die in Theorem 4.1 aufgeführten hyperbolischen Coxeter-Polytope mit dem Facettenbündel $\mathcal{L}_1 \times_0 \mathcal{L}_2$.*

Beweis: Durch ein $S \in C(\mathcal{L}_1 \times_0 \mathcal{L}_2)$ wird genau dann ein Coxeter-Polytop im $\mathbb{H}^4$ beschrieben, wenn die Signatur der Gram-Matrix $G(S)$ gleich $(4, 1, 1)$ ist. Eine notwendige Bedingung ist also $\det S = 0$. Für die in der Behauptung aufgeführten Coxeter-Diagramme ist diese Bedingung auch schon hinreichend, denn in jedem der Diagramme gibt es eine Ecke, so daß das Diagramm ohne diese Ecke in ein sphärisches und ein Lannér-Diagramm zerfällt. Die entsprechenden Gram-Matrizen sind also von der Signatur $(4, 1, 1)$.

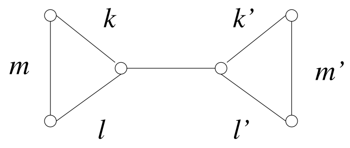
Nehmen wir an, daß S eine Coxeter-Realisierung von $\mathcal{L}_1 \times_0 \mathcal{L}_2$ ist.

Wir haben bezüglich der Vielfachheiten der Kanten, die die Lannér-Diagramme verbinden, die drei Fälle aus 4.6 zu unterscheiden. Sei $[x, y]$ die Kante, die in den ersten beiden Fällen von $S_{|\mathcal{L}_1}$ nach $S_{|\mathcal{L}_2}$ geht.

Zum 1. Fall: $\mathrm{m}[x,y]=1$. Da $\det S=0$ ist, gilt dies auch für die lokale Determinante $\det(S,\langle x,y\rangle)$, also (3.11):

$$(*)\quad \det(S_{|\mathcal{L}_1},x)\det(S_{|\mathcal{L}_2},y)-\frac{1}{4}=0.$$

Somit können wir o.B.d.A. $|\det(S_{|\mathcal{L}_1},x)|\le\frac{1}{2}$ annehmen. Es gelten folgende Bezeichnungen:



Es ist also $k,\ l,\ k',\ l'\le 5$.

a) Sei $m=2$. Es kommen also nur die Werte $k=4,\ l=5$ und $k=l=5$ in Frage. In diesen Fällen ist $\det(S_{|\mathcal{L}_1},x)=\frac{1-\sqrt{5}}{8}$ bzw. $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$. Aus $l=5$ folgt $k',\ l'\le 3$. Also ist

$$\det(S_{|\mathcal{L}_2},y)=\begin{cases}\frac{-1}{4\sin^2(\pi/2m')}+1 & \text{für } k'=l'=3 \text{ und}\\ \frac{-1}{4\sin^2(\pi/m')}+1 & \text{für } k'=2,\ l'=3.\end{cases}$$

Die Gleichung $(*)$ kann also nur gelöst werden, wenn $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{2m'})=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ bzw. wenn $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{m'})=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ist. Im ersten Fall ist $m'=5$ im zweiten $m'=5,\ 10$ (wobei $k'=2,\ l'=3,\ m'=5$ kein Lannér-Diagramm beschreibt). Mit Tabelle 4 folgt, daß $\det S=0$ genau in den Fällen ist, die in der Behauptung angegeben sind.

b) Sei $m=3$. Dann ist offensichtlich $k,\ l\ge 3$. Nach Tabelle 4 ist $|\det(S_{|\mathcal{L}_1},x)|\le\frac{1}{2}$ nur für $k=3,\ l=4$. In diesem Fall ist $\det(S_{|\mathcal{L}_1},x)=-\frac{\sqrt{2}}{3}$. Wie oben ist $k'=2,\ l'=3$ oder $k'=l'=3$ und $(*)$ impliziert $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{m'})=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ bzw. $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{2m'})=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, also $m'=8$ oder 4. In beiden Fällen ($k'=2,\ l'=3,\ m'=8$ bzw. $k'=3,\ l'=3,\ m'=4$) ist $\det(S_{|\mathcal{L}_2},y)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ und die Gleichung $(*)$ wird nicht gelöst.

c) Sei $m=4$. Nach Tabelle 4 impliziert $|\det(S_{|\mathcal{L}_1},x)|\le\frac{1}{2}$ o.B.d.A. $k=2$. Also ist unter den genannten Voraussetzungen nur $l=5$ möglich. Dann ist $\det(S_{|\mathcal{L}_1},x)=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$. Mit den selben Rechnungen wie im Fall a) folgt, daß $(*)$ nicht lösbar ist.

d) Sei $m=5$. Nach Tabelle 4 ist $|\det(S_{|\mathcal{L}_1},x)|\le\frac{1}{2}$ nur für die Werte $k=2,\ l=4$. In diesem Fall ist $\det(S_{|\mathcal{L}_1},x)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$. Aus $l=4$ folgt $k',\ l'\le 3$. Wir haben also die gleichen Vielfachheiten für $S_{|\mathcal{L}_2}$ wie im Fall a), offensichtlich lösen sie in diesem Fall nicht die Gleichung $(*)$.

e) Sei $m=6$. Das Diagramm $S_{|\mathcal{L}_1}$ mit $k=2,\ l=3$ ist parabolisch. In keinem anderen Fall ist $|\det(S_{|\mathcal{L}_1},x)|\le\frac{1}{2}$.

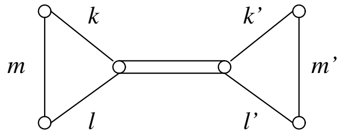
f) Sei $m=7$. Nur für $k=2,\ l=3$ ist $|\det(S_{|\mathcal{L}_1},x)|\le\frac{1}{2}$. Aus $(*)$ folgt also, daß $\sin^2(\frac{\pi}{7})\in\mathbb{Q}(\cos(\frac{\pi}{k'}),\cos(\frac{\pi}{l'}),\cos(\frac{\pi}{m'}))$ ist. Das impliziert $7\mid\mathrm{kgV}(l',k',m')$ und wegen

$k',\ l' \leq 5$ sogar $7 \mid m'$. Aus den folgenden Werten und 3.13 ergibt sich, daß kein Coxeter-Diagramm mit den obigen Bewertungen die Determinante 0 hat.

m'	k'	l'	$\lvert \det(S_{\lvert L_2}, y) \rvert$
7	2	3	≈ 0.328
7	2	4	> 1.6
7	3	3	> 4
14	2	3	> 4

Für $m \geq 8$ ist $\lvert \det(S_{\lvert \mathcal{L}_1}, x) \rvert > \frac{1}{2}$.

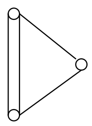
Zum 2. Fall: $\mathrm{m}[x, y] = 2$. Mit den folgenden Bezeichnungen für S

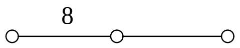


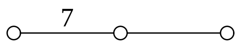
gilt: $k,\ l,\ k',\ l' \leq 3$. Nach 3.11 ist

$$(*) \quad \det(S_{\lvert \mathcal{L}_1}, x) \det(S_{\lvert \mathcal{L}_2}, y) - \frac{1}{2} = 0,$$

wir können also o.B.d.A. $\lvert \det(S_{\lvert \mathcal{L}_1}, x) \rvert \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ annehmen. Es kommen somit für $S_{\lvert \mathcal{L}_1}$ die Diagramme

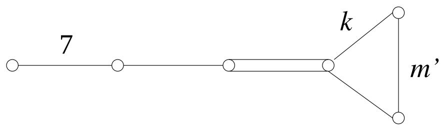






in Frage. In den ersten beiden Fällen ist die lokale Determinante gleich $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, sie können und müssen also untereinander kombiniert werden, um die Gleichnung $(*)$ zu lösen.

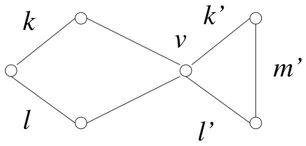
Für das Diagramm



$k = 2, 3$

impliziert die Gleichung $(*)$, daß $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{7}) = \mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{m'})$ bzw. $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{2m'})$ ist. Somit ist $m' = 7,\ 14$ bzw. $m' = 7$. In allen Fällen ist $\det S \neq 0$.

Zum 3. Fall: Für S gelten die folgenden Bezeichnungen:



mit $4 \leq k,\ l \leq 5$ und $k',\ l' \leq 3$. Mit 3.10 folgt aus $\det S = 0$:

$$\det(S, v) = \det(S_{|\mathcal{L}_1} \cup \{v\}, v) + \det(S_{|\mathcal{L}_2}, v) - 1 = 0.$$

Für $\det(S_{|\mathcal{L}_1} \cup \{v\}, v)$ kommen nach Tabelle 4 die beiden Werte

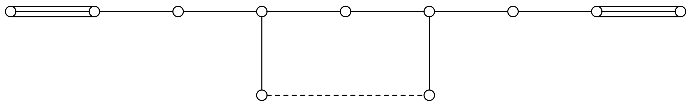
$$\begin{array}{rc} k = 4,\ l = 5: & \frac{5+2\sqrt{5}+3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}, \\ k = 5,\ l = 5: & 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}$$

in Frage. Nur im zweiten Fall kann $\det(S_{|\mathcal{L}_2}, v) - 1$ für $m' = 5,\ 10$ den gleichen Zahlkörper wie $\det(S_{|\mathcal{L}_1} \cup \{v\}, v)$ erzeugen und somit die Gleichung lösen. Man rechnet nun leicht nach, daß genau die beiden in der Behauptung aufgeführten Diagramme die Determinante 0 haben. $\square$

Damit ist Theorem 4.1 bewiesen.

5 Die maximale Dimension kompakter, hyperbolischer Coxeter-Polytope mit $d + 3$ Facetten

In [Bu3] hat V. O. Bugaenko gezeigt, daß die von den Spiegelungen aus der orthogonalen Gruppe des Gitters $[-(\sqrt{5}+1)] \perp E_8$ erzeugte Untergruppe arithmetisch ist. Dazu hat er mit dem Vinberg-Algorithmus einen Fundamentalbereich bestimmt, der durch folgendes Coxeter-Diagramm beschrieben wird:



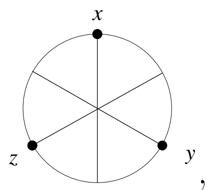
In hyperbolischen Räumen höherer Dimensionen gibt es bislang keine Beispiele kristallographischer Spiegelungsgruppen mit kompaktem Fundamentalbereich, und im $\mathbb{H}^8$ ist die oben angegebene die einzige bekannte Gruppe mit diesen Eigenschaften. Als einen ersten Schritt zur Klassifikation der kompakten, hyperbolischen Coxeter-Polytope mit $d + 3$ Facetten, werden wir in diesem Abschnitt die folgende Aussage beweisen:

Theorem 5.1 *Es gibt im $\mathbb{H}^d$ für $d > 8$ keine kompakten Coxeter-Polytope mit $d + 3$ Facetten. Für $d = 8$ existiert bis auf Isometrie genau das eine Polytop, wie es durch das obige Diagramm beschrieben wird.*

Wir erinnern zunächst daran, daß in einem d-Polytop mit $d+3$ Seiten, das durch ein Gale-Diagramm vom k-D-Typ dargestellt wird, genau die Mengen von Facetten Fehlschnitte sind, die $\frac{k-1}{2}$ nebeneinanderliegenden Punkten im Gale-Diagramm entsprechen (Abschnitt 1.3, Beispiel 3).

Die Existenz kompakter Coxeter-Polytope in hohen Dimensionen, deren Gale-Diagramme vom 3-D-Typ sind, läßt sich leicht mit Ergebnissen aus Abschnitt 4 ausschließen:

Ist $P \subseteq \mathbb{H}^d, d \geq 8$ ein solches Polytop mit Gale-Diagramm

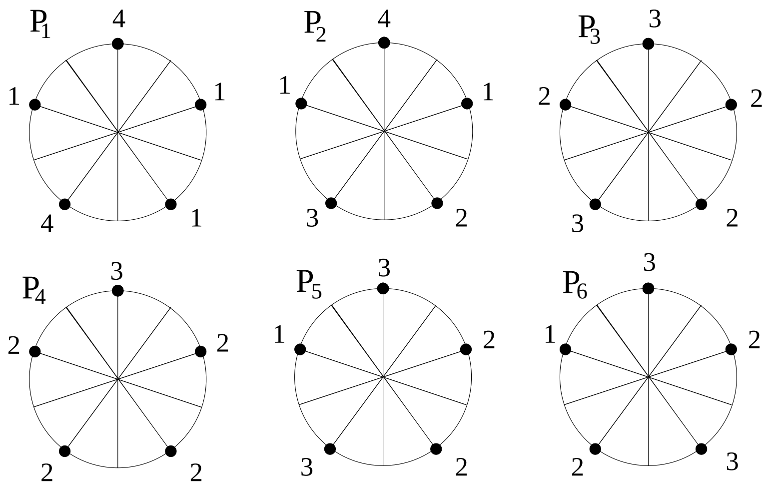


,

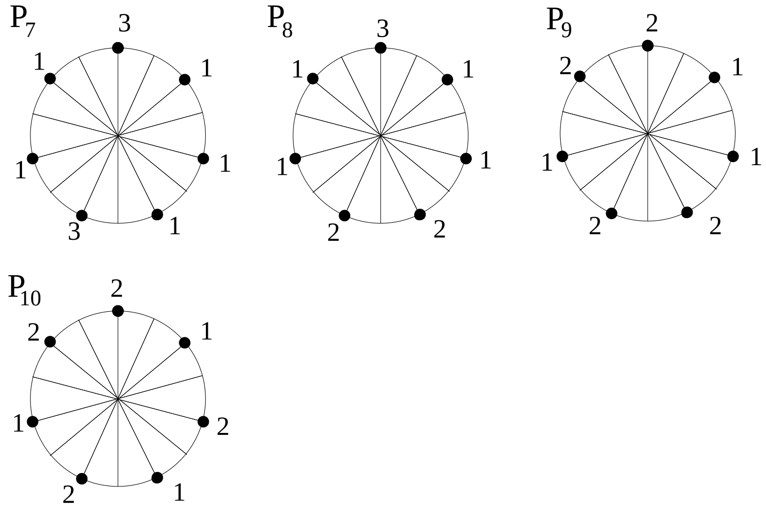
so ist $2 \leq x,\ y,\ z \leq 5$ und $x + y + z \geq 11$. Sei also o.B.d.A. $3 \leq x \leq 5$ und $4 \leq y \leq 5$. Jede Coxeter-Realisierung eines Facettenbündels $\mathcal{L}_x \times_0 \mathcal{L}_y$ (mit Fehlschnitten $\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y$ der Mächtigkeiten x bzw. y) ist superhyperbolisch (4.7) und kann somit nicht im Diagramm eines hyperbolischen Coxeter-Polytops vorkommen. Ist S ein Coxeter-Diagramm mit $\mathcal{M}(S) = \mathcal{L}_x \times_0 \mathcal{L}_y$ und $S_{|\mathcal{L}_x}$ ist nicht zu $S_{|\mathcal{L}_y}$ benachbart, so ist S offensichtlicherweise superhyperbolisch.

Es kommen also nur noch Polytope in Frage, deren Gale-Diagramme vom k-D-Typ für $k \geq 5$ sind. Alleine die Tatsache, daß kein Coxeter-Polytop einen Fehlschnitt der Mächtigkeit größer als 5 enthalten kann, schränkt die kombinatorischen Typen erheblich ein:

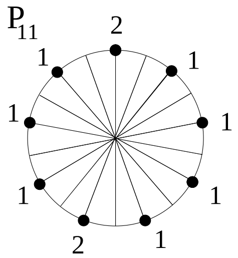
Lemma 5.2 *Sei $d \geq 8$ und P ein einfaches, 6-freies d-Polytop mit $d+3$ Facetten, dessen Gale-Diagramm vom k-D-Typ für $k \geq 5$ ist. Dann ist das Gale-Diagramm eines der folgenden:*
5-D-Typ:



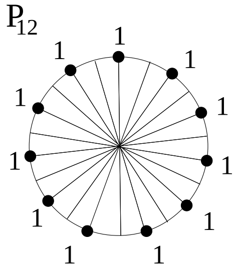
7-D-Typ:



9-D-Typ:



11-D-Typ:

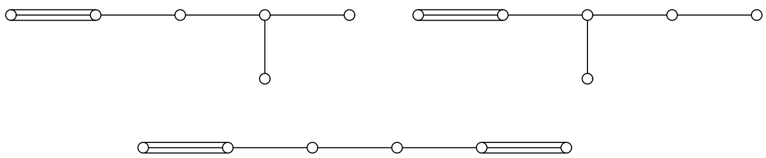


Der Beweis ergibt sich durch das geeignete Verteilen der Vielfachheiten.

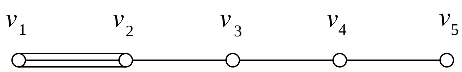
Wir werden jetzt die Coxeter-Realisierbarkeit von Facettenbündeln, wie sie bei den obigen Polytopen vorkommen, untersuchen. Dabei erlaubt es uns Lemma 3.3 ganze Klassen von Coxeter-Diagrammen als unzulässig zu erkennen, indem wir einen geeigneten Vertreter untersuchen.

In jedem der Polytope aus 5.2 gibt es ein Facettenbündel, wie es Gegenstand des folgenden Lemmas ist:

Lemma 5.3 *Seien $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ Fehlschnitte der Mächtigkeit 5. Dann sind die folgenden Diagramme die einzigen Coxeter-Realisierungen von $\mathcal{L}_1 \times_4 \mathcal{L}_2$:*



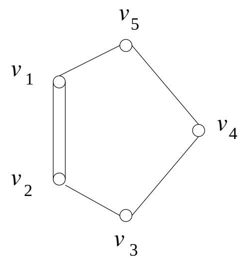
Beweis: Sei $S \in C(\mathcal{L}_1 \times_4 \mathcal{L}_2)$. Betrachten wir zunächst den Fall, daß $S_{|\mathcal{L}_1} = L_5^1$ ist. Die Ecken bezeichnen wir wie folgt:



Sei v_6 die Ecke von S, die nicht in $S_{|\mathcal{L}_1}$ liegt. Ist $\mathrm{m}[v_1, v_6] = 1$ oder $\mathrm{m}[v_2, v_6] = 1$, so enthält S ein nicht sphärisches Teildiagramm mit 4 Ecken. Also müssen nach 3.3 beide

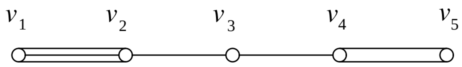
Vielfachheiten den Wert 0 haben. Da S keinen nicht sphärisches Diagramm mit weniger als 5 Ecken enthält, kann das von v_3, v_4, v_5 und v_6 erzeugte Teildiagramm keinen Zykel enthalten, d.h., $\mathrm{m}[v_6, v_i] > 0$ ist nur für ein $i \in \{3,4,5\}$ möglich. Man prüft jetzt leicht nach, daß die in der Behauptung angegebenen Diagramme die einzigen möglichen sind.

Sei nun $S_{|\mathcal{L}_1} = L_5^2$, und es gelten folgende Bezeichnungen:



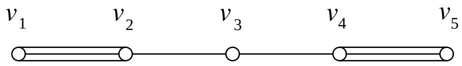
Sei v_6 wie oben. Mit 3.3 und 3.7 folgt dann $\mathrm{m}[v_6, v_1] = \mathrm{m}[v_6, v_2] = 0$ und $\mathrm{m}[v_6, v_i] \in \{0,1\}$ für genau ein $i \in \{3,4,5\}$. Da somit keine Kante in $S_{|\mathcal{L}_2}$ von der Vielfachheit 3 ist, bleibt nur $S_{|\mathcal{L}_2} = L_5^2$. Das ist auch nicht möglich, da v_6 nur zu einer Ecke benachbart seien kann.

Sei nun $S_{|\mathcal{L}_1} = L_5^3$, und es gelten folgende Bezeichnungen:



Sei v_6 wie oben. Mit 3.3 folgt $\mathrm{m}[v_6, v_1] = \mathrm{m}[v_6, v_2] = \mathrm{m}[v_6, v_4] = 0$ und $\mathrm{m}[v_6, v_i] \in \{0,1\}$ für $i \in \{3,5\}$. Keine der vier Möglichkeiten ergibt eine Coxeter-Realisierung von $L_5^3 \times_4 \mathcal{L}_2$.

Sei nun $S_{|\mathcal{L}_1} = L_5^4$, und es gelten folgende Bezeichnungen:



Sei v_6 wie oben. Mit 3.3 folgt, daß $\mathrm{m}[v_6, v_3] = 1$ die einzige Möglichkeit für eine Kante von v_6 nach L_5^4 der Vielfachheit größer als 0 ist. Das Diagramm ist aber keine Coxeter-Realisierung von $L_5^4 \times_4 \mathcal{L}_2$.

Im letzten Fall folgt aus den obigen Berechnungen, daß für jede Coxeter-Realisierung S von $L_5^5 \times_4 \mathcal{L}_2$ auch $S_{|\mathcal{L}_2} = L_5^5$ ist. Man sieht leicht, daß dies nicht möglich ist. $\square$

Seien $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ Fehlschnitte. Angenommen wir sind in der Situation, daß wir für festes $S_{|\mathcal{L}_1}$ die Coxeter-Realisierungen von $S_{|\mathcal{L}_1} \times_k \mathcal{L}_2$ klassifizieren möchten. Dann ist von Bedeutung, welche der Ecken von $S_{|\mathcal{L}_1}$ auch in $S_{|\mathcal{L}_2}$ liegen können und welche Werte die Vielfachheiten der Kanten von $S_{|\mathcal{L}_2}$ nach $S_{|(\mathcal{L}_1 \setminus (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2))}$ annehmen können. Unter den folgenden Voraussetzungen läßt sich unabhängig vom Einzelfall sagen:

Lemma 5.4 *Seien $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ Fehlschnitte mit $|\mathcal{L}_2 \setminus (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2)| \geq 2$. Sei $S \in C(\mathcal{L}_1 \times_k \mathcal{L}_2)$, und sei x die einzige offene Ecke von $S_{|\mathcal{L}_1}$. Dann gilt:*

(i) Für jedes Paar $x' \in S_{|\mathcal{L}_1} \smallsetminus \{x\}$ und $y \in S_{|\mathcal{L}_2 \smallsetminus (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2)}$ ist $\mathrm{m}[x', y] = 0$.

(ii) Ist $k \geq 1$, so ist $x \in S_{|\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2}$.

(iii) $S_{|\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2}$ ist zusammenhängend.

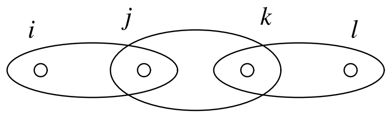
Beweis: Zu (i): Angenommen es existieren x' und y wie in der Behauptung mit $\mathrm{m}[x', y] > 0$. Wegen $|\mathcal{L}_2 \smallsetminus (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2)| \geq 2$ ist $\langle S_{|\mathcal{L}_1}, y \rangle$ eine Coxeter-Realisierung von $\mathcal{L}_1 \times_0 \{y\}$ und x' somit eine offene Ecke.

(ii) folgt unmittelbar aus 3.6 (iii).

Zu (iii): Als Lannér-Diagramm ist $S_{|\mathcal{L}_2}$ zusammenhängend. Nach (ii) ist $x \in S_{|\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2}$. Es gibt also von jedem $z \in S_{|\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2}$ einen Pfad zu x, der ganz in $S_{|\mathcal{L}_2}$ liegt. Aus (i) folgt, das der Pfad schon in $S_{|\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2}$ liegt. □

Der Graph ist also an vielen Stellen vorgegeben. Nach diesen allgemeinen Vorüberlegungen beginnen wir jetzt die Untersuchung der Coxeter-Realisierungen einzelner Facettenbündel.

Lemma 5.5 *Sei das folgende Facettenbündel mit i, $l \geq 2$ gegeben:*



Sei S eine Coxeter-Realisierung. Dann hat das Teildiagramm von S, das den mittleren Fehlschnitt realisiert, mindestens zwei offene Ecken.

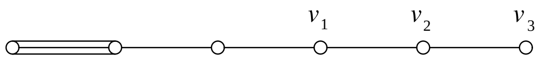
Der Beweis folgt unmittelbar mit 3.6, (iii).

Nach 3.5 ist jedes Coxeter-Diagramm, das ein solches Facettenbündel beschreibt, zusammenhängend. Nach Tabelle 2 wissen wir, daß jedes Lannér-Diagramm der Ordnung 5 höchstens eine offene Ecke besitzt. Für $j + k = 5$ ist das obige Facettenbündel also nicht Coxeter-realisierbar. Ein Vergleich mit den Polytopen aus 5.2 ergibt:

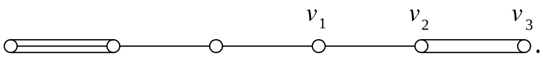
Folgerung 5.6 *Die Polytope P_3, P_4 und P_6 aus 5.2 sind nicht Coxeter-realisierbar.*

Lemma 5.7 *Seien $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ Fehlschnitte mit $|\mathcal{L}_1| = 5$ und $|\mathcal{L}_2| = 4$. Dann ist $\mathcal{L}_1 \times_2 \mathcal{L}_2$ nicht Coxeter-realisierbar.*

Beweis: Angenommen es ist $S \in C(\mathcal{L}_1 \times_2 \mathcal{L}_2)$. Nehmen wir zunächst $S_{|\mathcal{L}_1} = L_5^1$ an. Nach Tabelle 3 und 3.6 (i) enthält S ein Teildiagramm der Form

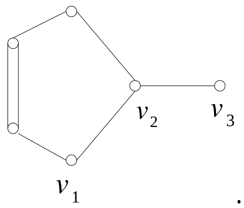


oder



Nach 5.4 enthält $S_{|\mathcal{L}_2}$ die Ecken v_1, v_2, v_3 und genau eine weitere Ecke v_4, für die $\mathrm{m}[v_4, v_1] = 0$ ist. Das einzige Lannér-Diagramm, das für $S_{|\mathcal{L}_2}$ in Frage kommt, wäre L_4^4 (in dem Fall, wo $\mathrm{m}[v_2, v_3] = 1$ ist), aber $\mathrm{m}[v_4, v_2] = 3$ liefert ein unerwünschtes Lannér-Diagramm.

Angenommen es ist $S_{|\mathcal{L}_1} = L_5^2$. Nach Tabelle 3 und 3.6 (i) enthält jedes $S \in C(L_2^5 \times_2 \mathcal{L}_2)$ ein Teildiagramm der Form

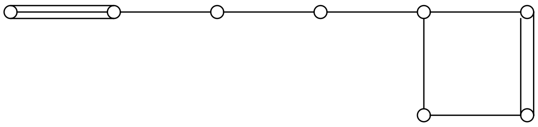


Nach 5.4 (iii) enthalte $S_{|\mathcal{L}_2}$ o.B.d.A. die Ecken v_1, v_2, v_3 und eine weitere Ecke v_4 mit $\mathrm{m}[v_4, v_1] = 0$. Analog zu oben folgt die Behauptung.

Da $S_{|\mathcal{L}_1}$ in jedem Fall eine offene Ecke enthält, kommen andere Lannér-Diagramme nicht in Frage. □

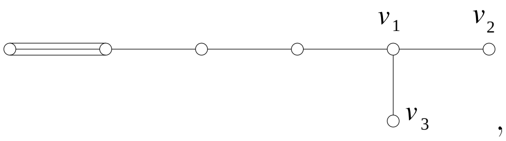
Folgerung 5.8 *Die Polytope P_3, P_4, P_5 und P_8 aus 5.2 sind nicht Coxeter-realisierbar.*

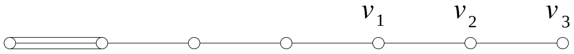
Lemma 5.9 *Seien $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ Fehlschnitte mit $|\mathcal{L}_1| = 5$ und $|\mathcal{L}_2| = 4$. Dann ist $\mathcal{L}_1 \times_1 \mathcal{L}_2$ nur durch*



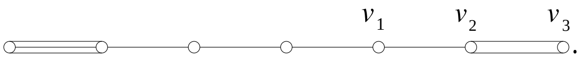
Coxeter-realisierbar.

Beweis: Sei $S \in C(\mathcal{L}_1 \times_1 \mathcal{L}_2)$, und nehmen wir zunächst $S_{|\mathcal{L}_1} = L_5^1$ an. Nach Tabelle 3 und 3.6 (i) enthält S Teildiagramme der Form



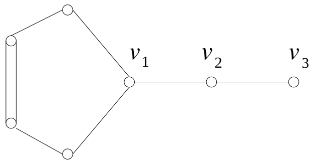


oder



Nach 5.4 ist $S_{|\mathcal{L}_1} \cap S_{|\mathcal{L}_2} = \{v_1\}$. Somit enthält $S_{|\mathcal{L}_2}$ die Ecken v_1, v_2, v_3 und eine weitere Ecke v_4. Nach 5.4 ist v_4 zu keiner Ecke aus $S_{|\mathcal{L}_1} \setminus \{v_1\}$ benachbart. Man überprüft jetzt leicht, daß in allen drei Fällen das einzige mögliche Coxeter-Diagramm das in der Behauptung angegebene ist.

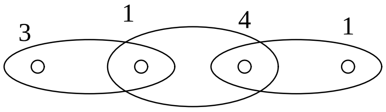
Nehmen wir jetzt $S_{|\mathcal{L}_1} = L_5^2$ an. Dann enthält S ein Teildiagramm



,

und $S_{|\mathcal{L}_2}$ enthält die Ecken v_1, v_2, v_3 sowie eine weitere Ecke v_4. Man überprüft jetzt leicht, daß $L_5^2 \times_1 \mathcal{L}_2$ nicht Coxeter-realisierbar ist. □

Folgerung 5.10 *Das Facettenbündel*



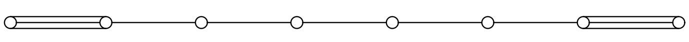
ist nicht Coxeter-realisierbar.

Beweis: Kombinieren wir das Diagramm aus 5.9 mit den drei möglichen Diagrammen aus 5.3, so enthält jedes daraus entstehende Coxeter-Diagramm ein unerwünschtes, nicht sphärisches Teildiagramm. Mit 3.3 folgt die Behauptung. □

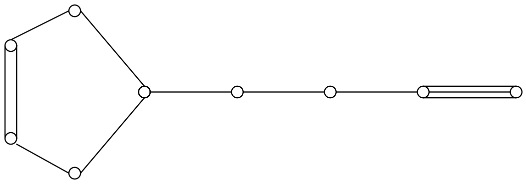
Folgerung 5.11 *Das Polytop P_2 ist nicht Coxeter-realisierbar.*

Lemma 5.12 *Seien $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ Fehlschnitte der Mächtigkeit 5. Dann sind die Facettenbündel $\mathcal{L}_1 \times_3 \mathcal{L}_2$ und $\mathcal{L}_1 \times_2 \mathcal{L}_2$ jeweils durch das folgende eindeutige Coxeter-Diagramm*

bzw.



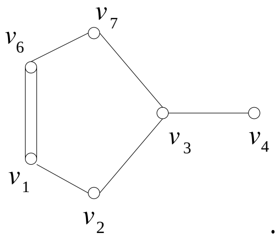
realisierbar. Das Facettenbündel $\mathcal{L}_1 \times_1 \mathcal{L}_2$ ist durch die beiden Diagramme



realisierbar.

Beweis: Sei S die Coxeter-Realisierung eines der obigen Facettenbündel. In jedem der Fälle besitzen die Teildiagramme $S_{|\mathcal{L}_1}$ und $S_{|\mathcal{L}_2}$ eine offene Ecke; sie sind nach Tabelle 2 also gleich L_5^1 oder L_5^2. Da L_5^2 nur eine offene Ecke enthält, schließt man $S_{|\mathcal{L}_1} = S_{|\mathcal{L}_2} = L_5^2$ leicht aus.

Sei nun $S \in C(\mathcal{L}_1 \times_3 \mathcal{L}_2)$. Nehmen wir zunächst $S_{|\mathcal{L}_1} = L_5^2$ an. Nach Tabelle 3 und 3.6 (i) besitzt S ein Teildiagramm der Form



.

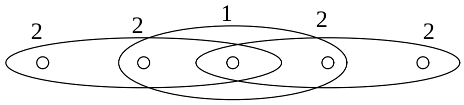
Da $S_{|\mathcal{L}_2} = L_5^1$ ist, wird $S_{|\mathcal{L}_2}$ o.B.d.A. von den Ecken v_1, v_2, v_3, v_4 und einer weiteren Ecke v_5 mit $\mathrm{m}[v_5, v_4] = 3$ erzeugt. In S liegt dann aber auch das nicht sphärische Teildiagramm $\langle v_5, v_4, v_3, v_7, v_6 \rangle$.

Ganz analog schließt man $S \in C(\mathcal{L}_1 \times_2 \mathcal{L}_2), S_{|\mathcal{L}_1} = L_5^2$ aus und zeigt, daß im Fall $S \in C(\mathcal{L}_1 \times_1 \mathcal{L}_2), S_{|\mathcal{L}_1} = L_5^2$ nur die in der Behauptung angegebene Möglichkeit besteht.

Für $S_{|\mathcal{L}_1} = S_{|\mathcal{L}_2} = L_5^1$ folgt mit Tabelle 3 und 5.4 leicht die Behauptung. $\square$

Wenn man nun noch beachtet, daß die obige Coxeter-Realisierung von $\mathcal{L}_1 \times_3 \mathcal{L}_2$ keine offene Ecke enthält, erhält man mittels 3.6 (ii):

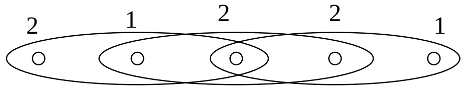
Folgerung 5.13 *Das Facettenbündel*



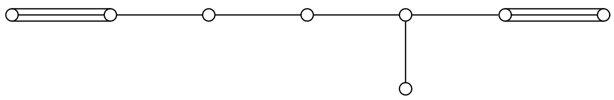
ist nicht Coxeter-realisierbar.

Folgerung 5.14 *Das Polytop P_9 ist nicht Coxeter-realisierbar.*

Lemma 5.15 *Die einzige Coxeter-Realisierung des Facettenbündels*

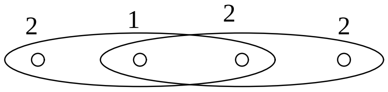


ist durch

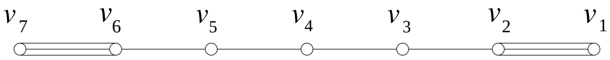


gegeben.

Beweis: Nach 5.12 ist



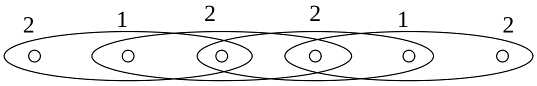
nur durch



zu realisieren. Sei v_8 die noch verbleibende Ecke. Nehmen wir o.B.d.A. an, daß der mittlere Fehlschnitt durch $\langle v_1, \ldots, v_5 \rangle$ realisiert wird, so folgt mit 3.3, daß $\mathrm{m}[v_8, v_7] = \mathrm{m}[v_8, v_6] = 0$ ist. Mit 5.3 ergibt sich leicht die Behauptung. $\square$

Da das obige Diagramm keine offene Ecke enthält, ergibt sich mit 3.6 (ii):

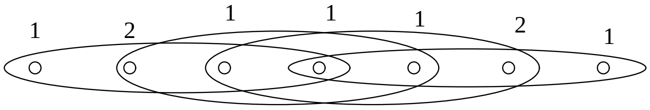
Folgerung 5.16 *Das Facettenbündel*



ist nicht Coxeter-realisierbar.

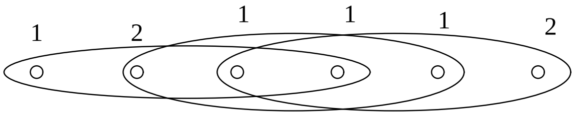
Folgerung 5.17 *Das Polytop P_{10} ist nicht Coxeter-realisierbar.*

Lemma 5.18 *Das Facettenbündel*

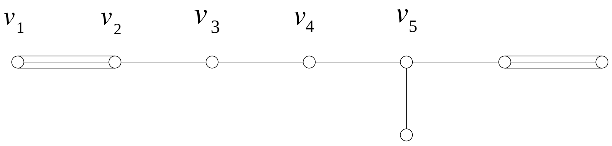


ist nicht Coxeter-realisierbar.

Beweis: Bezeichnen wir die Fehlschnitte in der Behauptung von links nach rechts mit $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ und $\mathcal{L}_4$. Nach 5.15 ist



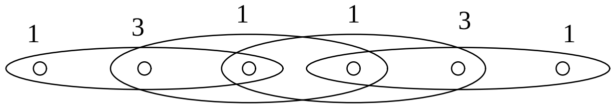
nur durch



realisierbar, wobei $S_{|\mathcal{L}_3}$ durch $v_1, \ldots, v_5$ erzeugt wird. Wenden wir nun 5.3 auf $\mathcal{L}_3 \times_4 \mathcal{L}_4$ an, so folgt unmittelbar die Behauptung. $\square$

Folgerung 5.19 *Das Polytop P_{11} ist nicht Coxeter-realisierbar.*

Lemma 5.20 *Das Facettenbündel*

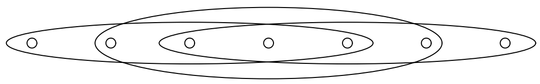


ist nicht Coxeter-realisierbar.

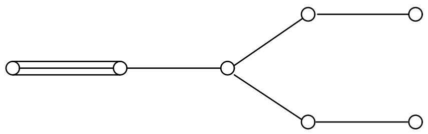
Beweis: Bezeichnen wir die Fehlschnitte von links nach rechts als $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ und $\mathcal{L}_4$. Wenden wir 5.12 auf $\mathcal{L}_2 \times_2 \mathcal{L}_3$ und 5.3 auf $\mathcal{L}_1 \times_4 \mathcal{L}_2$ und $\mathcal{L}_3 \times_4 \mathcal{L}_4$ an, so sieht man, daß das Diagramm in allen Fällen unerwünschte, nicht sphärische Teildiagramme enthält. $\square$

Folgerung 5.21 *Das Polytop P_7 ist nicht Coxeter-realisierbar.*

Lemma 5.22 *Das Facettenbündel*



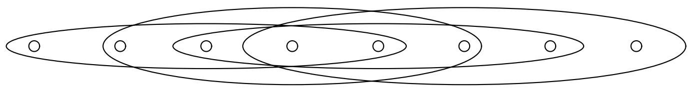
ist nur durch



Coxeter-realisierbar.

Der Beweis ergibt sich durch zweimaliges anwenden von 5.3. Insbesondere wird der mittlere Fehlschnitt also durch ein L_5^5 realisiert und die beiden anderen durch L_5^1. Mit 5.3 zeigt das sofort die Gültigkeit von:

Folgerung 5.23 *Das Facettenbündel*



ist nicht Coxeter-realisierbar.

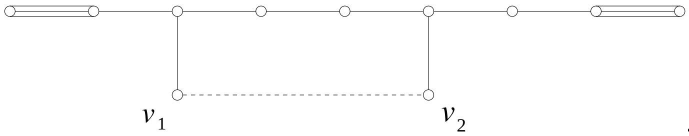
Folgerung 5.24 *Das Polytop P_{12} ist nicht Coxeter-realisierbar.*

Es bleibt jetzt also für den Beweis von Theorem 5.1 nur noch zu zeigen, daß die Realisierung von P_1 als hyperbolisches Coxeter-Polytop eindeutig ist.

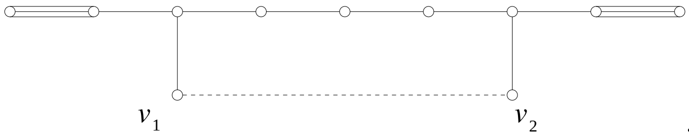
Sei S eine Coxeter-Realisierung des Facettenbündels von P_1. Seien $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ und $\mathcal{L}_4$ Fehlschnitte der Mächtigkeit 5. Im Facettenbündel von P_1 liegen dann $\mathcal{L}_1 \times_1 \mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_1 \times_4 \mathcal{L}_3$ und $\mathcal{L}_2 \times_4 \mathcal{L}_4$. Mit 5.3 folgt also $\mathcal{L}_1 \neq L_5^2$ und $\mathcal{L}_2 \neq L_5^2$. Nach 5.12 bleibt als Coxeter-Realisierung von $\mathcal{L}_1 \times_1 \mathcal{L}_2$ also nur das Diagramm:

.

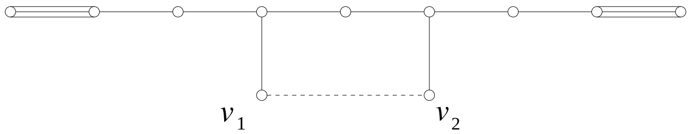
Mit 5.3 erhält man nun leicht, daß die Coxeter-Realisierungen von P_1 durch



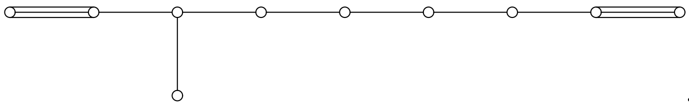
,



,



gegeben sind. (Weitere Kanten $[v_1, v_i]$ oder $[v_2, v_i]$ mit einer Vielfachheit größer als 0 liefern offenbar zusätzliche, nicht sphärische Teildiagramme.) Die ersten beiden Diagramme enthalten das Teildiagramm


,

das nach 3.12 und Tabelle 4 superhyperbolisch ist. Daß das verbleibende Diagramm in der Tat den Fundamentalbereich einer arithmetischen Spiegelungsgruppe beschreibt, ist [Bu3], Th. 3.4 zu entnehmen. Theorem 5.1 ist also bewiesen.

6 Grundkörper hyperbolischer, arithmetischer Coxeter-Polytope

Gegenstand dieses Abschnitts sind Coxeter-Polytope im hyperbolischen Raum, die darüberhinaus arithmetisch sind (vgl. Abschnitt 2.3). Eine der interessantesten offenen Fragen auf diesem Gebiet ist die, ob solche Polytope mit Grundkörpern beliebig hohen Grades existieren. Hierzu liegen wesentlich Resultate von Nikulin vor, die auch grundlegend für die Beweise der Theoreme in diesem Abschnitt sind.

Bezeichne $\mathcal{P}_F^d$ die Menge der arithmetischen Coxeter-Polytope im $\mathbb{H}^d$ mit Grundkörper F. Wir werden zeigen:

Theorem 6.1 *Es gibt eine Konstante N, so daß für $d \geq 3$ und jedes F mit $[F : \mathbb{Q}] > N$ kein Polytop mit weniger als $d + 5$ Facetten in $\mathcal{P}_F^d$ liegt.*

Theorem 6.2 *Es gibt eine Konstante N, so daß $\mathcal{P}_F^d = \emptyset$ ist für $d \geq 9$ und jedes F mit $[F : \mathbb{Q}] > N$.*

Die Bedeutung dieser Aussagen beruht auf den folgenden Ergebnissen: In [Ni1] hat Nikulin zum einen gezeigt, daß es zu einer Zahl N nur endlich viele Grundkörper arithmetischer Spiegelungsgruppen vom Grad kleiner als N gibt und zum anderen, daß für einen festen Grundkörper F die Anzahl der Konjugationsklassen maximaler, arithmetischer Spiegelungsgruppen endlich ist ([Ni1], Th. 1.3.3, Th. 1.3.2). Aus 6.1 und 6.2 ergibt sich also:

Folgerung 6.3 *Es gibt nur endlich viele Konjugationsklassen maximaler, arithmetischer Spiegelungsgruppen im $\mathbb{H}^d$, $d \geq 3$, die von weniger als $d + 5$ Spiegelungen erzeugt werden.*

Folgerung 6.4 *Für $d \geq 9$ gibt es im $\mathbb{H}^d$ nur endlich viele Konjugationsklassen maximaler, arithmetischer Spiegelungsgruppen.*

In diesen Fällen ist also eine vollständige Klassifikation zu erhoffen.

Ob die Aussage von Theorem 6.2 womöglich für beliebige Dimensionen gilt, ist eine offene Frage. Insbesondere sind bislang auch keine Gegenbeispiele, d.h. Serien von Gruppen, bekannt, wo der Grad der Grundkörper nicht beschränkt ist.

Der Beweis von Theorem 6.1 beruht auf der Klassifikation kompakter, 3-freier Polytope mit wenigen Facetten und dem Beweis einiger geometrischer Sachverhalte. Wir werden dabei auch das einzige Polytop mit $d + 5$ Facetten beschreiben, für das bislang nicht klar ist, ob es als arithmetisches Coxeter-Polytop mit beliebig hohem Grad des Grundkörpers zu realisieren ist. Ein Beweis, daß dies nicht der Fall ist, würde auch zu einer Verbesserung der Dimensionsschranke aus 6.2 führen.

Für den Beweis von Theorem 6.2 nutzen wir diese Ergebnisse und folgen einer Beweisstrategie, mit der Nikulin in [Ni2] die Aussage aus Theorem 6.2 für $d \geq 16$ bewiesen hat. Da er mit ähnlichen Methoden in [Ni3] die Existenz von Grundkörpern beliebig hohen Grades für $d \geq 10$ ausschließen konnte, handelt es sich bei Theorem 6.2 nur um eine geringfügige Verbesserung bekannter Resultate. Die Methoden geben aber Anlaß zu der Hoffnung, daß auf diesem Wege weitere Verschärfungen der Dimensionsschranke zu erzielen sind.

Erläutern wir zunächst, warum wir uns auf Untersuchungen 3-freier Polytope beschränken können:

Lemma 6.5 *(z.B. [Vi2]) Der Grundkörper eines arithmetischen Coxeter-Polytops im hyperbolischen Raum wird von der Determinante jedes Lannér-Diagramms erzeugt, das im Coxeter-Diagramm dieses Polytops vorkommt.*

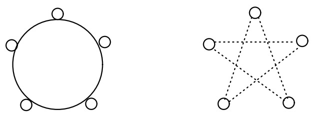
Beweis: Sei G die Gram-Matrix des arithmetischen Coxeter-Polytops P. Nach 2.7 liegt die Determinante jeder Untermatrix von G in F, insbesondere also die Determinante l einer Untermatrix, die einem Lannér-Diagramm entspricht. Ist $F \supset \mathbb{Q}(l)$, so gibt es eine Einbettung $\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{R}$, die auf F nicht die Identität ist, $\mathbb{Q}(l)$ aber fest läßt. Im Widerspruch zu 2.7 enthält ${}^{\sigma}G$ dann eine Untermatrix mit einem negativen Eigenwert. □

Bekanntermaßen gibt es nur endlich viele Lannér-Diagramme der Ordnung größer als 3. In [Ta] hat Takeuchi gezeigt, daß es im $\mathbb{H}^2$ nur endlich viele, arithmetische Spiegelungsgruppen gibt, die von 3 Spiegelungen erzeugt werden. Es gibt also nur endlich viele Lannér-Diagramme der Ordnung 3, die den Kriterien aus 2.7 genügen.

Damit ist also klar, daß wir bei den Beweisen der Theoreme nur einfache, 3-freie Polytope zu berücksichtigen haben.

6.1 Klassifikation einfacher, 3-freier d-Polytope mit weniger als $d+6$ Facetten

Vereinbaren wir zunächst noch einige Bezeichnungen: Für eine Facette f eines Polytops bezeichne $I(f)$ die Menge aller zu f inzidenten Facetten ohne f selbst und $v(f)$ die Anzahl der zu f disjunkten Facetten. Mit einem Kreis um den herum die Punkte eines Fehlschnitt-Diagramms angeordnet sind, stellen wir vereinfachend ein Fehlschnitt-Diagramm dar, in dem es nur Fehlschnitte der Mächtigkeit 2 gibt und diese genau durch die Paare von Punkten gegeben sind, die nicht auf dem Kreis benachbart sind. So stellen z.B. die beiden folgenden Fehlschnitt-Diagramme dieselben Facettenbündel dar:



Ein Fehlschnitt-Diagramm, das nur Fehlschnitte der Mächtigkeit 2 enthält und in dem ein oder mehrere Punkte durch einen mit einem Fragezeichen gekennzeichneten Kreis umgeben sind, wollen wir so verstehen, daß das von den nicht markierten Punkten aufgespannte Diagramm vollständig angegeben ist, die Facetten, die den gekennzeichneten Punkten entsprechen aber noch zu weiteren Facetten disjunkt seien können.

Lemma 6.6 *Sei P ein 3-freies Polytop mit r Facetten. Sei f eine Facette von P mit $|I(f)| = r - 2$. Dann gilt für das eindeutig bestimmte f' mit $f' \notin I(f), f' \neq f$, daß $I(f') = I(f)$ ist.*

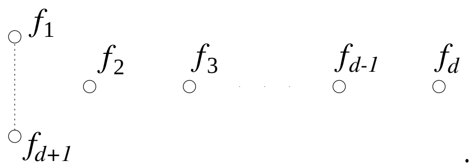
Beweis: Nach Definition sind f' und f disjunkt. Ist $I(f) \neq I(f')$, so bleibt also nur $I(f') \subsetneq I(f)$. Sei $g \in I(f) \setminus I(f')$. Dann enthält $I(g)$ die Facette f und eine Teilmenge von $I(f)$, deren Facetten nach Definition aber alle zu f inzident sind. Es gibt somit in g keinen Fehlschnitt der $f \cap g$ enthält (1.8). Das steht im Widerspruch zu 1.9. $\square$

Lemma 6.7 *Sei P ein 3-freies, einfaches d-Polytop. Dann ist die Anzahl der Facetten von P größer oder gleich $2d$. Im Fall der Gleichheit handelt es sich bei P um einen d-dimensionalen Würfel.*

Beweis: Sei e eine Ecke von P und k eine Kante, die e enthält, d.h., es existieren Facetten $f_1, \dots, f_d$ mit

$$e = \bigcap_{i=1}^{d} f_i \qquad \text{und} \qquad k = \bigcap_{i=2}^{d} f_i.$$

Da k eine weitere Ecke e' enthält, gibt es eine Facette f_{d+1} mit $e' = k \cap f_{d+1}$. Da P 3-frei ist und $k \cap f_1 \cap f_{d+1} = \emptyset$ ist, gibt es einen Fehlschnitt $\{f_i, f_j\}$, $i, j \in \{1, \dots, d+1\}$. Nach Definition von e und e' ist nur $\{i, j\} = \{1, d+1\}$ möglich. Wir haben also das Fehlschnitt-Diagramm

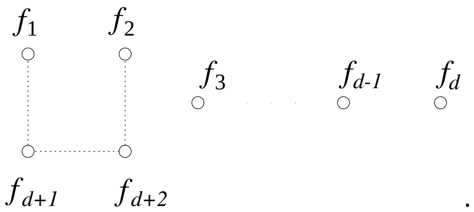


.

Mit dem gleichen Argument wie oben, angewandt auf e und jede Kante, die als Schnitt beliebiger $d-1$ Facetten aus der Menge $\{f_1, \dots, f_d\}$ gegeben ist, bekommen wir für jedes $f_i \in \{f_1, \dots, f_d\}$ eine Facette f_{i+d}, die zu f_i disjunkt und zu allen übrigen Facetten aus $\{f_1, \dots, f_d\}$ inzident ist. Der erste Teil der Behauptung ist also bewiesen.

Nehmen wir jetzt an, durch $\{f_1, \dots, f_d, f_{d+1}, \dots, f_{2d}\}$ sind alle Facetten von P gegeben. Wir haben zu zeigen, daß die $f_{d+1}, \dots, f_{2d}$ paarweise inzident sind (vgl. Abschnitt 1.3, Bsp. 4).

Nehmen wir f_{d+1} und f_{d+2} als disjunkt an, so haben wir das Teildiagramm

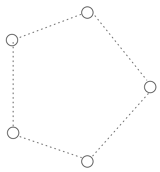
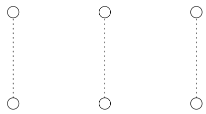


In der Kante $(\bigcap_{i=3}^{d} f_i) \cap f_{d+2}$ gibt es wegen $f_j \cap f_{d+j} = \emptyset$ für $j = 1, \ldots, d$ aber nur eine Ecke. Das Fehlschnitt-Diagramm kann also kein Polytop darstellen. □

Die Kombinatorik zweidimensionaler Polytope ist offensichtlich durch die Zahl ihrer Facetten festgelegt. Wir führen ihre Fehlschnitt-Diagramme in den folgenden Sätzen nur mit auf, da sie als Teildiagramme bei den Polytopen in höheren Dimensionen auftreten.

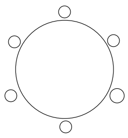
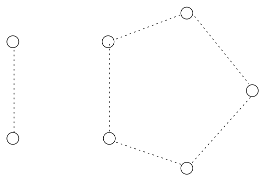
Als Folgerung aus 6.7 erhalten wir sofort:

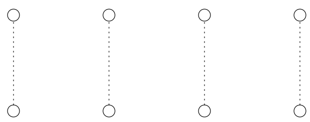
Satz 6.8 *Es gibt genau die folgenden einfachen, 3-freien d-Polytope mit $d+3$ Facetten:*

$d = 2$:  $d = 3$: 

Damit zeigen wir nun:

Satz 6.9 *Es gibt genau die folgenden einfachen, 3-freien d-Polytope mit $d+4$ Facetten:*

$d = 2$:  $d = 3$: 

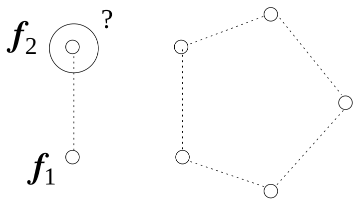
$d = 4$: 

Beweis: Die Existenz einfacher Polytope mit Fehlschnitt-Diagrammen, wie sie in der Behauptung angegeben sind, ergibt sich in jedem Fall aus 1.10. Zeigen wir, daß die Liste vollständig ist:

Nach 6.7 gibt es für $d > 4$ kein solches Polytop und für $d = 4$ nur den Würfel. Für $d = 2$ ist die Eindeutigkeit klar, es bleibt also nur der Fall $d = 3$ zu betrachten.

Sei P ein einfaches, 3-freies 3-Polytop mit Facetten $\{f_1, \ldots, f_7\}$. Für jedes f_i ist $|I(f_i)| \geq 4$ (1.7, 1.8, 6.7) und $|I(f_i)| \leq 5$ (1.9).

Angenommen P besitzt eine fünfeckige Facette, d.h. eine Facette f_1 mit $|I(f_1)| = 5$. Das Fehlschnitt-Diagramm von P enthält dann folgendes Teildiagramm (1.8):



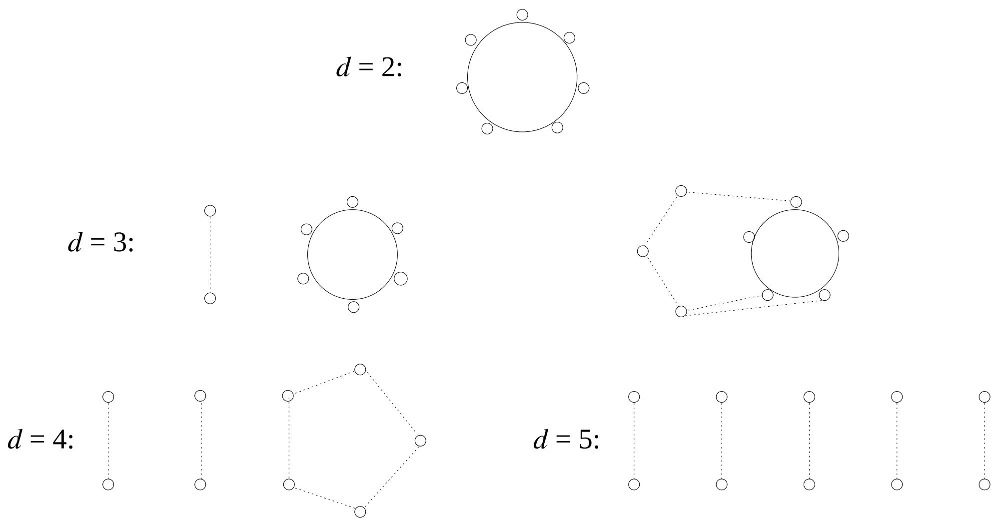
Nach 6.6 ist f_2 zu allen anderen Facetten inzident.

Der Fall, daß jede Facette von P ein 4-Eck ist, läßt sich leicht mit demselben Ansatz ausschließen. Es folgt aber schon allgemein für einfache 3-Polytope, daß dies nicht der Fall sein kann: Bekanntermaßen besitzt ein einfaches 3-Polytop mit 7 Facetten 15 Kanten. Andererseits berechnet sich die Anzahl der Kanten aber auch offensichtlich als

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{7} |I(f_i)|.$$

Das führt die Annahme $|I(f_i)| = 4$ für $i = 1, \ldots, 7$ zu einem Widerspruch. $\square$

Satz 6.10 *Es gibt genau die folgenden einfachen, 3-freien d-Polytope mit $d+5$ Facetten:*



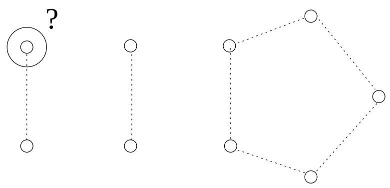
Beweis: Die Existenz von Polytopen mit den oben angegebenen Fehlschnitt-Diagrammen folgt aus 1.10 und Abschnitt 1.3, Beispiel 5.

Nach 6.7 gibt es einfache, 3-freie Polytope nur für $d \leq 5$ und für $d = 5$ nur den Würfel.

Sei P ein solches 4-Polytop mit Facetten $\{f_1, \ldots, f_9\}$. Jedes f_i ist ein 3-freies 3-Polytop (1.7). Insbesondere ist $|I(f_i)| \geq 6$ (1.8, 6.7). Andererseits ist f_i in mindestens einem Fehlschnitt enthalten, also $|I(f_i)| \leq 7$.

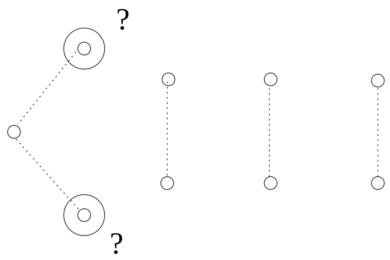
Das von den Ecken aus $I(f_i)$ aufgespannte Teildiagramm im Fehlschnitt-Diagramm von P ist also von einer Form wie in 6.8 oder 6.9 beschrieben, je nach dem, ob $|I(f_i)| = 6$ oder 7 ist.

Angenommen P enthält eine Facette f_1 mit $|I(f_1)| = 7$. Das Fehlschnitt-Diagramm von P enthält dann folgendes Teildiagramm:



Mit 6.6 folgt, daß P eine Form wie behauptet besitzt.

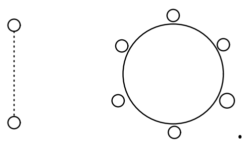
Es bleibt also nur der Fall, daß $|I(f_i)| = 6$, d.h. $v(f_i) = 2$, für jedes f_i ist. Insbesondere enthält das Fehlschnitt-Diagramm von P dann folgendes Teildiagramm:



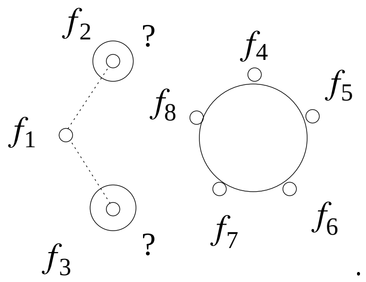
Dieses Diagramm läßt sich offensichtlich nicht derart vervollständigen, daß für alle Facetten $v(f_i) = 2$ ist.

Sei P nun ein einfaches, 3-freies 3-Polytop mit Facetten $\{f_1, \ldots, f_8\}$. Dann ist für jede Facette $4 \leq |I(f_i)| \leq 6$ (1.8, 6.7, 1.9).

Angenommen es existiert ein f_1 mit $|I(f_1)| = 6$. Nach 6.6 ist P dann von der Form



Angenommen es existiert ein f_1 mit $|I(f_1)| = 5$. Das Fehlschnitt-Diagramm von P enthält dann ein Teildiagramm



Nehmen wir zunächst an, daß f_2 und f_3 disjunkt sind. Wäre $v(f_2) > 2$, so bestünde das Fehlschnitt-Diagramm des Polytops f_2 aus einem Unterdiagramm, das von einer echten Teilmenge der $f_4, \ldots, f_8$ erzeugt wird. Das ist aber in keinem Fall das Fehlschnitt-Diagramm eines 4-Ecks. Es bleibt also nur $v(f_2) = v(f_3) = 2$, wobei f_1, f_2 und f_3 paarweise disjunkt sind. Die Fehlschnitt-Diagramme der f_i, $i = 4, \ldots, 8$ beschreiben dann aber keine 5-Ecke, was ein Widerspruch zu 1.8 ist.

Also sind f_2 und f_3 inzident. Für jede Facette ist $v(f_i) \leq 3$.

Nehmen wir zunächst $v(f_2) = 2$ an. Sei o.B.d.A. f_2 disjunkt zu f_4. Damit das Fehlschnitt-Diagramm von f_3, f_5, f_6, f_7 und f_8 ein 5-Eck darstellt, muß f_3 genau zu f_6 und f_7 disjunkt sein. Wir erhalten also ein Diagramm wie in der Behauptung angegeben.

Angenommen es ist $v(f_2) = v(f_3) = 3$. Sei f_3 zu f_i und f_j für $i, j \in \{4, \ldots, 8\}$ disjunkt. Da jede Facette zu höchstens 3 anderen disjunkt sein kann, ist dann f_2 zu f_i und f_j inzident. Das von f_3, f_i und f_j erzeugte Teildiagramm kann aber in dem Fehlschnitt-Diagramm des 4-Ecks f_2 nicht vorkommen.

Da ein 3-Polytop mit 8 Flächen 18 Kanten enthält, ist $|I(f_i)| = 4$ für alle f_i nicht möglich. $\square$

6.2 Beweis der Theoreme

Erinnern wir zunächst an einige Bezeichnungen.

Sei $P = \bigcap_{i \in I} H_i^-$ ein Polyeder im hyperbolischen Raum. Dabei seien die H_i^- die durch die Hyperebenen H_i beschränkten Halbräume. Die Vektoren v_i seien so gewählt, daß $v_i^\perp = H_i$ und $(v_i, v_i) = 1$ ist. Sei F der Grundkörper von P. Wir bezeichnen mit $v_i, i \in I$ gleichzeitig die entsprechenden Ecken im Coxeter-Diagramm von P.

Zur Vereinfachung der Notation wollen wir im folgenden die Facetten $H_i \cap P$ von P mit den Hyperebenen H_i identifizieren.

Der Beweis der Theoreme beruht darauf, daß die folgenden zwei Sachverhalte für Polytope gewisser Kombinatorik nicht miteinander zu vereinbaren sind.

Zum einen gilt:

Lemma 6.11 *In dem Coxeter-Diagramm eines hyperbolischen Polyeders sind je zwei Lannér-Diagramme mit disjunkten Eckenmengen durch mindestens eine Kante vom Gewicht größer* 0 *miteinander verbunden.*

Der Beweis ist klar, da die Gram-Matrix des entsprechenden Polytops andernfalls mindestens zwei negative Eigenwerte besäße.

Zum anderen hat Nikulin gezeigt:

Lemma 6.12 *(Vgl. [Ni2], Th. 2.3.1) Sei P ein hyperbolisches, arithmetisches Coxeter-Polytop und $k = \bigcap_{i=1}^{l} H_i$ eine Kante von P, die die beiden Ecken $e_1 = k \cap H_{l+1}$ und $e_2 = k \cap H_{l+2}$ enthält. Dann gibt es zu jeder Konstanten $t < -1$ eine natürliche Zahl $N(t)$, so daß aus $(v_i, v_j) > t$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, l+2\}$ und $[F : \mathbb{Q}] > N(t)$ folgt, daß die Zusammenhangskomponente in dem Coxeter-Graphen $\langle v_1, \ldots, v_{l+2} \rangle$, in der v_{l+1} und v_{l+2} liegen, nicht mehr als drei Ecken enthält.*

In der Tat liegen v_{l+1} und v_{l+2} in einer Zusammenhangskomponente, da sie in einem Lannér-Diagramm vorkommen.

Um die Gültigkeit der Voraussetzungen von 6.12 zu zeigen, haben wir zu zeigen, daß die entsprechenden Polytope aus 6.8 und 6.9 im hyperbolischen Raum nicht mit beliebig weit auseinanderliegenden Hyperebenen zu realisieren sind. Die diesbezüglichen Resultate von Nikulin sind nur für die Würfel hinreichend.

Das folgende technische Lemma ist leicht zu zeigen:

Lemma 6.13 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^5$ eine beschränkte Menge. Sei $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fest gewählt. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $K < 0$, so daß für alle $(a, b, c, e, f) \in M$ und $y < K$ gilt:*

$$\frac{a}{d} - \varepsilon \leq \frac{ay^2 + by + c}{dy^2 + ey + f} \leq \frac{a}{d} + \varepsilon.$$

Damit zeigen wir nun:

Lemma 6.14 *Sei $P = \bigcap_{i=1}^{4} H_i^-$ ein spitzwinkliges 4-Eck im $\mathbb{H}^2$ mit $H_1 \cap H_2 = H_3 \cap H_4 = \emptyset$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Konstante $K < 0$, so daß für jedes solche P mit $(v_3, v_4) < K$ gilt $(v_1, v_2) > -1 - \varepsilon$.*

Beweis: Sei

$$G = \begin{pmatrix} 1 & x & a & b \\ x & 1 & c & d \\ a & c & 1 & y \\ b & d & y & 1 \end{pmatrix}$$

die Gram-Matrix eines solchen Polytops P mit $x = (v_1, v_2)$ und $y = (v_3, v_4)$. Dann ist $\det G = 0$ und somit x eine Lösung der Gleichung

$$(y^2 - 1)x^2 + B(y)x + C(y) = 0,$$

wobei $B(y) = 2ac + 2bd - (2ad + 2bc)y$ und $C(y) = -y^2 + (2ab + 2dc)y + d^2a^2 + c^2b^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - 1$ ist. Also ist

$$x \geq \frac{-B(y)}{2(y^2-1)} - \sqrt{\frac{B(y)^2}{4(y^2-1)^2} - \frac{C(y)}{(y^2-1)}},$$

wobei die Wurzel reell ist. Da die Werte der Koeffizienten von $B(y)$ und $C(y)$ als Funktionen von $a, b, c, d \in (-1, 0]$ beschränkt sind, folgt mit 6.13, daß zu jedem $\varepsilon' > 0$ eine Konstante K existiert, so daß für alle $a, b, c, d \in (-1, 0]$ aus $y < K$ folgt:

$$-\varepsilon' \leq \frac{-B(y)}{2(y^2-1)} \leq \varepsilon' \quad \text{und} \quad -1-\varepsilon' \leq \frac{C(y)}{(y^2-1)} \leq -1+\varepsilon'.$$

Damit ist die Behauptung klar. □

Es ist klar, daß sich aus diesem Lemma die Existenz einer Konstanten t ergibt, so daß (v_1, v_2) oder (v_3, v_4) größer als t ist. Dies Ergebnis, daß auch hinreichend für die weiteren Anwendungen ist, wird auch in [Ni2] bewiesen.

Das Lemma läßt sich leicht auf höhere Dimensionen verallgemeinern. Seien H_1, H_2 und H_3 Hyperebenen im $\mathbb{H}^d$ mit Normalvektoren v_1, v_2 bzw. v_3. Sei weiter vorausgesetzt, daß sich H_1 mit den beiden anderen Hyperebenen mit einem spitzen Winkel schneidet, d.h., daß $-1 < (v_1, v_2) \leq 0$ und $-1 < (v_1, v_3) \leq 0$ ist. Bezeichnen wir mit v_2' und v_3' die auf Länge 1 normierten Orthogonalprojektionen von v_2 und v_3 auf $v_1^\perp$, d.h., wir setzen

$$v_i' = \frac{1}{\sqrt{1-(v_1, v_i)^2}}(v_i - (v_i, v_1)v_1)$$

für $i = 2, 3$. Damit ist

$$(v_2', v_3') = \frac{1}{\sqrt{(1-(v_1,v_2)^2)(1-(v_1,v_3)^2)}}((v_2, v_3) - (v_2, v_1)(v_3, v_1)).$$

Aus dieser Formel folgt

$$(v_2', v_3') \leq (v_2, v_3),$$

also insbesondere $(v_2', v_3') \leq 0$. Nehmen wir nun an, daß H_1, H_2 und H_3 keinen Fehlschnitt der Ordnung 3 beschreiben, d.h., daß entweder $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \neq \emptyset$ oder $H_2 \cap H_3 = \emptyset$ ist. Wir haben dann:

$$\mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2 + \mathbb{R}v_3 \text{ positiv definit } \Leftrightarrow \mathbb{R}v_2 + \mathbb{R}v_3 \text{ positiv definit.}$$

Da sich die Signatur bei der Orthogonalprojektion nicht ändert, gilt unter diesen Voraussetzungen also

$$(v_2, v_3) > -1 \Leftrightarrow (v_2', v_3') > -1.$$

Seien nun allgemein die $v_1, \ldots, v_l, \ldots, v_k$ die Normalvektoren eines spitzwinkligen, 3-freien Polyeders $P = \bigcap_{i \in \{1,\ldots,k\}} H_i^-$ mit $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ für i oder j aus $\{1, \ldots, l\}$ (d.h., sämtliche Fehlschnitte befinden sich in der Menge $H_{l+1}, \ldots, H_k$). Bezeichne $v'_{l+1}, \ldots, v'_k$ die zu $\ll v_1, \ldots, v_l \gg := \mathbb{R}v_1 + \ldots \mathbb{R}v_l$ orthonormalisierten Vektoren. Dann beschreiben die $v'_{l+1}, \ldots v'_k$ wiederum ein 3-freies Polyeder und aus der obigen Rechnung folgt induktiv:

Lemma 6.15 *Für $i, j \in \{l+1, \ldots, k\}$ ist*

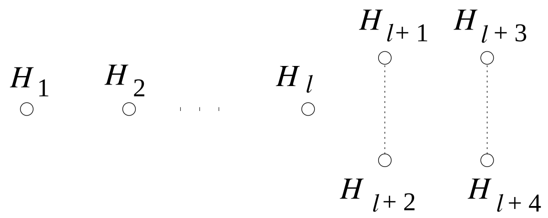
(i) $(v'_i, v'_j) \leq (v_i, v_j)$ *und*

(ii) $(v'_i, v'_j) > -1 \Leftrightarrow (v_i, v_j) > -1$.

(Die geometrische Interpretation der Aussage (ii) ist uns bereits bekannt: Die Fehlschnitte in $P' := P \cap H_1 \cap \ldots \cap H_l$ sind durch genau die Facetten $P' \cap H_i$, $P' \cap H_j$ gegeben, wo H_i, H_j bereits ein Fehlschnitt von P ist (1.8).)

Verallgemeinern wir nun 6.14 auf beliebige Dimensionen:

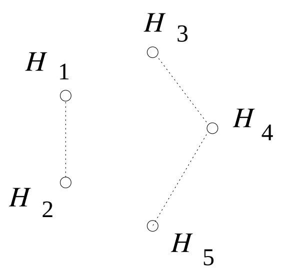
Lemma 6.16 *Seien $H_1, \ldots, H_l, \ldots H_{l+4}$ Hyperebenen, die ein spitzwinkliges, 3-freies Polyeder P im $\mathbb{H}^{l+2}$ mit folgendem Fehlschnitt-Diagramm beschreiben:*



Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante $K < 0$, so daß für jedes solche P mit $(v_1, v_2) < K$ gilt $(v_3, v_4) > -1 - \varepsilon$.

Beweis: Seien $v'_{l+1}, \ldots, v'_{l+4}$ die zu $\ll v_1, \ldots, v_l \gg$ orthonormalisierten Vektoren. Sie sind dann die Normalvektoren eines Polyeders, wie es in der Behauptung von 6.14 beschrieben wird. Bezeichne K die Konstante aus diesem Lemma. Mit $(v_1, v_2) < K$ ist auch $(v'_1, v'_2) < K$, also $(v_3, v_4) \geq (v'_3, v'_4) > -1 - \varepsilon$. $\square$

Lemma 6.17 *Seien $H_1, \ldots, H_5$ Hyperebenen im $\mathbb{H}^3$ die ein spitzwinkliges, 3-freies Polyeder P mit folgendem Fehlschnitt-Diagramm beschreiben:*



Es existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Konstante $K < 0$, so daß für jedes solche P mit $(v_4, v_5) > -1 - \varepsilon$ gilt $(v_1, v_2) \geq K$.

Beweis: Sei die Realisierung eines solchen Polyeders mit Normalvektoren $v_1, \ldots, v_5$ und der Gram-Matrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & y & a & d & g \\ y & 1 & b & e & h \\ a & b & 1 & x & c \\ d & e & x & 1 & f \\ g & h & c & f & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Es ist also $y = (v_1, v_2), x = (v_3, v_4)$ und $f = (v_4, v_5)$. Da die Determinante von G gleich 0 ist, ist x für geeignete $B, C, \ldots, I$ eine Lösung der Gleichung

$$(y^2 + By + C)x^2 + (Dy^2 + Ey + F)x + Gy^2 + Hy + I = 0.$$

Die Werte der Koeffizienten als Funktionen von $a, b, c, d, e, g, h \in (-1, 0]$ und $f \in (-1 - \varepsilon, -1)$ sind offensichtlich beschränkt. Es ist $D = -2fc$ und $G = c^2 + f^2 - 1$. Setzen wir $Q(y) = y^2 + By + C,\ P(y) = Dy^2 + Ey + F$ und $R(y) = Gy^2 + Hy + I$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

$$x \geq \frac{-P(y)}{2Q(y)} - \sqrt{\frac{P(y)^2}{4Q(y)^2} - \frac{R(y)}{Q(y)}}.$$

(Es ist $Q(y) = \det\langle v_1, v_2, v_5\rangle$; da $\langle v_2, v_5\rangle$ sphärisch und $\langle v_1, v_2\rangle$ hyperbolisch ist, nimmt $Q(y)$ nicht den Wert 0 an. Weiter ist die Wurzel reell, da G nach Voraussetzung ein existierendes Polyeder beschreibt.) Nach 6.13 existiert zu jedem $\varepsilon' > 0$ eine Konstante K, so daß aus $y < K$ folgt

$$-fc - \varepsilon' \leq \frac{P(y)}{2Q(y)} \leq -fc + \varepsilon'$$

und

$$\frac{R(y)}{Q(y)} \geq (c^2 + f^2 - 1) - \varepsilon'.$$

Wegen $f, c \leq 0$ ist

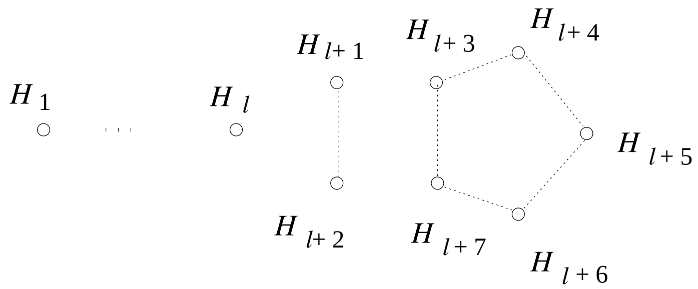
$$\frac{P(y)^2}{4Q(y)^2} \leq (fc + \varepsilon')^2,$$

also

$$x \geq -(-fc + \varepsilon') - \sqrt{(fc + \varepsilon')^2 - (c^2 + f^2 - 1) + \varepsilon'}.$$

Für ε' hinreichend klein ist dieser Term aber größer als -1, d.h. $y < K$ führt zu einem Widerspruch. $\square$

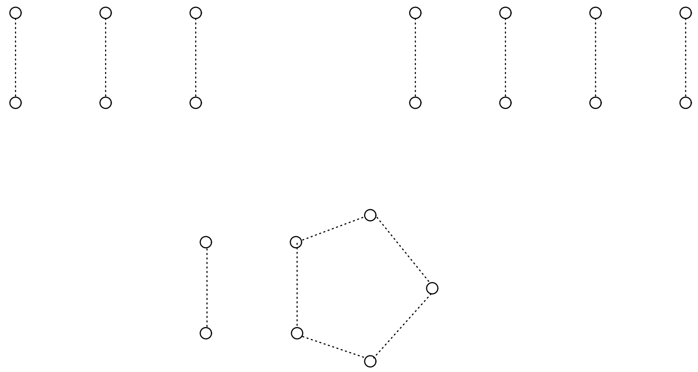
Lemma 6.18 *Seien $H_1, \ldots, H_l, H_{l+1}, \ldots, H_{l+7}$ Hyperebenen im $\mathbb{H}^{l+3}$, die ein spitzwinkliges Polyeder P mit folgendem Fehlschnitt-Diagramm beschreiben:*



Dann gibt es eine Konstante K, so daß für jedes solche P gilt $(v_{l+1}, v_{l+2}) \geq K$.

Beweis: Seien $v'_{l+1}, \ldots, v'_{l+7}$ die zu $\ll v_1, \ldots, v_l \gg$ orthonormalisierten Vektoren, und seien ε und K' wie in 6.17 angewandt auf das Polyeder, daß durch $v'_{l+1}, v'_{l+2}, v'_{l+4}, v'_{l+5}$ und v'_{l+6} bestimmt wird. Zu diesem ε existiert nach 6.16 ein K'', so daß aus $(v'_{l+1}, v'_{l+2}) < K''$ folgt: $(v'_{l+4}, v'_{l+5}) > -1 - \varepsilon$. Somit ist $(v'_{l+1}, v'_{l+2}) \geq \min\{K', K''\}$ und nach 6.15 gilt dies auch für (v_{l+1}, v_{l+2}). $\square$

Zum Beweis von Theorem 6.1: Nach den eingangs bewiesenen Klassifikationsresultaten, haben wir für den Beweis von Theorem 6.1 nur noch zu zeigen, daß die Polytope mit den Fehlschnitt-Diagrammen



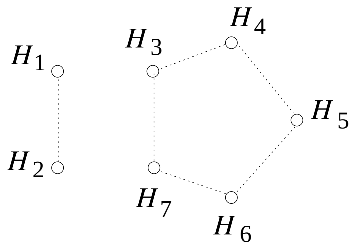
nur als arithmetische Coxeter-Polytope mit Grundkörpern beschränkten Grades zu realisieren sind.

Sei $P = \bigcap_{i=1}^{6} H_i^- \subseteq \mathbb{H}^3$ ein Würfel, wo die Fehlschnitte genau durch die Paare $\{H_1, H_2\}, \{H_3, H_4\}$ und $\{H_5, H_6\}$ gegeben sind. Aus 6.16 folgt die Existenz einer Konstanten t, so daß für jede Realisierung o.B.d.A. $(v_1, v_2) > t$ ist. Für jede Kante $H_i \cap H_j$ mit $i \in \{3, 4\}$ und $j \in \{5, 6\}$ ist also 6.12 anwendbar, d.h., für solche P mit einem Grundkörper vom Grad größer als $N(t)$ enthält die Zusammenhangskomponente des

Coxeter-Graphen $\langle v_1, v_2, v_i, v_j \rangle$, die v_1 und v_2 enthält, höchstens 3 Ecken. Andererseits sind in einem solchen Coxeter-Graphen alle Lannér-Diagramme der Ordnung 2 durch eine Kante mit Vielfachheit größer als 0 verbunden. Ein Graph, der beide Bedingungen erfüllt existiert offenbar nicht. Es gibt also keine arithmetischen Coxeter-Polytope P mit Grundkörpern vom Grad größer als $N(t)$, die ein Würfel im $\mathbb{H}^3$ sind.

Der Beweis der Behauptung für den Würfel im $\mathbb{H}^4$ unterscheidet sich von dem vorangegangenen nur in den Bezeichnungen.

Sei $P = \bigcap_{i=1}^{7} H_i^-$ ein hyperbolisches, arithmetisches Coxeter-Polytop mit Fehlschnitt-Diagramm:



Nach 6.18 gibt es ein K, so daß für jedes solche P gilt: $(v_1, v_2) \geq K$. Für jedes Paar H_i, H_j mit $i, j \in \{3, \ldots, 7\}$ und $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ ist 6.12 anwendbar, d.h., für jedes solche Polytop mit einem Grundkörper F vom Grad größer als $N(K)$ enthält die Zusammenhangskomponente des Coxeter-Graphen $\langle v_1, v_2, v_i, v_j \rangle$, die v_1 und v_2 enthält, höchstens 3 Ecken. In diesem Fall ist es offensichtlich nicht möglich, alle Lannér-Diagramme durch eine Kante der Vielfachheit größer 0 zu verbinden. Es existieren also keine arithmetischen Coxeter-Polytope dieser Kombinatorik im $\mathbb{H}^3$, deren Grundkörper vom Grad größer als $N(K)$ ist.

Theorem 6.1 ist also bewiesen.

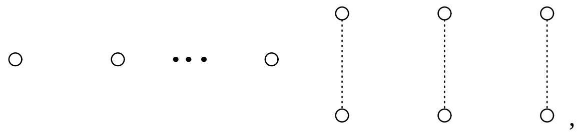
Zum Beweis von Theorem 6.2: Im wesentlichen haben wir dafür nur noch folgendes Ergebnis von Nikulin zu zitieren:

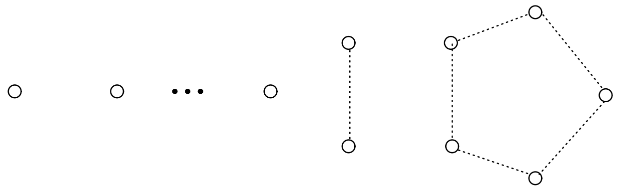
Lemma 6.19 *([Ni2], Th. 3.2.1, Cor. 3.2.3) Sei P ein einfaches d-Polytop mit $d \geq 5$. Dann gibt es eine 3-dimensionale Seite von P, die weniger als*

$$\frac{\binom{d-2}{d-3} \cdot \left(\binom{\lfloor d/2 \rfloor}{2} + \binom{d - \lfloor d/2 \rfloor}{2} \right)}{\binom{\lfloor d/2 \rfloor}{3} + \binom{d - \lfloor d/2 \rfloor}{3}}$$

2-dimensionale Seiten besitzt.

Für $d \geq 9$ hat P also eine 3-dimensionale Seite mit höchstens 7 Seiten der Dimension 2. Da wir uns beim Beweis von Theorem 6.2 wiederum auf 3-freie Polytope beschränken können, wissen wir aufgrund der Klassifikationsresultate 6.8, 6.9 und von 1.8, daß das Fehlschnitt-Diagramm von P eines der Teildiagramme

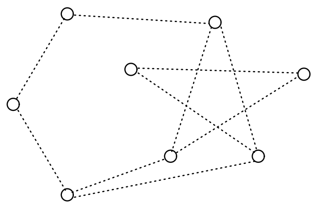




enthält. Wie im Beweis von Theorem 6.1 folgt, daß der Grad des Grundkörpers eines arithmetischen Coxeter-Polytops mit dem obigen Fehlschnitt-Diagramm beschränkt ist. Insbesondere ist damit Theorem 6.2 bewiesen.

Zum Abschluß möchten wir darauf hinweisen, wie mit diesem Ansatz möglicherweise weitere Verbesserungen der Dimensionsschranke aus 6.2 zu erreichen sind.

Nach 6.10 gibt es genau das eine einfache, 3-freie 3-Polytop mit 8 Seiten



für das 6.11 und 6.12 nicht eine Schranke für den Grad des Grundkörpers liefern. Der Beweis einer solchen Schranke würde vermöge 6.19 zu einer Erweiterung der Aussage von 6.2 auf die hyperbolischen Räume der Dimensionen 7 und 8 führen.

Lemma 6.19 besitzt ein Analogon für höher dimensionale Seiten ([Ni2], Th. 3.2.1). Insbesondere folgt damit, daß jedes einfache Polytop im $\mathbb{H}^d, d \geq 7$ eine 4-dimensionale Seite mit nicht mehr als 18 Seiten der Dimension 3 enthält. Würden 6.11 und 6.12 für diese 4-Polytope eine Schranke für den Grad des Grundkörpers liefern, so erhielte man ebenfalls eine Verbesserung der Dimensionsschranke in 6.2 um 2.

7 Beispiele quadratischer Grundkörper

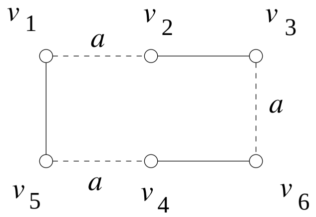
Sicher empfehlen sich arithmetische Spiegelungsgruppen für einen Zugang, der die zusätzliche Struktur der Gitter, in deren orthogonaler Gruppe sie liegen, ausnutzt. Ein solcher Zugang besteht z.B. in dem Vinberg-Algorithmus, der zu einem gegebenen Gitter sukzessive so ausgewählte Spiegelungen aus der orthogonalen Gruppe berechnet, daß die zugehörigen invarianten Hyperebenen ein Fundamentalpolytop beranden. Es existiert aber kein allgemeines Kriterium, das zu einem gegebenen Gitter die Frage beantwortet, ob der Fundamentalbereich der Spiegelungsgruppe von endlichem Volumen ist. Schon gar nicht lassen sich vorab andere als heuristische Aussagen über die Komplexität des Fundamentalbereichs machen. Dies macht Berechnungen insbesondere über echten Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ schwer durchführbar. Gehen wir bei der Suche nach arithmetischen Spiegelungsgruppen umgekehrt von Polytopen geringer Komplexität aus, so lassen sich die nötigen Rechnungen sehr vereinfachen.

Die Beispiele, die wir in diesem Abschnitt berechnen werden, sind arithmetische Coxeter-Polytope im $\mathbb{H}^3$ mit Grundkörpern $\mathbb{Q}(\sqrt{13}), \mathbb{Q}(\sqrt{17})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{21})$. In jedem der Fälle ist ihr kombinatorischer Typ ein Würfel. Mit Hilfe eines Rechners lassen sich zahlreiche weitere arithmetische Würfel über diesen Zahlkörpern berechnen.

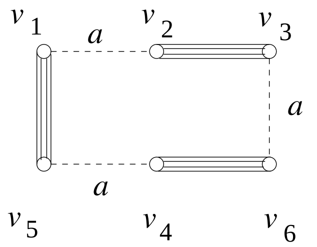
Wie wir im vorangegangenen Abschnitt gesehen haben, wird der Grundkörper eines arithmetischen Coxeter-Polytops von der Determinante jedes Lannér-Diagramms erzeugt, das in seinem Coxeter-Diagramm vorkommt. Somit kann nur ein 3-freies Polytop einen Grundkörper haben, der nicht in der bekannten Liste der Grundkörper arithmetischer Coxeter-Simplizes enthalten ist. Unseres Wissens nach handelt es sich bei den obigen Zahlkörpern um die ersten Beispiele dieser Art.

Satz 7.1 *Die folgenden Coxeter-Diagramme beschreiben arithmetische, hyperbolische Coxeter-Polytope:*

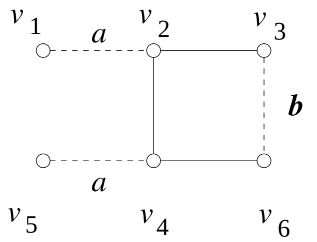
1)



$a = \frac{1+\sqrt{13}}{4}$

2) 

$a = \sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{8}}$

3) 

$a = \sqrt{\frac{7+\sqrt{17}}{8}}, \quad b = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$

Beweis: In allen Fällen ist das Coxeter-Diagramm $\langle v_2, v_3, v_4\rangle$ ein sphärisches Diagramm und $\langle v_1, v_2\rangle$ ein Lannér-Diagramm. Die Matrix von $\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$ hat also die Signatur $(3,1)$. Bezeichne $v_1^*, v_2^*, v_3^*, v_4^*$ die duale Basis, und setzen wir für

Beispiel 1): $v_5 = \frac{-1}{2}v_1^* - av_4^*$, $\quad v_6 = -av_3^* - \frac{1}{2}v_4^*$,

Beispiel 2): $v_5 = \frac{-\sqrt{3}}{2}v_1^* - av_4^*$, $\quad v_6 = -av_3^* - \frac{\sqrt{3}}{2}v_4^*$,

Beispiel 3): $v_5 = -av_4^*$, $\quad v_6 = -bv_3^* - \frac{1}{2}v_4^*$.

Dabei bezeichnen a und b die in den jeweiligen Diagrammen angegebenen Werte.

Man rechnet leicht nach, daß die Gram-Matrix von $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\rangle$ in allen Fällen das entsprechende obige Coxeter-Diagramm beschreibt. Die Vektoren sind also die Normalvektoren eines Coxeter-Polyeders mit endlichem Volumen.

Wir haben nur noch die Bedingungen von 2.7 nachzuprüfen. Sei $G = (g_{i,j})_{i,j\in\{1,\ldots,6\}}$ die Gram-Matrix von $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\rangle$. Offensichtlich ist $\tilde{F} = \mathbb{Q}(\{g_{i,j}\})$ totalreell und $2g_{i,j}$ ist für alle $i,j \in \{1,\ldots,6\}$ ganz. Für die Signaturbedingung genügt es nachzurechnen, daß ${}^\sigma(g_{i,j})_{i,j\in\{1,\ldots,4\}}$ positiv definit für jedes $\sigma : \tilde{F} \hookrightarrow \mathbb{R}, \sigma_{|F} \neq id$ ist. Da die Matrizen ${}^\sigma(g_{i,j})_{i,j\in\{2,3,4\}}$ offensichtlich positiv definit sind, folgt die Behauptung aus der Berechnung der Determinanten von ${}^\sigma(g_{i,j})_{i,j\in\{1,\ldots,4\}}$:

Beispiel 1): $-\sigma(\frac{7+\sqrt{13}}{8}) + \frac{3}{4}$,

Beispiel 2): $-\sigma(\frac{5+\sqrt{21}}{8}) + \frac{1}{4}$,

Beispiel 3): $-\sigma(\frac{7+\sqrt{17}}{8}) + \frac{1}{2}$.

In der Tat sind alle Werte größer als 0. $\square$

Literatur

[A-P] A. Altshuler, M.A. Perles: Quotient Polytopes of Cyclic Polytopes, Part I: Structure and Characterization.
Israel J. Math. 36 (1980), 97-125.

[An] E.M. Andreev: On Convex Polyhedra in Lobacevskii Spaces.
Math. USSR Sbornik 10 (1970), 413-440.

[Bou] N. Bourbaki: *Groupes et Algèbres de Lie.*
Chap. IV, V und VI. Hermann, Paris 1968.

[Br] A. Brøndsted: *An Introduction to Convex Polytops.*
Springer-Verlag New York, 1983.

[Bu1] V.O. Bugaenko: Groups of Automorphisms of Unimodular Hyperbolic Quadratic Forms over the Ring $\mathbb{Z}[\frac{\sqrt{5}+1}{2}]$.
Moscow Univ. Math. Bull. 39 (1984), 6-14.

[Bu2] V.O. Bugaenko: On Reflective Unimodular Hyperbolic Quadratic Forms.
Selecta Mathematica Sovietica 9 (1990), 263-271.

[Bu3] V.O. Bugaenko: Arithmetic Crystallographic Groups Generated by Reflections, and Reflective Hyperbolic Lattices.
Advances in Soviet Mathematics 8 (1992), 33-55.

[Gr] B. Grünbaum: *Convex Polytops.*
John Wiley & Sons, 1967.

[ImH] H.-C. Im Hof: Napier Cycles and Hyperbolic Coxeter Groups.
Bull. Soc. Math. de Belg. Série A (1990), 523-545.

[Ka] I.M. Kaplinskaya: Discrete Groups Generated by Reflections in the Faces of Simplicial Prisms in Lobachevskian Spaces.
Math. Notes 15 (1974), 88-91.

[La] F. Lannér: On complexes with transitiv groups of automorphisms.
Comm. Sem. Math. Univ. Lund 11 (1950), 1-71.

[Ni1] V.V. Nikulin: On Arithmetic Groups Generated by Reflections in Lobachevsky Spaces.
Math. USSR Izvestija 16 (1981), 573-601.

[Ni2] V.V. Nikulin: On the Classification of Arithmetic Groups Generated by Reflections in Lobachevsky Spaces.
Math. USSR Izvestija 18 (1982), 99-123.

[Ni3] V.V. Nikulin: A Remark on the Classification of Arithmetic Groups Generated by Reflections in Lobachevsky Spaces.
Manuskript, MPI für Mathematik, Dezember 1990.

[Po] H. Poincaré: Théorie des Groupes Fuchsiennes.
Acta Math. 1 (1882), 1-62.

[Sh] I. Shemer: Neighborly Polytopes.
Israel J. Math. 43 (1982), 291-314.

[Ta] K. Takeuchi: Arithmetic triangle groups.
J. Math. Soc. Japan 29 (1977), 91-106.

[Vi1] È.B. Vinberg: Discrete Groups Generated by Reflections in Lobačevskiĭ Spaces.
Math. USSR Sbornik 1 (1967), 429-444.

[Vi2] È.B. Vinberg: The Absence of Crystallographic Groups of Reflections in Lobachevsky Spaces of Large Dimension.
Trans. Moscow Math. Soc. 47 (1985), 75-112.

[Vi3] È.B. Vinberg: Hyperbolic reflection groups.
Russian Math. Surveys 40 (1985), 31-75.

[vD] W. von Dyck: Gruppentheoretische Studien.
Math. Ann. 20 (1882), 1-45.