Weak Sobolev spaces and Markov uniqueness of operators

Andreas Eberle

ABSTRACT. We introduce the notion of a generalized differential on an abstract measure space and construct corresponding strong and weak Sobolev spaces. We show that the validity of a "weak equals strong"–theorem, i. e. the coincidence of the weak and strong Sobolev space, implies Markov uniqueness for the diffusion operator corresponding to the generalized differential. Applications include a necessary and sufficient condition for Markov uniqueness for finite–dimensional, locally strictly elliptic diffusion operators, and an abstract condition for Markov uniqueness for Ornstein–Uhlenbeck operators on path spaces of compact Riemannian manifolds.

Espaces de Sobolev faibles et unicité markovien d'opérateurs de diffusion

RÉSUMÉ. On introduit la notion d'une différentielle généralisée sur un espace mesuré abstrait, et on construit des espaces de Sobolev forts et faibles correspondants. On démontre que la validité d'un théorème "faible = fort", c'est à dire la coïncidence des espaces de Sobolev faible et fort, implique l'unicité markovien de l'opérateur de diffusion associé à la différentielle généralisée. Comme des applications, on obtient une condition nécessaire et suffisante pour l'unicité markovien d'opérateurs de diffusion localement strictement elliptiques en dimension finie, et une condition abstraite pour l'unicité markovien d'opérateur d'Ornstein–Uhlenbeck sur l'espace des chemins d'une variété riemannienne compacte.

VERSION FRANÇAISE ABRÉGÉE. — 1. On fixe un espace mesuré σ–fini $(E, \mathcal{B}, m)$, tel que $L^2(E; m)$ soit séparable, et une algèbre $\mathcal{A}$ de fonctions bornées de carré intégrable sur E, qui engendre $\mathcal{B}$ et qui est dense dans $L^2(E; m)$. Soient $H = (H_z)_{z\in E}$ un champ mesurable d'espaces hilbertiens réels, et $L^2(E, H; m)$ l'intégrale hilbertienne des H_z. Nous noterons $(\bullet, \bullet)_z$ le produit scalaire de H_z.

DÉFINITION. *Un opérateur linéaire* $d : \mathcal{A} \to L^2(E, H; m)$ *s'appelle* **différentielle généralisée par rapport à** $H = (H_z)_{z\in E}$ *si*

(i) $(df, df). \in L^2(E; m)$ *pour tout* $f \in \mathcal{A}$.

(ii) $d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df$ *pour tous* $f, g \in \mathcal{A}$.

(iii) L'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ *engendré par* $\{f\, dg\, ;\ f, g \in \mathcal{A}\}$ *est dense dans* $L^2(E, H; m)$.

(iv) Pour tout $g \in \mathcal{A}$, *il existe une fonction* $u \in L^2(E; m)$ *telle que*

$$\int (df, dg).\, dm = -\int f\, u\, dm \qquad \text{pour tout } f \in \mathcal{A}.$$

Si d est une différentielle généralisée, alors $(d, \mathcal{A})$ est un opérateur fermable de $L^2(E;m)$ dans $L^2(E,H;m)$, $\mathcal{A}$ est contenu dans le domaine du **"laplacien généralisé"** $-d^*d$, et $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ est contenu dans le domaine de l'adjoint d^*. La restriction $(d^*, \mathcal{L}(\mathcal{A}))$ est un opérateur densement défini de $L^2(E,H;m)$ dans $L^2(E;m)$. Soient $(d, H_0^{1,2}(d))$ la fermeture de $(d,\mathcal{A})$, et $(\hat{d}, W^{1,2}(d))$ l'adjoint de $(d^*, \mathcal{L}(\mathcal{A}))$.

DÉFINITION. *Les espaces* $H_0^{1,2}(d)$ *et* $W^{1,2}(d)$ *sont appelés* **espace de Sobolev fort** *resp.* **faible** *par rapport à* d.

L'opérateur $(\hat{d}, W^{1,2}(d))$ prolongue $(d, H_0^{1,2}(d))$. Les espaces $H_0^{1,2}(d)$ et $W^{1,2}(d)$, munis du produit scalaire $(u,v)_{1,2,d} := \int (uv + (\hat{d}u, \hat{d}v).)\, dm$, sont des espaces hilbertiens.

2. Soit $L : \mathcal{A} \to L^2(E;m)$ un opérateur linéaire symétrique négatif sur $L^2(E;m)$, tel que $Lf \in L^1(E;m)$ et $\int Lf\, dm = 0$ pour tout $f \in \mathcal{A}$. Nous supposerons que L possède **la propriété de diffusion**, c'est–à–dire le **carré du champ** $\Gamma(f,g) := (\ L(fg) - f\,Lg - g\,Lf\ )/2\ \ (f,g \in \mathcal{A})$ est une dérivation de chacun de ses arguments. Alors on peut montrer qu' il existe un champ mesurable d'espaces hilbertiens $(H_z)_{z\in E}$ et une différentielle généralisée $d : \mathcal{A} \to L^2(E,H;m)$ tels que $Lf = -d^*df$ pour tout $f \in \mathcal{A}$. Bien qu'il y ait plusieurs telles différentielles généralisées, les espaces $H_0^{1,2}(d)$ et $W^{1,2}(d)$, et les produits scalaires $(\bullet,\bullet)_{1,2,d}$ sont toujours les mêmes, v. 2.1. On fixe une telle différentielle d.

Soit $(L^0, D(L^0))$ l'extension de Friedrichs de l'opérateur $(L,\mathcal{A})$. On peut déduire de la propriété de diffusion pour L que le semi–groupe $(\exp(tL^0))_{t\ge 0}$ est **sous–markovien**, c.à.d. $0 \le \exp(tL^0)u \le 1$ pour tous $t \ge 0$ et $u \in L^2(E;m)$ tel que $0 \le u \le 1$.

THÉORÈME. *Soit* $(L, D(L))$ *une extension autoadjointe négative de* $(L,\mathcal{A})$, *qui est le générateur d'un semi–groupe sous–markovien, et soit* $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ *la forme bilinéaire fermée associée. Alors on a* $H_0^{1,2}(d) \subset D(\mathcal{E}) \subset W^{1,2}(d)$, $\mathcal{E}(u,u) = \int (du,du).\, dm$ *pour tout* $u \in H_0^{1,2}(d)$, *et* $\mathcal{E}(u,u) \ge \int (\hat{d}u, \hat{d}u).\, dm$ *pour tout* $u \in D(\mathcal{E})$.

COROLLAIRE. *Si* $H_0^{1,2}(d) = W^{1,2}(d)$, *alors* $(L,\mathcal{A})$ *est* **Markov–unique**, *i.e.* $(L^0, D(L^0))$ *est la seule extension autoadjointe négative de* $(L,\mathcal{A})$ *qui est le générateur d'un semi–groupe sous–markovien.*

3. Nous considérons trois applications: a) Soient E un ensemble ouvert dans $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{A} := C_0^\infty(E)$, $\varphi \in H^{1,2}_{loc}(E;dx)$ tel que $\varphi > 0$ p.p., $m := \varphi^2 dx$, et $a^{ij} \in H^{1,2}_{loc}(E;m) \cap L^\infty_{loc}(E;dx)$ $(1 \le i,j \le n)$ tels que $(a^{ij})_{i,j=1}^n$ soit symétrique et localement strictement elliptique (v. (3.1)). Si H_z est le co–espace tangent $T_z^*E \cong \mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire $(a^{ij}(z))_{i,j}$, alors la différentielle ordinaire d est une différentielle généralisée par rapport au champ mesurable $H = (H_z)_{z\in E}$. Le laplacien généralisé correspondant est donné par (3.2). On donne une description explicite de l'espace de Sobolev faible $W^{1,2}(d)$ et on montre que

$C^\infty(E) \cap W^{1,2}(d)$ est dense dans $W^{1,2}(d)$, v. 3.1 (i), (ii). On démontre qu'une condition de V. G. Maz'ja est nécessaire et suffisante pour que $W^{1,2}(d) = H_0^{1,2}(d)$, et pour que $(-d^*d, C_0^\infty(E))$ soit Markov-unique (v. 3.1 (iii)). En particulier, $(-d^*d, C_0^\infty(E))$ est toujours Markov-unique, si E est connexe, a^{ij} est borné pour tout $1 \leq i, j \leq n$, et E est complet par rapport à la distance intrinsèque associé à la différentielle généralisée d (v. 3.1 (iv)).

b) On donne une condition suffisante pour l'unicité markovien d'un opérateur de diffusion strictement elliptique sur un espace de Wiener.

c) Le gradient D sur l'espace des chemins $P(M)$ d'une variété riemannienne compacte connexe M, défini sur les fonctions cylindriques régulières, est une différentielle généralisée par rapport au champ mesurable $H = T(P(M))$. Ici, $T_p(P(M))$ $(p \in P(M))$ est l'espace tangent, v. e.g. [3]. Donc on peut construire un espace de Sobolev faible sur $P(M)$ et employer le théorème ci–haut. C'est un premier pas en voie d'une preuve de l'unicité markovien pour l'opérateur d'Ornstein–Uhlenbeck sur $P(M)$.

1. GENERALIZED DIFFERENTIALS AND CORRESPONDING WEAK DERIVATIVES — Fix a σ–finite measure space $(E, \mathcal{B}, m)$ such that $L^2(E; m)$ is separable, and an algebra $\mathcal{A}$ of bounded square–integrable functions on E, which generates $\mathcal{B}$ and is dense in $L^2(E; m)$. Let $H = (H_z)_{z \in E}$ be a measurable field of Hilbert spaces on E (cf. [4], II.1), which should be thought of as a generalized "cotangent bundle" to E. The inner product in H_z is denoted by $(\bullet, \bullet)_z$. We call a measurable vector field w.r.t. H a **section** of H. The direct integral of $H = (H_z)_{z \in E}$, i.e. the Hilbert space consisting of all (classes of) m–square integrable sections of H, is denoted by $L^2(E, H; m)$.

1.1. DEFINITION. *We call a linear operator* $d : \mathcal{A} \to L^2(E, H; m)$ **generalized differential w.r.t.** $H = (H_z)_{z \in E}$ *if and only if*

(i) $(df, df)_\cdot \in L^2(E, m)$ *for all* $f \in \mathcal{A}$.

(ii) $d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df$ *for all* $f, g \in \mathcal{A}$.

(iii) The linear space $\mathcal{L}(\mathcal{A}) := \operatorname{span}\{ f\, dg;\ f, g \in \mathcal{A}\}$ *is dense in* $L^2(E, H; m)$.

(iv) For any $g \in \mathcal{A}$, *there is a function* $u \in L^2(E; m)$ *such that*

$$\int (df, dg)_\cdot \, dm = - \int f\, u \, dm \qquad \text{for all } f \in \mathcal{A}.$$

1.2. REMARKS. (i) Condition 1.1 (iv) means that $\mathcal{A}$ is in the domain of the "**generalized Laplacian**" $-d^*d$, where d^* is the adjoint of the densely defined operator d from $L^2(E; m)$ to $L^2(E, H; m)$. 1.1 (iv) implies in particular, that d is a closable operator.
(ii) By combining 1.1 (i), (ii) and (iv), one obtains that $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ is in the domain of d^*.

In Section 3, we consider various examples of generalized differentials.

If d is a generalized differential w.r.t. $H = (H_z)_{z\in E}$, then $(d^*, \mathcal{L}(\mathcal{A}))$ is a densely defined linear operator from $L^2(E, H; m)$ to $L^2(E; m)$. We denote the closure of $(d, \mathcal{A})$ by $(d, H_0^{1,2}(d))$, and the adjoint of $(d^*, \mathcal{L}(\mathcal{A}))$ by $(\hat{d}, W^{1,2}(d))$. The functions u in $W^{1,2}(d)$ are weakly differentiable in the sense that $\int u\, d^*\omega\, dm = \int (\hat{d}u, \omega).\, dm$ for any $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. The operator $(\hat{d}, W^{1,2}(d))$ is an extension of $(d, H_0^{1,2}(d))$. Both $W^{1,2}(d)$ and $H_0^{1,2}(d)$ are Hilbert spaces w.r.t. the inner product $(u,v)_{1,2,d} := \int (uv + (\hat{d}u, \hat{d}v).)\, dm$.

1.3. DEFINITION. *The spaces $W^{1,2}(d)$ resp. $H_0^{1,2}(d)$ are called weak resp. strong Sobolev space w.r.t. d.*

2. MARKOV UNIQUENESS OF DIFFUSION OPERATORS — Fix $(E, \mathcal{B}, m)$ and $\mathcal{A}$ as before, and let L be a negative definite symmetric linear operator on $L^2(E; m)$ with domain $\mathcal{A}$. Suppose that m is an invariant measure for L, i.e. $Lf \in L^1(E; m)$ and $\int Lf\, dm = 0$ for all $f \in \mathcal{A}$. Moreover, we assume that L is of **diffusion type**, i.e. the corresponding carré du champ operator $\Gamma(f,g) := (\, L(fg) - f\,Lg - g\,Lf\,)/2$ $(f, g \in \mathcal{A})$ satisfies the product rule $\Gamma(fg, h) = f\,\Gamma(g,h) + g\,\Gamma(f,h)$ for all $f, g, h \in \mathcal{A}$. Then, there is a measurable field of Hilbert spaces $H = (H_z)_{z\in E}$ on E, and a generalized differential $d : \mathcal{A} \to L^2(E, H; m)$ such that $\Gamma(f,g) = (df, dg).$ m-a.e. for all $f, g \in \mathcal{A}$ (cf. [2], V, Exercise 5.9, for a related result). Any such differential d satisfies

$$(2.1) \qquad Lf = -d^* df \qquad \text{for all } f \in \mathcal{A}.$$

Actually, there are many generalized differentials satisfying (2.1). However, the corresponding weak and strong Sobolev spaces are "intrinsically" related to L:

2.1. PROPOSITION. *The Sobolev spaces $W^{1,2}(d)$ and $H_0^{1,2}(d)$, and the inner product $(\bullet, \bullet)_{1,2,d}$ are independent of the choice of a measurable field of Hilbert spaces $H = (H_z)_{z\in E}$ and a generalized differential $d : \mathcal{A} \to L^2(E, H; m)$ satisfying (2.1).*

Let $(L^0, D(L^0))$ be the Friedrichs extension (cf. [7], Sect. 3.3) of $(L, \mathcal{A})$. The operator $(L^0, D(L^0))$ is negative definite and self–adjoint. It can be deduced from the product rule for Γ, that the semigroup $(\exp(tL^0))_{t\geq 0}$ is **sub–Markovian**, i.e. $0 \leq \exp(tL^0)u \leq 1$ for all $t \geq 0$ and all $u \in L^2(E; m)$ such that $0 \leq u \leq 1$; s. e.g. [10]. Let d be a generalized differential satisfying (2.1). We now state our first main result:

2.2. THEOREM. *Let $(L, D(L))$ be a negative definite self–adjoint operator extending $(L, \mathcal{A})$, which generates a sub–Markovian semigroup, and let $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ be the associated closed form (cf. [7]). Then $H_0^{1,2}(d) \subset D(\mathcal{E}) \subset W^{1,2}(d)$, $\mathcal{E}(u,u) = \int (du, du).\, dm$ for all $u \in H_0^{1,2}(d)$, and $\mathcal{E}(u,u) \geq \int (\hat{d}u, \hat{d}u).\, dm$ for all $u \in D(\mathcal{E})$.*

2.3. COROLLARY. *If $H_0^{1,2}(d) = W^{1,2}(d)$, then $(L, \mathcal{A})$ is* **Markov–unique**, *i.e.*

$(L^0, D(L^0))$ is the only negative definite self–adjoint operator extending $(L, \mathcal{A})$, which generates a sub–Markovian semigroup.

2.4. REMARKS. (i) For the generators of classical Dirichlet forms (cf. [1]) on infinite dimensional topological vector spaces, 2.2 has been proved by S. Albeverio, S. Kusuoka and M. Röckner [1]. They call it the *"solution of the maximality problem"*.

(ii) The generator $(\hat{L}, D(\hat{L}))$ of the closed form $(\hat{\mathcal{E}}, W^{1,2}(d))$, $\hat{\mathcal{E}}(u,v) := \int (\hat{d}u, \hat{d}v).\, dm$, itself, is a negative definite self–adjoint extension of $(L, \mathcal{A})$. In general, however, it is not clear if the semigroup $(\exp(t\hat{L}))_{t\geq 0}$ is sub–Markovian.

3. APPLICATIONS — a) Let E be an open subset of $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{B}$ its Borel σ–algebra, dx Lebesgue measure on E, and $\mathcal{A} := C_0^\infty(E)$. We fix a function $\varphi \in H^{1,2}_{loc}(E; dx)$, $\varphi > 0$ dx-a.e., and set $m := \varphi^2 dx$. Let $H^{1,2}_{loc}(E;m)$ be the local Sobolev space corresponding to the weighted Sobolev space (cf. [9]) $H_0^{1,2}(E;m)$. We fix functions $a^{ij} \in H^{1,2}_{loc}(E;m) \cap L^\infty_{loc}(E;dx)$ $(1 \leq i,j \leq n)$ such that $a^{ij} = a^{ji}$ for all $1 \leq i,j \leq n$. Suppose that for any compact subset $K \subset E$ there is a constant $c_K > 0$ such that

$$(3.1) \qquad \sum_{i,j} a^{ij}(z)\, \xi_i\, \xi_j \geq c_K \cdot |\xi|^2 \quad \text{for all } \xi \in \mathbf{R}^n \text{ and } dx\text{–a.e. } z \in K.$$

For $z \in E$, let H_z be the co–tangent space $T_z^* E \cong \mathbf{R}^n$ equipped with the inner product $(\omega, \sigma)_z = \sum a^{ij}(z) \omega_i \sigma_j$. Then $H = (H_z)_{z\in E}$ is a measurable field of Hilbert spaces, and the ordinary differential d, considered as a linear operator from $\mathcal{A}$ to $L^2(E, H; m)$, is a generalized differential w.r.t. H. For $f \in \mathcal{A}$ we have

$$(3.2) \qquad -\, d^* df \;=\; \sum \Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big(a^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\Big) + \beta_i a^{ij}\,\frac{\partial f}{\partial x^j}\Big), \quad \text{where } \beta_i = 2\varphi^{-1}\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}.$$

3.1. THEOREM. *Let $\Gamma(u) := \sum a^{ij}(\partial u/\partial x^i) \cdot (\partial u/\partial x^j)$. Then we have:*

(i) $W^{1,2}(d) = \{u \in H^{1,2}_{loc}(E;m);\ \int (u^2 + \Gamma(u))\, dm < \infty\}$.

(ii) $C^\infty(E) \cap W^{1,2}(d)$ *is dense in* $W^{1,2}(d)$.

(iii) The following assertions are equivalent:

- $(-d^*d, C_0^\infty(E))$ *is Markov–unique.*
- $W^{1,2}(d) = H_0^{1,2}(d)$.
- *For any domain $G \subset E$ of finite $W^{1,2}(d)$–capacity there is a sequence $f_k \in C_0^\infty(E)$ $(k \in \mathbf{N})$ such that $f_k \to 1$ in m–measure on G and $\int_G \Gamma(f_k)\, dm \to 0$.*

Here a domain $G \subset E$ is said to be **of finite** $W^{1,2}(d)$**–capacity**, *if and only if there is a function $u \in W^{1,2}(d)$, such that $u \geq 1$ m–a.e. on G.*

(iv) Suppose E is connected and $a^{ij} \in L^\infty(E;dx)$ for all $1 \leq i,j \leq n$. Then $\rho(x,y) := \sup\{f(x) - f(y);\ f \in C_0^\infty(E) \text{ s.t. } \Gamma(f) \leq 1\}$ $(x, y \in E)$ is a metric on E. If (E, ρ) is complete, then the assertions in (iii) hold.

3.2. REMARKS. (i) The last condition in 3.1 (iii) is due to V. G. Maz'ja. For φ, $a^{ij} \in C^\infty(E)$, 3.1 (i)–(iii) have been proved in [7], Sect. 3.3. In the case $a^{ij} = \delta^{ij}$ and $E = \mathbf{R}^n$, it has already been proved in [9], that the first two assertions in 3.1 (iii) hold.

(ii) If the a^{ij} are smooth, then ρ is the distance–function of the Riemannian manifold (E, g), where $(g_{ij}) = (a^{ij})^{-1}$. Hence 3.1 (iv) can be regarded as a non–smooth counterpart to the classical result (cf. [8]), that for complete Riemannian manifolds E there is only one self–adjoint extension of the Laplace–Beltrami operator with domain $C_0^\infty(E)$.

b) Let $(E, \tilde{H}, m)$ be an abstract Wiener space (cf. [2], II.3) and $(D, \mathcal{D}^{1,2})$ the corresponding Malliavin gradient. We fix an orthonormal base $\{e_i\,;\, i \in \mathbf{N}\}$ of $\tilde{H}$ such that $(e_i, \bullet)_{\tilde{H}}$ extends to a continuous linear functional ℓ_i on E for any $i \in \mathbf{N}$. Suppose A is a map from E to the symmetric bounded linear operators on $\tilde{H}$ such that $\varepsilon \leq A(z) \leq \varepsilon^{-1}\ \forall\, z \in E$ for some $\varepsilon > 0$. For $i, j \in \mathbf{N}$ and $z \in E$ let $a^{ij}(z) := (e_i, A(z)e_j)_{\tilde{H}}$. We assume that a^{ij} is in $\mathcal{D}^{1,2}$ and $A(\cdot)e_i$ is in the domain of the adjoint δ of $(D, \mathcal{D}^{1,2})$ for any $i, j \in \mathbf{N}$. For $n \in \mathbf{N}$ let P_n be the orthogonal projection in $\tilde{H}$ onto $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$.

3.3. THEOREM. *Suppose there is $n_0 \in \mathbf{N}$ such that a^{ij} is measurable w.r.t. the σ–algebra generated by $\{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$ for all $1 \leq i, j \leq n$ and $n \geq n_0$. If $\sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_{i=1}^{n} \|\delta\,[(1 - P_n)\, A(\cdot)\, e_i]\|^2_{L^2(E;m)} < \infty$, then the symmetric linear operator $-\delta(AD\cdot)$ with domain $\{\psi(\ell_1, \ldots, \ell_n)\,;\, n \in \mathbf{N},\ \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)\}$ is Markov–unique.*

The proof is based on 2.2 and 3.1. *Non–Gaussian* measures m can be treated as well.

c) Let M be a compact connected Riemannian manifold, x_0 a fixed point in M, and $E = P(M)$ the space of continuous paths $p : [0,1] \to M$ s.t. $p(0) = x_0$. Let m be Wiener measure on $P(M)$, and $\mathcal{A} := \{F : P(M) \to \mathbf{R}\,;\ F(p) = \psi(p(t_1), \ldots, p(t_n))$ for some $n \in \mathbf{N},\ \psi \in C^\infty(M^n),\ t_1, \ldots, t_n \in [0,1]\,\}$. For $p \in P(M)$ let $H_p = T_p(P(M))$ be the tangent space to $P(M)$ in p, as defined e.g. in [3]. Then $H = (H_p)_{p \in P(M)}$ is a measurable field of Hilbert spaces. It can be shown that the gradient $D : \mathcal{A} \to L^2(E, H; m)$ (cf. [5], [3]) is a generalized differential. Hence we can construct a weak Sobolev space over the path space $P(M)$, and apply 2.2. This is a first step towards proving Markov uniqueness for the corresponding Ornstein–Uhlenbeck operator. It is expected that one can proceed similarly for the loop space.

All proofs of the results announced in this note are contained in [6].

REFERENCES

[1] S. ALBEVERIO, S. KUSUOKA and M. RÖCKNER. On partial integration in infinite–dimensional space and applications to Dirichlet forms, *J. London Math. Soc.* (2), 42, 1990, p. 122–136.

[2] N. BOULEAU and F. HIRSCH. *Dirichlet forms and analysis on Wiener space*, de Gruyter, Berlin, New York, 1991.

[3] A.-B. CRUZEIRO and P. MALLIAVIN. Répère mobile et géométrie riemannienne sur les espaces des chemins, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 319, Série I, 1994, p. 859–864.

[4] J. DIXMIER. *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[5] B. DRIVER and M. RÖCKNER. Construction of diffusions on path and loop spaces of compact Riemannian manifolds, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 315, Série I, 1992, p. 603–608.

[6] A. EBERLE. PhD–thesis, in preparation.

[7] M. FUKUSHIMA, Y. OSHIMA and M.TAKEDA. *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, de Gruyter, Berlin, New York, 1994.

[8] M. P. GAFFNEY. The harmonic operator for exterior differential forms, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 37, 1951.

[9] M. RÖCKNER and T. S. ZHANG. Uniqueness of generalized Schrödinger operators — Part II, *J. Funct. Analysis*, 119, 1994, p. 455–467.

[10] B. SCHMULAND. Dirichlet forms with polynomial domain, *Math. Japonica*, 37, No. 6, 1992, p. 1015–1024.

Andreas Eberle, Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik,
Postfach 10 01 31, 33501 Bielefeld, Germany.
E-Mail: eberle@mathematik.uni-bielefeld.de