Monoidale ∞-Kategorien

Heinz Wellen

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ein zentraler Unterschied zwischen der Theorie der Mengen und der Theorie der Kategorien ist, daß Elemente einer Menge gleich sind oder nicht, während Objekte einer Kategorie auch auf verschiedene Weisen (oder auch nicht) isomorph sein können. In einer Kategorie ist es unnatürlich und unerwünscht von der Gleichheit zweier Objekte zu sprechen.
In der Mengentheorie werden algebraische Strukturen mit Hilfe von Gleichungen definiert. Diese Strukturen können oft im Sinne der Kategorientheorie verallgemeinert werden. Man hat die Wahl diese Strukturen "strikt" zu verallgemeinern – Gleichungen bleiben Gleichungen – oder"schwach" – Gleichungen werden zu festgelegten Isomorphismen. Wenn eine Definition in dieser Weise abgeschwächt wird, so fordert man, daß die Isomorphismen ihrerseits neue Gleichungen erfüllen, Kohärenzbedingungen genannt, um sicherzustellen, daß gewisse Eigenschaften der ursprünglichen Gleichungen erhalten bleiben.
Zum Beispiel ist ein Monoid eine Menge mit einer Multiplikation, die unter anderem die Gleichung

$$(xy)z = x(yz)$$

erfüllt. Das kategorielle Analogon eines Monoids ist eine monoidale Kategorie, d.h. eine Kategorie $\mathcal{C}$ zusammen mit einem Bifunktor $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, genannt Tensorprodukt, der einer Assoziativitätsbedingung genügt und ein Einselement besitzt. Monoidale Kategorien tauchen in zwei verschiedenen Weisen auf: strikt, die Assoziativität des Tensorprodukts ist durch eine Gleichung

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$$

gegeben, und schwach, dann existiert ein natürlicher Isomorphismus

$$A_{x,y,z} : (x \otimes y) \otimes z \longrightarrow x \otimes (y \otimes z).$$

Mit diesem lassen sich mehrfach geklammerte Tensorprodukte umklammern. Um sicherzustellen, daß auf verschiedenen Wegen zustandekommende Umklammerungen das gleiche Ergebnis haben, wird die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
((x \otimes y) \otimes z) \otimes w \arrow[r, "A_{x\otimes y,z,w}"] \arrow[d, "A_{x,y,z} \otimes id_w"'] & (x \otimes y) \otimes (z \otimes w) \arrow[r, "A_{x,y,z\otimes w}"] & x \otimes (y \otimes (z \otimes w)) \\
(x \otimes (y \otimes z)) \otimes w \arrow[rr, "A_{x,y\otimes z,w}"'] & & x \otimes ((y \otimes z) \otimes w) \arrow[u, "id_x \otimes A_{y,z,w}"']
\end{tikzcd}$$

gefordert. Ähnlich wird in einer schwach monoidalen Kategorie die in einem Monoid geltende Gleichung $1x = x1 = x$ durch einen Isomorphismus ersetzt, der gewisse Kohärenzbedingungen erfüllt.
Statt Isomophismen können auch einfach Morphismen verwendet werden.
Es ist auch möglich, die Definition eines Monoids (Mengentheorie) bzw. einer monoidalen Kategorie (Kategorientheorie) in die Theorie der 2-Kategorien zu übertragen, d.h. zu definieren, was eine monoidale Struktur auf einer 2-Kategorie ist. Diagramme, die in einer monoidalen Kategorie strikt kommutieren, kommutieren dann gegebenenfalls nur noch bis auf einen 2-Morphismus. Diese 2-Morphismen erfüllen dann wieder gewisse Kohärenzbedingungen.
Kapranov/Voevodsky geben in [7] eine erste Definition einer monoidalen 2-Kategorie. Die Motivation für ihre Arbeit kommt aus der Physik, genauer aus der Quantenfeldtheorie. Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen den Yang-Baxter-Gleichungen und monoidalen Kategorien mit Zusatzstruktur. Höherdimensionale Verallgemeinerungen der Yang-Baxter-Gleichungen sind die Zamalodchikov-Tetrahedra-Gleichungen. Kapranov/Voevodsky versuchen, Zugang zu diesen Gleichungen mit Hilfe monoidaler 2-Kategorien zu bekommen.

Die hier vorliegende Arbeit verbessert und verallgemeinert die von Kapranov/Voevodsky gegebene Theorie der monoidalen 2-Kategorien. Es werden verschiedene Versionen monoidaler ∞-Kategorien definiert.
Ist *cat* die Kategorie der kleinen Kategorien, so bildet *cat* mit dem Produktbifunktor $\times$ eine monoidale Kategorie mit $\mathcal{L}_0$, der trivialen Kategorie mit nur einem Objekt, als Einselement. Die Kategorie $\infty - cat$ der ∞-Kategorien kann auf verschiedene kanonische Weisen in eine monoidale Kategorie gemacht werden. Naheliegend ist wieder die Struktur $(\infty - cat, \times, \mathcal{L}_0)$. Monoide in dieser Kategorie nennen wir total strikt. Sie spielen in dieser Arbeit eine untergeordnete Rolle. Die uns interessierenden schwächeren Strukturen erhält man, indem man das Produkt $\times$ durch das von Al-Agl und Steiner [1] definierte Tensorprodukt von ∞-Kategorien ersetzt:
Sind f und g 1-Morphismen in einer ∞-Kategorie X, so ist $f \times g$ ein 1-Morphismus in $X \times X$, und es gilt die Gleichung

$$f \times g = (id \times g) \circ (f \times id) = (f \times id) \circ (id \times g).$$

In $X \otimes X$ gilt die Gleichung nicht mehr, vielmehr ist $f \otimes g$ ein 2-Morphismus von

$(f \otimes id) \circ (id \otimes g)$ nach $(id \otimes g) \circ (f \otimes id)$.

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[r, "A \otimes g"] \arrow[d, "f \otimes B"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\!\!\!\swarrow"] & A \otimes B' \arrow[d, "f \otimes B'"] \\
A' \otimes B \arrow[r, "A' \otimes g"'] & A' \otimes B'
\end{tikzcd}$$

In dieser Arbeit ist eine strikt monoidale ∞-Kategorie ein Monoid in der monoidalen Kategorie $(\infty - cat, \otimes, \mathcal{L}_0)$. In einer solchen ∞-Kategorie gilt für Objekte A, B und C die Gleichheit

$$A(BC) = (AB)C,$$

wobei AB eine Kurzschreibweise für $A \otimes B$ ist. Kapranov und Voevodsky definieren in [7] eine schwächere Struktur, genannt monoidale Struktur: Für drei Objekte wird nicht mehr die Gleichheit, sondern nur die Existenz eines 1-Isomorphismus

$$a_{A,B,C} : A(BC) \longrightarrow (AB)C.$$

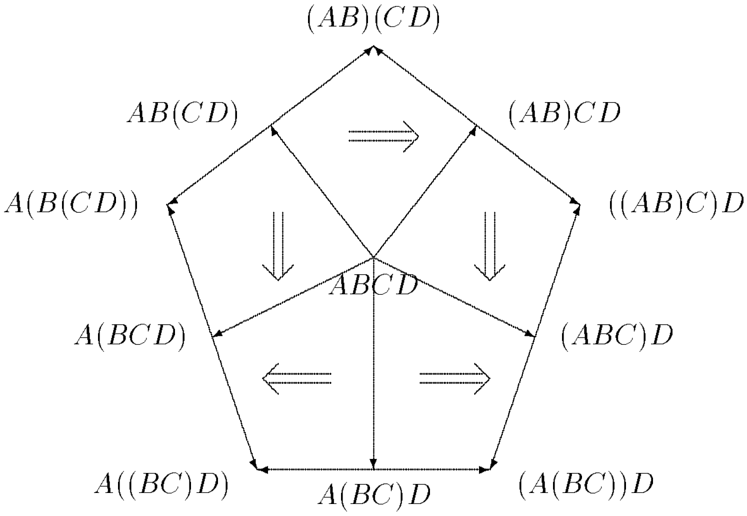
gefordert. Das Ziel dieser Arbeit ist es, solche und ähnliche Strukturen systematisch zu untersuchen. Im Gegensatz zu Kapranov/Voewodsky werden wir eine unterteilte Version wählen, genauer wird aus Symmetriegründen die Existenz zweier 1-Morphismen

$$A(BC) \overset{a'_{A,B,C}}{\longleftarrow} ABC \overset{a_{A,B,C}}{\longrightarrow} (AB)C.$$

gefordert und nicht die Existenz eines 1-Isomorphismus $A(BC) \to (AB)C$.
Wir listen nun einige Kohärenzbedingungen auf, die in monoidalen ∞-Kategorien gelten: Sind A, A', B und C Objekte, so kommutieren die folgenden Diagramme (im allgemeinen) nicht strikt, sondern nur bis auf einen (durch die Strukturdaten festgelegten) 2-Morphismus.

$$\begin{tikzcd}
ABC \arrow[r, "a'_{A,B,C}"] \arrow[d, "uBC"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\!\!\!\swarrow"] & A(BC) \arrow[d, "u(BC)"] \\
A'BC \arrow[r, "a'_{A',B,C}"'] & A'(BC)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
ABC \arrow[r, "a_{A,B,C}"] \arrow[d, "uBC"'] \arrow[dr, phantom, "\nearrow\!\!\!\nearrow"] & (AB)C \arrow[d, "u(BC)"] \\
A'BC \arrow[r, "a_{A',B,C}"'] & (A'B)C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
AB \arrow[d] \arrow[dr, "Ar_B"] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\!\!\!\swarrow"', shift right=2] & \\
AB1 \arrow[r, "a'_{A,B,1}"'] & A(B1)
\end{tikzcd}$$

Für je vier Objekte A, B, C und D existieren 2-Morphismen



Wir wollen für Strukturen dieser Art ein allgemeines Konzept entwickeln, das auf beide monoidale Kategorien $(\infty - cat, \times, \mathcal{L}_0)$ und $(\infty - cat, \otimes, \mathcal{L}_0)$ angewandt werden kann und gleichzeitig stärkere und schwächere, d.h. durch Isomorphismen bzw. Morphismen gegebene, Kohärenzbedingeungen behandelt.
Folglich werden wir verschiede Versionen monoidaler ∞-Kategorien und monoidaler ∞-Funktoren vorgestellen. Als Ergebnisse erhalten wir Rektifizierungstheoreme, die es z.B. erlauben, monoidale ∞-Kategorien durch strikt monoidale ∞-Kategorien und monoidale ∞-Funktoren durch strikt monoidale ∞-Funktoren zu ersetzen.

Unsere Ergebnisse gehen weit über die von Kapranov/Voevodsky erzielten Resultate hinaus. Außerdem werden Fehler in deren Arbeit verbessert.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert:
Das erste Kapitel dient der Bereitstellung grundlegender Definitionen. Es wird die Definition einer ∞-Kategorie gegeben. Anschließend wird das Tensorprodukt von Al-Agl/Steiner vorgestellt, das für die Entwicklung unserer Theorie monoidaler ∞-Kategorien von fundamentaler Bedeutung ist. Weiterhin werden Resultate von Steiner zitiert.
Im zweiten Kapitel werden strikt monoidale ∞-Kategorien und monoidale ∞-Funktoren eingeführt. Dabei wird zur Beschreibung schwach assoziativer Strukturen die von Boardman/Vogt entwickelte Sprache der Bäume verwendet.
Im dritten Kapitel werden strikt monoidale und monoidale ∞-Funktoren definiert. Zur Beschreibung monoidaler ∞-Funktoren werden zweifarbige Bäume verwendet. Da in späteren Kapiteln auch 3-farbige und 4-farbige Bäume benötigt werden, werden ganz allgemein k-farbige Bäume eingeführt, und die in Kapitel 2 eingeführten Bezeichnungen und Definitionen werden auf k-farbige Bäume verallgemeinert.
Das vierte Kapitel befaßt sich mit kohärenten Systemen. Kohärente Systeme sind technische Hilfsmittel für den Umgang mit monoidalen ∞-Kategorien und monoidalen ∞-Funktoren. Kohärente 1-Systeme sind genau die monoidalen ∞-Kategorien, kohärente 2-Systeme sind genau die monoidalen ∞-Funktoren, kohärente 3-Systeme finden bei der Beschreibung der Komposition monoidaler ∞-Funktoren

Verwendung, und kohärente 4-System werden sich beim Nachweis der Assoziativität der Komposition als hilfreich erweisen. Kohärente k-Systeme mit $k > 4$ haben für unsere Theorie keine Bedeutung.
Im fünften Kapitel wird das zentrale Rektifizierungstheorem bewiesen. Es wird gezeigt, daß die Kategorie der strikt monoidalen ∞-Kategorien eine reflektive Unterkategorie der Kategorie der monoidalen ∞-Kategorien ist. Weiter wird gezeigt, daß eine monoidale ∞-Kategorie X "äquivalent" zu ihrer Rektifizierung in eine strikt monoidale ∞-Kategorie ist.
Im sechsten und letzten Kapitel werden weitere Versionen monoidaler ∞-Kategorien vorgestellt.

Ich danke Herrn Professor Dr. Rainer Vogt und Herrn Professor Dr. Richard Steiner für die wertvollen Anregungen und Diskussionen zu dieser Arbeit und der Deutschen Forschungsgemeinschaft für finanzielle Unterstützung.

Kapitel 1

Das Tensorprodukt von Al-Agl/Steiner

In diesem Kapitel werden Resultate von Al-Agl und Steiner [1] aufgeführt, insbesondere wird das Tensorprodukt von Al-Agl/Steiner vorgestellt, das für die Entwicklung einer Theorie monoidaler ∞-Kategorien von fundamentaler Bedeutung ist.

1.1 ∞-Kategorien

Zuerst werden die Hauptmerkmale einer ∞-Kategorie angegeben, anschließend wird dann definiert, was eine ∞-Kategorie ist.

Eine ∞-Kategorie besteht gewissermaßen aus einer Menge X und einer Sequenz von Kategorien $C_0, C_1, \ldots$ mit folgenden Eigenschaften:

- · jede Kategorie C_n hat X als Morphismenmenge,
- · für $n > m$ ist jede Identität in C_m auch eine Identität in C_n,
- · jedes Element von X ist eine Identität in einem C_n,
- · für $m \neq n$ kommutieren die Strukturen von C_m und C_n miteinander.

Es ist üblich, mit den Morphismen zu arbeiten und die Objekte zu unterdrücken. Eine ∞-Kategorie wird als eine Menge X zusammen mit einstelligen Operationen

$$d_n^- \text{ (Quelle in } C_n),$$

$$d_n^+ \quad \text{(Ziel in } C_n)$$

und partiellen zweistelligen Relationen

$$\times_n \text{ (Komposition in } C_n),$$

$n = 0, 1, \ldots$, aufgefaßt. Es folgt die explizite Definition einer ∞-Kategorie.

Definition 1.1 *Eine ∞-Kategorie ist eine Menge X mit einstelligen Operationen $d_n^\alpha, n \in I\!N, \alpha \in \{-,+\}$, und partiellen zweistelligen Operationen $\times_n$, $n \in I\!N$, so daß gilt:*

- *Für $x, y \in X$ ist $x \times_n y$ genau dann definiert, wenn $d_n^+ x = d_n^- y$ ist.*
- *Für $x \in X$, $m, n \in I\!N$ und $\alpha, \beta \in \{-,+\}$ ist*

$$d_m^\beta d_n^\alpha x = \begin{cases} d_m^\beta x, & \text{falls } m < n, \\ d_n^\alpha x, & \text{falls } m \geq n. \end{cases}$$

- *Sind $x, y \in X$ und ist $x \times_n y$ definiert, so ist*

$$d_n^-(x \times_n y) = d_n^- x, \quad d_n^+(x \times_n y) = d_n^+ y,$$

$$d_m^\alpha(x \times_n y) = d_m^\alpha x \times_n d_m^\alpha y \text{ für } m \neq n, \alpha \in \{-,+\}.$$

- *Für $x \in X$ ist*

$$d_n^- x \times_n x = x = x \times_n d_n^+ x.$$

- *Sind $x, y, z \in X$ und ist $d_n^+ x = d_n^- y$ und $d_n^+ y = d_n^- z$, so ist*

$$(x \times_n y) \times_n z = x \times_n (y \times_n z).$$

- *Sind $x, x', y, y' \in X$, ist $m \neq n$ und sind beide Seiten definiert, so ist*

$$(x \times_n y) \times_m (x' \times_n y') = (x \times_m x') \times_n (y \times_m y').$$

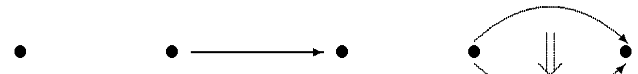
- *Für jedes $x \in X$ existiert ein N mit $d_n^- x = d_n^+ x = x$ für $n \geq N$.*

Der Ausdruck ∞-Kategorie stammt von Brown und Higgins ([4]). Wird bei der Definition einer ∞-Kategorie die Bedingung, daß für jedes $x \in X$ ein $N \in I\!N$ mit $d_n^- x = d_n^+ = x$ für $n \geq N$ existiert, fortgelassen, so erhält man die Definition einer ω-Kategorie im Sinne von Street ([14]). Für $n \in I\!N$ ist eine n-Kategorie äquivalent zu einer ∞-Kategorie, in der $d_n^- x = d_n^+ x = x$ für jedes Element x der ∞-Kategorie gilt.

Ist X eine ∞-Kategorie, so ist die *Dimension* von $x \in X$ die kleinste Zahl m, für die $d_n^- x = d_n^+ x = x$ für alle $n \geq m$ gilt. $x \in X$ heißt *n-Morphismus*, falls $dim\ x = n$ ist. 0-Morphismen werden auch *Objekte* genannt.

Beispiel 1.2 *1. Wie oben schon erwähnt, läßt sich jede n-Kategorie als ∞-Kategorie auffassen. Insbesondere läßt sich jede Menge und jede Kategorie als ∞-Kategorie auffassen.*

2. F_n *sei die von einem Element* u_n *erzeugte* ∞*-Kategorie mit der Relation* $d_n^- u_n = d_n^+ u_n = u_n$. *Es ist*



F_0 $\quad$ F_1 $\quad$ F_2

(Punkte $\bullet$ *stehen für Objekte, Pfeile* $\to$ *für 1-Morphismen und Doppelpfeile* $\Rightarrow$ *für 2-Morphismen.)*

3. *Sind* ∞*-Kategorien* $(X, d_n^\alpha, \times_n)$ *und* $(X', {d'}_n^\alpha, \times_n')$ *gegeben, so ist*

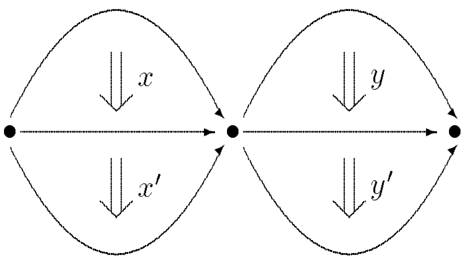
$$(X \times X', d_n^\alpha \times {d'}_n^\alpha, \times_n \times \times_n')$$

ebenfalls eine ∞*-Kategorie. Die* ∞*-Kategorie* $X \times X'$ *wird Produkt der* ∞*-Kategorien* X *und* X*' genannt.*

Bemerkung 1.3 *Die Vertauschungsregel*

$$(x \times_1 y) \times_2 (x' \times_1 y') = (x \times_2 x') \times_1 (y \times y')$$

wird durch folgendes Schaubild verdeutlicht.



Definition 1.4 *Ein* ∞*-Funktor* F *ist eine Abbildung* $F : X \to Y$ *zwischen* ∞*-Kategorien* X, Y, *so daß*

- $F(d_n^\alpha x) = d_n^\alpha F(x)$ *für* $x \in X$, $\alpha \in \{-, +\}$,
- $F(x \times_n y) = F(x) \times_n F(y)$ *für* $x, y \in X$ *mit* $d_n^+ x = d_n^- y$.

Die Menge der ∞*-Funktoren von* X *nach* Y *wird mit Hom(X,Y) bezeichnet.*

Bezeichnung 1.5 *Die Kategorie der* ∞*-Kategorien und* ∞*-Funktoren wird mit*

$$\infty - cat$$

bezeichnet.

Lemma 1.6 ([8]) $\infty - cat$ *ist covollständig.* $\square$

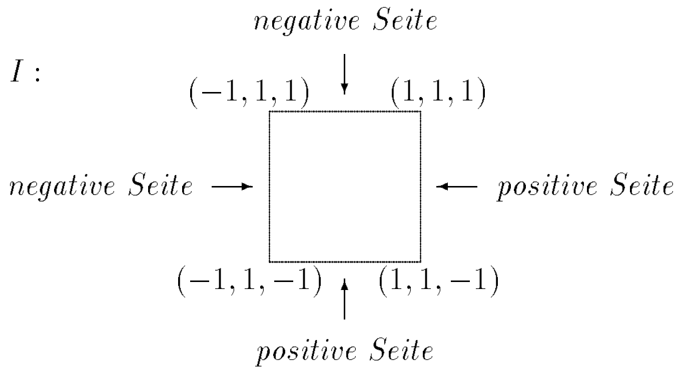
1.2 Die Kategorie $\mathcal{K}$

$I^N = [-1,1]^N$ sei der Standard-N-Würfel. Die *Seiten von* I^N sind die Teilmengen von I^N der Form $J_1 \times \cdots \times J_N$, wobei J_i gleich $\{-1\}$, $\{1\}$ oder I ist. Ein *Teilkomplex von* I^N ist eine Teilmenge, die eine Vereinigung von Seiten ist. Ist C ein Teilkomplex von I^N, so sind die *Seiten von* C die Seiten von I^N, die in C liegen.

σ sei eine n-dimensionale Seite ($n > 0$) von I^N, das heißt, σ besitzt eine Darstellung $\sigma = P_0 \times I \times P_1 \times \ldots \times I \times P_n$, dabei sind die P_i Punkte in einem $I^{r(i)}$ für ein $r(i) \geq 0$. Um eine (n-1)-dimensionale Seite von σ zu erhalten, muß einer der Faktoren I durch $\{-1\}$ oder $\{1\}$ ersetzt werden. Entsteht eine (n-1)-dimensionale Seite durch Ersetzen der i-ten Kopie von I durch $\{(-1)^i\}$, so wird sie *negative Seite*, andererseits wird sie *positive Seite* genannt.

Beispiel 1.7 *Ist* $\sigma = I \times \{1\} \times I \subset I^3$*, so sind die negativen Seiten von* σ $\{-1\} \times \{1\} \times I$ *und* $I \times \{1\} \times \{1\}$*. Die positiven Seiten von* σ *sind* $\{1\} \times \{1\} \times I$ *und* $I \times \{1\} \times \{-1\}$*.*

$I \times \{1\} \times I$:



In [1] wird eine Konstruktion beschrieben, mit der jedem Teilkomplex eines Würfels I^N eine ∞-Kategorie zugeordnet werden kann. Die wesentlichen Eigenschaften dieser Konstruktion sind in dem folgenden Theorem zusammengefaßt.

Satz 1.8 ([12, Thm 1]) *C sei ein Teilkomplex von* I^N*. Dann existiert eine* ∞*-Kategorie G(C) mit den folgenden Eigenschaften.*

1. *Die Elemente von G(C) sind gewisse Teilkomplexe von C.*
2. *Ist* $x \times_n y \in G(C)$ *definiert, so ist* $x \times_n y = x \cup y$*.*
3. σ *sei eine p-dimensionale Seite von* I^N*, die in C enthalten ist. Es ist dann* $\sigma \in G(C)$ *und* $d_p^- \sigma = d_p^+ \sigma = \sigma$*. Ist* $p > 0$*, so ist* $d_{p-1}^- \sigma$ *die Vereinigung der negativen Seiten von* σ *und* $d_{p-1}^+ \sigma$ *die Vereinigung der positiven Seiten von* σ*.*
4. *Jedes Element von G(C) ist eine nichtleere iterierte Komposition von Seiten von C.*

5. *Ist $x \in G(C)$, so ist $d_n^\alpha x$ höchstens n-dimensional; ist n größer gleich der Dimension des Teilkomplexes x, so ist $d_n^\alpha x = x$.*

6. *Es gibt eine Präsentation von $G(C)$, in der die Erzeuger die Seiten von C und die Relationen*

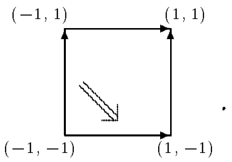
   (a) *$d_p^- \sigma = d_p^+ \sigma = \sigma$, für einen p-dimensionalen Erzeuger σ,*

   (b) *die $d_{p-1}^\alpha \sigma$ sind entsprechende Kompositionen von Seiten von σ, falls σ ein p-dimensionaler Erzeuger mit $p > 0$ ist,*

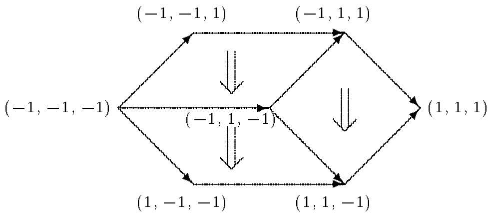
   sind.

Die Teilkomplexe von I^N, die zu $G(I^N)$ gehören, werden *globelike* genannt.
$\mathcal{K}$ sei die volle Unterkategorie der Kategorie der ∞-Kategorien, deren Objekte die $G(C)$ sind, wobei C ein globelike Teilkomplex eines I^N ist.

Beispiel 1.9 *1. $G(I^2)$ ist die ∞-Kategorie*



2. Ist σ der Standard-3-Würfel, so kann $d_2^- \sigma$ wie folgt dargestellt werden.



Es ist

$$d_2^- \sigma = (II- \times_0 ++I) \times_1 (-I- \times_0 I+I) \times_1 (-II \times_0 I++),$$

dabei steht $II-$ für $I \times I \times \{-1\}$; entsprechendes gilt für $++I$, $-I-$, etc.

Im folgenden bezeichne

$$J : \mathcal{K} \longrightarrow \infty - cat$$

die Inklusion.

1.3 Würfelkategorien

Es wird die Kategorie der Würfelkategorien vorgestellt. Diese ist äquivalent zu der Kategorie der ∞-Kategorie. Mit Hilfe dieser Äquivalenz wird im nächsten Abschnitt das Tensorprodukt von ∞-Kategorien definiert.

Definition 1.10 *Eine Würfelkategorie ist ein Funktor $S : \mathcal{K}^{op} \to Sets$, so daß*

$$S(G(C)) = \lim_{\sigma} S(G(\sigma))$$

für $G(C) \in \mathcal{K}$, dabei wird der inverse Limes über die Seiten σ von C und ihren Inklusionen gebildet. Morphismen von Würfelkategorien sind natürliche Transformationen.

Bezeichnung 1.11 *Die Kategorie der Würfelkategorien und natürlichen Transformationen wird mit*

$$cube\ \infty - cat$$

bezeichnet.

Es sei $Hom(J, \_) : \infty - cat \longrightarrow cube\ \infty - cat$ der folgende Funktor.

$$\begin{array}{rcl} Hom(J, \_) : \infty - cat & \longrightarrow & cube\ \infty - cat \\ X & \longmapsto & Hom(J, X) \end{array},$$

dabei ist für eine ∞-Kategorie X

$$\begin{array}{rcl} Hom(J, X) : \mathcal{K}^{op} & \longmapsto & Sets \\ G(C) & \longmapsto & Hom(G(C), X) \end{array}.$$

Es ist $Hom(J, X) \in cube\ \infty - cat$, da

$$\begin{aligned} Hom(J, X)(G(C)) &= Hom(G(C), X) \\ &= Hom(\operatorname{colim}_\sigma G(\sigma), X) \qquad (1.8) \\ &= \lim_\sigma Hom(G(\sigma), X) \\ &= \lim_\sigma Hom(J, X)(G(\sigma)). \end{aligned}$$

Ist S eine Würfelkategorie, so bezeichne $S \otimes_{\mathcal{K}} J$ das Coende des Funktors

$$\mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K} \xrightarrow{S \times J} Sets \times \infty - cat \longrightarrow \infty - cat \times \infty - cat \xrightarrow{\times} \infty - cat,$$

dabei wird ausgenutzt (mittlerer Pfeil), daß eine Menge als ∞-Kategorie aufgefaßt werden kann (1.2). Es gilt das folgende Theorem.

Satz 1.12 ([12, Thm2]) *Der Funktor*

$$Hom(J, \_) : \infty - cat \longrightarrow cube\ \infty - cat$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien. Das Inverse ist durch

$$\_ \otimes_{\mathcal{K}} J : cube\ \infty - cat \longrightarrow \infty - cat$$

gegeben. □

1.4 Das Tensorprodukt von Al-Agl/Steiner

Nun wird das Tensorprodukt von ∞-Kategorien definiert.

Satz 1.13 ([12, Thm 5]) *1. x bzw y sei ein globelike Teilkomplex von I^M bzw I^N. Dann ist $x \times y$ ein globelike Teilkomplex von I^{M+N} und*

$$d_n^\alpha(x \times y) = \bigcup_{p+q=n} d_p^\alpha x \times d_q^{(-)^p\alpha} y.$$

2. Es gibt einen Funktor $\mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, der auf Objekten $G(C)$ und $G(D)$ durch

$$(G(C), G(D)) \mapsto G(C \times D)$$

und auf Morphismen $\xi : G(C) \mapsto G(C')$ und $\eta : G(D) \mapsto G(D')$ durch

$$(\xi, \eta) \mapsto \xi \times \eta : G(C \times D) \to G(C' \times D'),$$

wobei $(\xi \times \eta)(x \times y) = \xi(x) \times \eta(y)$ für $x \in G(C)$ und $y \in G(D)$ ist, gegeben ist.

Der Funktor von $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ to $\mathcal{K}$ ist strikt assoziativ und hat $G(I^0)$ als strikte Einheit. □

$J_2 : \mathcal{K}^2 \to \infty - cat$ bezeichne die Komposition

$$\mathcal{K}^2 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{J} \infty - cat,$$

dabei ist der erste Funktor in (1.13) definiert und J die Inklusion.

Definition 1.14 *Sind ∞-Kategorien X und Y gegeben, so wird*

$$X \otimes Y := (Hom(J, X) \times Hom(J, Y)) \otimes_{\mathcal{K}^2} J_2$$

das Tensorprodukt von X und Y genannt. Sind $F : X \to X'$ und $G : Y \to Y'$ ∞-Funktoren, so wird kanonisch ein ∞-Funktor

$$F \otimes G : X \otimes Y \longrightarrow X' \otimes Y'$$

induziert.

$\mathcal{L}_n$ sei die Kategorie mit Objekten 0,1,...,n und genau einem Morphismus von p nach q, falls p $\leq$ q ist, und andernfalls keinen. Es ist dann $G(I^0) \cong \mathcal{L}_0$ und $G(I) \cong \mathcal{L}_1$.

Beispiel 1.15 *Es ist*

· $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_1 \cong G(I^2)$.

$$\begin{tikzcd}
(0,1) \arrow[r] & (1,1) \\
(0,0) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Searrow"] & (1,0) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

· $\mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{L}_1$

$$\begin{tikzcd}
(0,1) \arrow[r] & (1,1) \arrow[r] & (2,1) \\
(0,0) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Searrow"] & (1,0) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Searrow"] & (2,0) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

· $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$

$$\begin{tikzcd}
(0,2) \arrow[r] & (1,2) \\
(0,1) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Searrow"] & (1,1) \arrow[u] \\
(0,0) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Searrow"] & (1,0) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Satz 1.16 ([1, ô12]) *$(\infty - cat, \otimes, \mathcal{L}_0)$ ist eine biabgeschlossene monoidale Kategorie.* □

Bemerkung 1.17 · *(1.15) zeigt, daß das Tensorprodukt nicht symmetrisch ist.*

· *Da $\mathcal{L}_0$ terminales Objekt in ∞-cat ist, gibt es Projektionen $X_1 \otimes X_2 \to X_1$ und $X_1 \otimes X_2 \to X_2$.*

· *Aufgrund der Biabgeschlossenheit folgt, daß Tensorprodukt und Colimes miteinander vertauschen.*

$\iota_p : F_p \to G(I^p)$ bezeichne den durch $\iota_p(u_p) = I^p$ gegebenen ∞-Funktor (vgl. [12]). $\iota_2 : F_2 \to G(I^2)$ läßt sich durch das folgende Bild veranschaulichen.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right, ""{name=D, above}] \arrow[Rightarrow, from=U, to=D] & 3 & & \arrow[r, "\iota_2"] & & 1 \arrow[r] & 3 \\
& & & & & 0 \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Searrow"] & 2 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$\rho_p : G(I^p) \to F_p$ bezeichne den durch $\rho_p(I^p) = u_p$ und $\rho_p(\sigma \times \{\alpha 1\} \times I^n) = d_n^\alpha u_p$, für jede Seite σ von I^{p-n-1}, gegebenen ∞-Funktor (vgl. [12]). $\rho_2 : G(I^2) \to F_2$ läßt sich durch folgendes Bild veranschaulichen.

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 1 & & & \\
0 \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\searrow"] & 0 \arrow[u] & \arrow[r, "\rho_2"] & 0 \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & 1
\end{tikzcd}
$$

Das Element $x_1 \otimes x_2$. Sind X_1 und X_2 ∞-Kategorien und sei für $i = 1, 2$ $x_i \in X_i$ mit $p_i = dim\ x_i$, dann bezeichne $\underline{x_i} \in Hom(G(I^{p_i}), X)$ das Element

$$
\begin{array}{rcl}
\underline{x_i} : G(I^{p_i}) \xrightarrow{\rho_{p_i}} F_{p_i} & \longrightarrow & X \\
u_i & \longmapsto & x_i
\end{array}.
$$

$x_1 \otimes x_2 \in X_1 \otimes X_2$ sei das Bild von

$$((\underline{x_1}, \underline{x_2}), I^{p_1+p_2}) \in (Hom(G(I^{p_1}), X_1) \times Hom(G(I^{p_2}), X_2)) \times G(I^{p_1} \times I^{p_2})$$

unter der Abbildung in den Colimes.

$$
\begin{tikzcd}
(Hom(G(I^{p_1}), X_1) \times Hom(G(I^{p_2}), X_2)) \times G(I^{p_1+p_2}) \arrow[d] & ((\underline{x_1}, \underline{x_2}), I^{p_1+p_2}) \arrow[d] \\
(Hom, (J, X_1) \times Hom(J, X_2)) \otimes_{\mathcal{K}^2} J_2 = X_1 \otimes X_2 & x_1 \otimes x_2
\end{tikzcd}
$$

Sind $X_1, \ldots, X_n$ ∞-Kategorien, so sei

$$X_1 \otimes \cdots \otimes X_n := (X_1 \otimes (X_2 \otimes (\cdots \otimes (X_{n-1} \otimes X_n) \cdots))).$$

Das mehrfache Tensorprodukt von ∞-Funktoren bzw von Elementen sei analog definiert.

Gehen zwei ∞-Kategorien aus $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ durch (mehrfaches) Klammersetzen oder (mehrfache) Produktbildung mit $\mathcal{L}_0$ hervor, so existiert nach dem Kohärenztheorem von MacLane [10] ein kanonischer Isomorphismus zwischen diesen beiden ∞-Kategorien.

Es ist bedeutungslos, ob bei der Definition von $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ eine links- oder eine rechtsgeklammerte Version benutzt wird. Beide Versionen liefern äquivalente Konstruktionen.

Lemma 1.18 *Sind X_1 und X_2 ∞-Kategorien, so ist die ∞-Kategorie $X_1 \otimes X_2$ von den Elementen der Form $x_1 \otimes x_2$ mit $x_1 \in X_1$ und $x_2 \in X_2$ erzeugt.*

Beweis: Es sei $x \in X_1 \otimes X_2$ ein Element der Dimension p. x werde im Colimes repräsentiert durch

$$((f, g), M) \in (Hom(G(C), X) \times Hom(G(D), X)) \times G(C \times D).$$

Ohne Einschränkung darf $M = I^p$, $C = I^{p_1}$ und $D = I^{p_2}$ mit $p_1 + p_2 = p$ angenommen werden.

$$((f,g), I^{p_1+p_2})$$

ist folglich ein Repräsentant von x. Wegen $\iota_{p_1}\rho_{p_1}(I^{p_1}) = I^{p_1}$ und $\iota_{p_2}\rho_{p_2}(I^{p_2}) = I^{p_2}$ ist auch

$$((f\iota_{p_1}\rho_{p_1}, g\iota_{p_2}\rho_{p_2}), I^{p_1+p_2}) = ((\underline{f\iota_{p_1}(u_{p_1})}, \underline{g\iota_{p_2}(u_{p_2})}), I^{p_1+p_2})$$

ein Repräsentant von x. Folglich wird $X_1 \otimes X_2$ von $x_1 \otimes x_2$ mit $x_1 \in X_1$ und $x_2 \in X_2$ erzeugt. $\square$

Analog läßt sich zeigen, daß eine ∞-Kategorie $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ von Elementen der Form $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ mit $x_i \in X_i$ für $i = 0, \ldots, n$ erzeugt wird.

Kapitel 2

Monoidale ∞-Kategorien

In diesem Kapitel werden verschiedene Versionen monoidaler ∞-Kategorien definiert. Zuerst werden strikt monoidale ∞-Kategorien behandelt und anschließend monoidale ∞-Kategorien. Die von Boardman/Vogt entwickelte Sprache der Bäume wird verwendet, um die schwach assoziative Struktur monoidaler ∞-Kategorien zu beschreiben. Es wird gezeigt, daß die strikt monoidalen ∞-Kategorien als Teilmenge der monoidalen ∞-Kategorien aufgefaßt werden können.

2.1 Strikt monoidale ∞-Kategorien

Eine strikt monoidale Kategorie ist ein Monoid in der monoidalen Kategorie $(cat, \times, \mathcal{L}_0)$. Eine strikt monoidale ∞-Kategorie wird als Monoid in der monoidalen Kategorie $(\infty - cat, \otimes, \mathcal{L}_0)$ definiert, dabei ist $\otimes$ das Tensorprodukt von Al-Agl/Steiner.

Bezeichnung 2.1 *Ist X eine ∞-Kategorie und n eine natürliche Zahl, so sei*

$$X^{\otimes 0} = \mathcal{L}_0 \quad \text{und} \quad X^{\otimes n} = \underbrace{X \otimes \cdots \otimes X}_{n\ mal}, \text{ falls } n > 0.$$

Ist $F : X \longrightarrow Y$ ein ∞-Funktor, so sei der ∞-Funktor $F^{\otimes n} : X^{\otimes n} \to Y^{\otimes n}$ durch

$$F^{\otimes 0} = Id_{\mathcal{L}_0} \quad \text{und} \quad F^{\otimes n} = \underbrace{F \otimes \cdots \otimes F}_{n\ mal}, \text{ falls } n > 0.$$

gegeben.

Mit diesen Bezeichnungen kann nun eine strikt monoidale ∞-Kategorie definiert werden.

Definition 2.2 *Eine strikt monoidale ∞-Kategorie (X, Λ) ist eine ∞-Kategorie X zusammen mit ∞-Funktoren*

$$\Lambda_n : X^{\otimes n} \longrightarrow X, n \geq 0,$$

so daß

$$\Lambda_1 = Id$$

und das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X^{\otimes(n_1+\cdots+n_p)} \arrow[rr, "\Lambda_{n_1+\cdots+n_p}"] \arrow[d, "\cong"'] & & X \\
(X^{\otimes n_1}) \otimes \cdots \otimes (X^{\otimes n_p}) \arrow[rr, "\Lambda_{n_1} \otimes \cdots \otimes \Lambda_{n_p}"'] & & X^{\otimes p} \arrow[u, "\Lambda_p"']
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Ist (X, Λ) eine strikt monoidale ∞-Kategorie, so sind die ∞-Funktoren Λ_n, $n \geq 3$, bereits durch Λ_2 festgelegt.

Definition 2.3 *Ein strikt monoidaler ∞-Funktor $F : X \to Y$ zwischen strikt monoidalen ∞-Kategorien (X, Λ^X) und (Y, Λ^Y) ist ein ∞-Funktor $F : X \to Y$, für den für jede natürliche Zahl n das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{tikzcd}
X^{\otimes n} \arrow[r, "F^{\otimes n}"] \arrow[d, "\Lambda_n^X"'] & Y^{\otimes n} \arrow[d, "\Lambda_n^Y"] \\
X \arrow[r, "F"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Sind $F : X \to Y$ und $G : Y \to Z$ strikt monoidale ∞-Funktoren zwischen strikt monoidalen ∞-Kategorien, so ist die Komposition

$$X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{G} Z$$

ebenfalls ein strikt monoidaler ∞-Funktor. Die Komposition strikt monoidaler ∞-Funktoren ist assoziativ und es gilt $F \circ Id = F = Id \circ F$.

Bezeichnung 2.4 *Die strikt monoidalen ∞-Kategorien zusammen mit den strikt monoidalen ∞-Funktoren bilden eine Kategorie. Diese Kategorie wird mit*

$$str\ mon\ \infty - cat$$

bezeichnet.

Bemerkung 2.5 *Eine strikt monoidale ∞-Kategorie ist ein Monoid in der monoidalen Kategorie $(\infty - cat, \otimes, \mathcal{L}_0)$. Ein strikt monoidaler ∞-Funktor ist ein Morphismus von Monoiden (im Sinne von [10]).*

Bemerkung 2.6 · *In der Definition einer 2-Kategorie in [7] wurde vergessen die Assoziativität der 0-Komposition für 2-Morphismen zu fordern. Diese wird in dem Artikel jedoch benutzt, z.B. im Diagramm auf Seite 217 unten. In der Definition von Kapranov und Voewodsky sind Axiome der Form* $(\begin{smallmatrix}\to\\ \uparrow\\ \to\end{smallmatrix} \to\to)$, $(\to \begin{smallmatrix}\to\\ \uparrow\\ \to\end{smallmatrix} \to)$ *und* $(\to\to \begin{smallmatrix}\to\\ \uparrow\\ \to\end{smallmatrix})$ *zu ergänzen.*

- *Die semistrikt monoidalen 2-Kategorien im Sinne von Kapranov/Voevodsky [7] sind dann Beispiele für strikt monoidale ∞-Kategorien.*

- *$Vect_c$ ([7, Def 5.6]) ist keine strikte Ringkategorie ([7, Def 5.3,Def 5.5]), da einer der Distributivisomorphismen nicht natürlich ist. Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} l\otimes(m\oplus n) \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "A\otimes(B\oplus C)"'] & l\otimes m\oplus l\otimes n \arrow[d, "A\otimes B\oplus A\otimes C"] \\ l'\otimes(m'\oplus n') \arrow[r, "Id"'] & l'\otimes m'\oplus l'\otimes n' \end{tikzcd}$$

kommutiert im allgemeinem nicht.

Die Natürlichkeit der Distributivisomorphismen ist aber erforderlich, damit $2-Vect_{cc}$ ([7, Def 5.9]) eine (strikte) 2-Kategorie wird. Die Natürlichkeit der Distributivisomorphismen sorgen dafür, daß die 0-Komposition auch für 2-Morphismen assoziativ ist. Folglich sind [7, Def 5.9] und [7, Thm 5.23] falsch. $2-Vect_{cc}$ ist keine strikte 2-Kategorie und liefert somit kein Beispiel für eine monoidale 2-Kategorie.

Sind $x_1, \ldots, x_n$ Elemente der strikt monoidalen ∞-Kategorie X, so wird statt

$$\Lambda_n(x_1\otimes\cdots\otimes x_n) \quad \text{auch} \quad x_1\cdots x_n$$

geschrieben. Sind A, B und C Objekte in einer strikt monoidalen ∞-Kategorie, so ist

$$(AB)C = ABC = A(BC).$$

Sind $A \xrightarrow{f} A'$ und $B \xrightarrow{g} B'$ 1-Morphismen in einer strikt monoidalen ∞-Kategorie X, so kommutiert das folgende Diagramm bis auf einen (durch die Strukturdaten von X festgelegten) 2-Morphismus.

$$\begin{tikzcd} AB \arrow[r, "Ag"] \arrow[d, "fB"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow"] & AB' \arrow[d, "fB'"] \\ A'B \arrow[r, "A'g"'] & A'B' \end{tikzcd}$$

Bemerkung 2.7 *Wird die monoidale Kategorie* $(\infty - cat, \times, \mathcal{L}_0)$ *als Ausgangspunkt genommen, so kommutiert das oben angegebene Diagramm strikt. Ein Monoid in der monoidalen Kategorie* $(\infty - cat, \times, \mathcal{L}_0)$ *wird total strikt monoidale* ∞*-Kategorie genannt. Jede total strikt monoidale* ∞*-Kategorie kann in kanonischer Weise als strikt monoidale* ∞*-Kategorie aufgefaßt werden. Die strikt monoidalen 2-Kategorien im Sinne von Kapranov/Voewodsky (vgl [7]) sind Beispiele für total strikt monoidale* ∞*-Kategorien.*

2.1.1 Die strikt monoidale ∞-Kategorie $HOM(X, X)$

Es wird ein Beispiel für eine strikt monoidale ∞-Kategorie gegeben.
Die ∞-Kategorie $HOM(X, Y)$. Sind X und Y ∞-Kategorien, so sei

$$HOM(X,Y) := \mathrm{colim}(Hom(F_0 \otimes X, Y) \to Hom(F_1 \otimes X, Y) \to Hom(F_2 \otimes X, Y) \to \cdots).$$

Dabei ist die Abbildung $Hom(F_n \otimes X, Y) \to Hom(F_{n+1} \otimes X, Y)$ durch

$$F_{n+1} \to F_n : u_{n+1} \mapsto u_n$$

induziert. (F_n ist die von einem Element u_n erzeugte ∞-Kategorie mit der Relation $d_n^- u_n = d_n^+ u_n = u_n$, vgl (1.2))
Ist $G \in Hom(F_n \otimes X, Y)$, so sei

$$d_p^\alpha G : F_p \otimes X \longrightarrow F_n \otimes X \xrightarrow{G} X,$$

wobei der erste ∞-Funktor durch

$$F_p \longrightarrow F_n : u_p \longmapsto d_p^\alpha u_n$$

induziert ist. Dadurch wird eine Abbildung

$$d_p^\alpha : HOM(X, Y) \longrightarrow HOM(X, Y)$$

definiert. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da der oben angegebene ∞-Funktor $F_{n+1} \to F_n : u_{n+1} \mapsto u_n$ das Element $d_p^\alpha u_{n+1}$ auf $d_p^\alpha u_n$ abbildet.

$$F_{n,p,m} := \mathrm{colim} \begin{pmatrix} F_n & \leftarrow & F_p & \to & F_m \\ d_p^+ u_n & \leftarrow & u_p & \to & d_p^- u_m \end{pmatrix}$$

ist die von 2 Elementen u_n, u_m erzeugte ∞-Kategorie mit den Relationen $d_n^- u_n = d_n^+ u_n = u_n$, $d_m^- u_m = d_m^+ u_m = u_m$ und $d_p^+ u_n = d_p^- u_m$.
Sind $G_1 : F_n \otimes X \longrightarrow Y$ und $G_2 : F_m \otimes X \longrightarrow Y$ mit $d_p^+ G_1 = d_p^- G_2$ gegeben, so sei $G_1 \times_p G_2$ durch die Komposition

$$G_1 \times_p G_2 : F_{max(n,m)} \otimes X \longrightarrow F_{n,p,m} \otimes X \longrightarrow Y$$

gegeben, dabei ist der erste ∞-Funktor durch

$$F_{max(n,m)} \longrightarrow F_{n,p,m} : u_{max(n,m)} \longmapsto u_n \times_p u_m$$

induziert und der zweite durch G_1 und G_2. Das liefert eine partielle Abbdildung

$$\times_p : HOM(X,Y) \times HOM(X,Y) \longrightarrow HOM(X,Y).$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da für $n' > n$ und $m' > m$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F_{max(n',m')} \arrow[r] \arrow[d] & F_{n',p,m'} \arrow[d] \\ F_{max(n,m)} \arrow[r] & F_{n,p,m} \end{tikzcd} \quad \text{mit} \quad \begin{tikzcd} u_{max(n',m')} \arrow[r] \arrow[d] & u_{n'} \times_p u_{m'} \arrow[d] \\ u_{max(n,m)} \arrow[r] & u_n \times_p u_m \end{tikzcd}$$

kommutiert. Mit diesen Abbildungen wird $HOM(X,Y)$ zu einer monoidalen ∞-Kategorie.

Die (strikt) monoidale Struktur. $\Lambda_0 : \mathcal{L}_0 \to HOM(X,X)$ sei die Komposition

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_0 & \longrightarrow & Hom(F_0 \otimes X, X) \longrightarrow HOM(X,X), \\ 0 & \longmapsto & (F_0 \otimes X \cong X), \\ & & \text{(kanonischer Isomorphismus)} \end{array}$$

dabei sei der letzte ∞-Funktor der zum Colimes gehörende. Weiter ist

$$\Lambda_1 : HOM(X,X) \longrightarrow HOM(X,X) : F \longmapsto F.$$

Sind

$$G_1 : F_n \otimes X \longrightarrow X \quad \text{und} \quad G_2 : F_m \otimes X \longrightarrow X$$

gegeben, so sei

$$G_1 \otimes G_2 : F_{n+m} \otimes X \longrightarrow F_n \otimes (F_m \otimes X) \stackrel{Id\otimes G_2}{\longrightarrow} F_n \otimes X \stackrel{G_1}{\longrightarrow} X,$$

dabei ist der erste ∞-Funktor durch

$$F_{n+m} \longrightarrow F_n \otimes F_m : u_{n+m} \longmapsto u_n \otimes u_m$$

induziert. Dadurch ist eine Abbdildung

$$\lambda : HOM(X,X) \times HOM(X,X) \longrightarrow HOM(X,X)$$

gegeben. Da sich das Randbilden und die Komposition im wesentlichen auf den ∞-Kategorien F_n abspielen, induziert diese Abbildung einen ∞-Funktor

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_2 : HOM(X,X) \otimes HOM(X,X) & \longrightarrow & HOM(X,X) \\ F \otimes G & \longmapsto & \lambda(F,G) \end{array}.$$

Sind $f : G(C) \to HOM(X,X)$ und $g : G(D) \to HOM(X,X)$ ∞-Funktoren, so ist

$$G(C \times D) \longrightarrow G(C) \times G(D) \xrightarrow{(f,g)} HOM(X,X) \times HOM(X,X) \xrightarrow{\lambda} HOM(X,X)$$

aufgrund der Definition von d_p^α wieder ein ∞-Funktor. Das liefert eine Abbildung

$$\begin{gathered} Hom(G(C), HOM(X,X)) \times Hom(G(D), HOM(X,X)) \\ \downarrow \\ Hom(G(C \times D), HOM(X,X)). \end{gathered}$$

Aufgrund der Definition der Komposition induziert diese Abbildung einen ∞-Funktor

$$\begin{aligned} & HOM(X,X) \otimes HOM(X,X) \\ & \quad = \quad (Hom(J, HOM(X,X)) \times Hom(J, HOM(X,X))) \otimes_{\mathcal{K}^2} J_2 \\ & \quad \longrightarrow \quad Hom(J, HOM(X,X)) \otimes_{\mathcal{K}} J \\ & \quad \cong \quad HOM(X,X). \end{aligned}$$

Für $n > 2$ sei

$$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ (Id \otimes \Lambda_2).$$

Für $G_1, \ldots, G_k \in HOM(X,X)$ ist $\Lambda_n(G_1 \otimes \cdots G_n)$ also durch folgende Komposition repräsentiert.

$$F_{n_1+\cdots+n_k} \otimes X \longrightarrow F_{n_1} \otimes \cdots \otimes F_{n_k} \otimes X \xrightarrow{Id \otimes G_k} F_{n_1} \otimes \cdots \otimes F_{n_{k-1}} \otimes X$$

$$\xrightarrow{Id \otimes G_{k-1}} \cdots \longrightarrow F_{n_1} \otimes F_{n_2} \otimes X \xrightarrow{Id \otimes G_{n_2}} F_{n_1} \otimes X \xrightarrow{G_{n_1}} X$$

Der erste ∞-Funktor ist durch

$$F_{n_1+\cdots+n_k} \longrightarrow F_{n_1} \otimes \cdots \otimes F_{n_k} : u_{n_1+\cdots+n_k} \longmapsto u_{n_1} \otimes \cdots \otimes u_{n_k}$$

induziert. Da

$$\begin{tikzcd} F_{l+m+n} \arrow[r] \arrow[d] & F_l \otimes F_{m+n} \arrow[d] \\ F_{l+m} \otimes F_n \arrow[r] & F_l \otimes F_m \otimes F_n \end{tikzcd} \quad \text{mit} \quad \begin{tikzcd} u_{l+m+n} \arrow[r] \arrow[d] & u_l \otimes u_{m+n} \arrow[d] \\ u_{l+m} \otimes u_n \arrow[r] & u_l \otimes u_m \otimes u_n \end{tikzcd}$$

kommutiert, folgt

$$\Lambda_p \circ (\Lambda_{n_1} \otimes \cdots \otimes \Lambda_{n_p}) = \Lambda_{n_1+\cdots+n_p}.$$

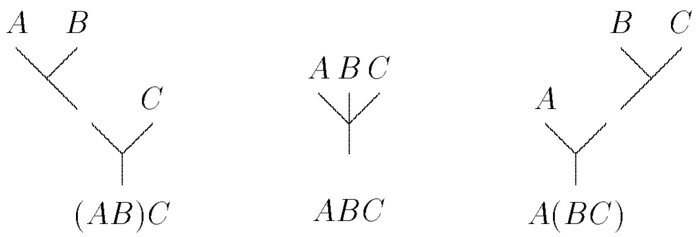
Folglich ist $HOM(X,X)$ eine strikt monoidale ∞-Kategorie.

2.2 Bäume

Es werden Strukturen definiert, die nicht so restriktiv sind wie eine strikt monoidale Struktur. Zum Beispiel wird nicht mehr die Gleichheit der Elemente (AB)C, ABC und A(BC) für Objekte A, B und C gefordert, sondern die Existenz zweier 1-Morphismen

$$(AB)C \longleftarrow ABC \longrightarrow A(BC).$$

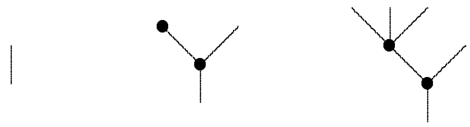
Zur Beschreibung schwach assoziativer Strukturen eignet sich die von Boardman/Vogt entwickelte Sprache der Bäume. Mit Hilfe von Bäumen lassen sich geklammerte Ausdrücke kodieren.



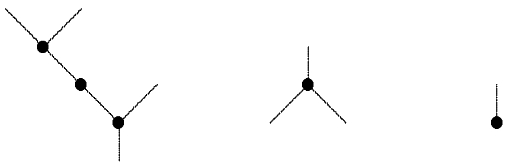
In Verbindung mit dem Tensorprodukt von Al-Agl/Steiner liefert die Sprache der Bäume eine elegante Beschreibung monoidaler ∞-Kategorien.

2.2.1 Bäume

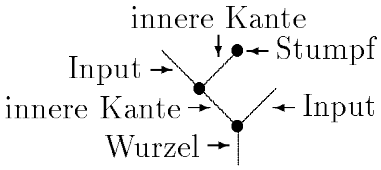
Im folgenden ist mit *Baum* eine bestimmte Art gerichteter ebener Baum gemeint. Nicht jede Kante muß Ecken an beiden Seiten besitzen. An jeder Ecke startet genau eine Kante. Es gibt keine Ecke, an der genau eine Kante endet. Die Menge der Bäume wird mit $\mathcal{T}_1$ bezeichnet. Hier sind einige Beispiele.



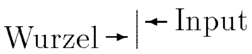
Die Richtung der Kanten verlaufe stets von oben nach unten. Bei den folgenden Bildern handelt es sich nicht um Bäume.



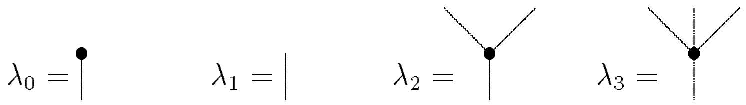
Eine Kante wird *Input* genannt, falls sie keine Anfangsecke besitzt, *Wurzel*, falls sie keine Endecke besitzt, und *innere Kante* in den verbleibenden Fällen. Eine Ecke, an der keine Kante endet, wird *Stumpf* genannt.



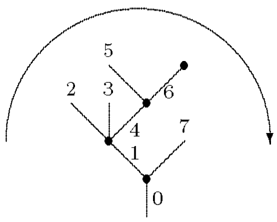
Beim trivialen Baum (nur eine Kante, kein Stumpf) ist die Kante sowohl Wurzel als auch Input.



λ_n bezeichne den Baum mit n Inputs, der keine inneren Kanten hat.



Kantennumerierung. Um einen besseren Zugriff auf die Kanten zu bekommen, werden diese numeriert. Ist ein Baum gegeben, so werden die Kanten (Wurzel, innere Kanten, Inputs) wie folgt numeriert:
Mit 0 bei der Wurzel beginnend wird der Umriß des Baumes im Uhrzeigersinn umlaufen, jeder noch nicht numerierten Kante e wird die kleinste vorher noch nicht vergebene natürliche Zahl zugeordnet.



deg_T sei die Anzahl der Kanten von T minus 1. Es existiert also eine Bijektion zwischen der Menge der Kanten und der Menge $\{0, \ldots, deg_T\}$. Ist $i \in \{0, \ldots, deg_T\}$, so bezeichnet $e_T(i)$ die zur Zahl i gehörende Kante, es wird auch kurz $e(i)$ geschrieben. Der *Nachfolger* einer Kante $e \neq e(0)$ von T ist die Kante, die der Kante e auf dem Weg zur Wurzel folgt.
Die Numerierung wird in der Regel nicht spezifiziert, da sie eindeutig durch den Baum gegeben ist.

2.2.2 Bäume und ∞-Kategorien

Die ∞-Kategorie X_T. Ist X eine ∞-Kategorie und T ein Baum, so sei

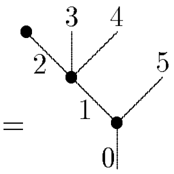
$$X_T := (X_T)_{e(0)} \otimes \cdots \otimes (X_T)_{e(deg_T)},$$

mit

$$(X_T)_e = \begin{cases} X, & \text{falls e ein Input ist,} \\ \mathcal{L}_1, & \text{falls e eine innere Kante ist,} \\ \mathcal{L}_0, & \text{falls e die Wurzel ist, jedoch kein Input.} \end{cases}$$

$(X_T)_e$ wird *e-Komponente* von X_T genannt. Ist $T \neq \lambda_0, \lambda_1$, so ist $(X_T)_{e(0)} = \mathcal{L}_0$ und somit $X_T \cong (X_T)_{e(1)} \otimes \cdots \otimes (X_T)_{e(deg_T)}$. Es wird später ersichtlich, warum die 0-Komponente trotzdem nicht unterschlagen wird.

Beispiel 2.8

Ist $T =$ 

, *so ist* $X_T = \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X \otimes X \otimes X$,

$$X_{\lambda_0} = \mathcal{L}_0, \quad X_{\lambda_1} = X.$$

Ist Y eine weitere ∞-Kategorie und e eine Kante von T, so sei

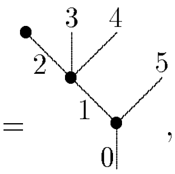
$$X_T^{(e,Y)} = (X_T^{(e,Y)})_{e(0)} \otimes \cdots \otimes (X_T^{(e,Y)})_{e(deg_T)},$$

wobei

$$(X_T^{(e,Y)})_{e'} = \begin{cases} (X_T)_{e'}, & \text{falls } e \neq e', \\ Y, & \text{falls } e = e'. \end{cases}$$

Die e-Komponente $(X_T)_e$ wird also durch Y ersetzt.

Beispiel 2.9

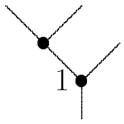
Ist $T =$ 

, *so ist* $X_T^{(e(2),Y)} = \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes Y \otimes X \otimes X \otimes X$.

Es kommt häufig vor, daß e ein Input ist und Y wieder eine ∞-Kategorie der Form X_T , dafür wird eine neue Notation eingeführt.

Komposition von Bäumen. Bäume sollen komponiert werden und Kompositionen speziell gekennzeichnet werden. Dazu werden einige Kanten mit einer Marke 1 versehen, nicht zu verwechseln mit der Nummer 1. Bäume mit mindestens einer Marke werden zusammengesetzt genannt.

Definition 2.10 *Ein zusammengesetzter Baum ist ein Baum T, bei dem einige Kanten mit einer 1 versehen sind. Die Menge der zusammengesetzten Bäume wird mit $\mathcal{T}_1'$ bezeichnet.*



Bei zusammengesetzten Bäumen handelt es sich also gewissermaßen um eine Kollektion von Bäumen, die an den Kanten, die mit einer 1 versehen sind, aufeinandergesteckt sind.

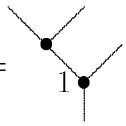
Der zusammengesetzte Baum $T_2 \circ_e T_1$. T_1 und T_2 seien zusammengesetzte Bäume. Ist e ein Input von T_2, so sei $T_2 \circ_e T_1$ der zusammengesetzte Baum, der aus T_1 und T_2 entsteht, indem die Wurzel von T_1 mit dem Input e von T_2 identifiziert wird und die der Kante e entsprechende Kante des neuen Baumes mit einer 1 versehen wird, falls diese Kante noch nicht mit einer 1 versehen ist.

Für zusammengesetzte Bäume T wird X_T induktiv definiert. Ist T nicht zusammengesetzt, so ist X_T wie oben definiert. Ist $T = T_2 \circ_e T_1$ ein zusammengesetzter Baum und sind X_{T_1} und X_{T_2} bereits definiert, so sei

$$X_T := X_{T_2}^{(e, X_{T_1})}.$$

Damit ist X_T für jeden zusammengesetzten Baum T wohldefiniert. Ist T ein zusammengesetzter Baum, so ist die *e-Komponente* $(X_T)_e$ von X_T die der Kante e zugeordnete ∞-Kategorie.

Beispiel 2.11

Ist $T =$ 

, *so ist* $X_T = \mathcal{L}_0 \otimes (\mathcal{L}_0 \otimes X \otimes X) \otimes X.$

Ist e die Kante des Baumes T, die mit einer 1 versehen ist, so ist $\mathcal{L}_0$ die e-Komponente von X_T.

Erweiterungsprozeß. Ist ein System von ∞-Funktoren

$$\{F_T : X_T \to X\}_{T \in \mathcal{T}_1}$$

gegeben, so läßt sich dieses System wie folgt zu einem System

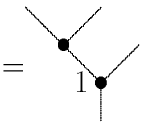
$$\{F_T : X_T \to X\}_{T \in \mathcal{T}_1'}$$

erweitern. Ist $T = T_2 \circ_e T_1$ und sind die ∞-Funktoren F_{T_1} und F_{T_2} bereits definiert, so sei F_T die Komposition

$$X_T = X_{T_2}^{(e,X_{T_1})} \xrightarrow{Id_{X_{T_2}}^{(e,F_{T_1})}} X_{T_2} \xrightarrow{F_{T_2}} X,$$

dabei ist der ∞-Funktor $Id_{X_{T_2}}^{(e,F_{T_1})}$ durch den ∞-Funktor F_{T_1} induziert. Damit ist für jeden zusammengesetzten Baum T der ∞-Funktor F_T wohldefiniert. Ist ein System von ∞-Funktoren $\{F_T : X_T \to X\}$ gegeben, und ist T ein zusammengesetzter Baum, so ist mit F_T stets der gerade definierte ∞-Funktor gemeint.

Beispiel 2.12

Es sei T =  $= \lambda_2 \circ_{e(1)} \lambda_2.$

Es ist dann $F_T = F_{\lambda_2} \circ Id_{X_{T_2}}^{(e(1),F_{\lambda_2})} = F_{\lambda_2} \circ (id_{\mathcal{L}_0} \otimes F_{\lambda_2} \otimes id_X).$

$$F_T : X_T = \mathcal{L}_0 \otimes (\mathcal{L}_0 \otimes X \otimes X) \otimes X \xrightarrow{Id_{X_{T_2}}^{(e(1),F_{\lambda_2})}} \mathcal{L}_0 \otimes X \otimes X \xrightarrow{F_{\lambda_2}} X,$$

2.3 Monoidale ∞-Kategorien

Es werden monoidale ∞-Kategorien definiert. Anschließend wird gezeigt, daß jede strikt monoidale ∞-Kategorie als monoidale ∞-Kategorie aufgefaßt werden kann.

2.3.1 Monoidale ∞-Kategorien

Eine monoidale ∞-Kategorie ist eine ∞-Kategorie X zusammen mit einem System von ∞-Funktoren

$$\{F_T : X_T \to X\}_{T \in \mathcal{T}_1},$$

das gewisse Kohärenzbedingungen erfüllt. Im Falle einer monoidalen ∞-Kategorie ist zu sagen, was in den Endpunkten der $\mathcal{L}_1$-Faktoren (d.h. $0, 1 \in \mathcal{L}_1$) von X_T geschieht. Zur Formulierung der Kohärenzbedingungen werden noch einige Bezeichnungen benötigt.

Die ∞-Funktoren $X_{T_{/e}} \xleftarrow{j_T^{/e}} X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \xrightarrow{i_0^e} X_T$

Der ∞-Funktor i_0^e. e sei eine innere Kante von T. Der ∞-Funktor

$$i_0^e : X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \longrightarrow X_T$$

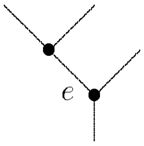
ist durch

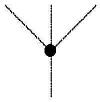
$$i_0 : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{L}_1 : 0 \longmapsto 0$$

(auf der e-Komponente) induziert.

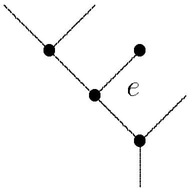
Der Baum $T_{/e}$. e sei eine innere Kante des Baumes T. Der Baum $T_{/e}$ entsteht aus dem Baum T wie folgt: Die Kante e wird geschrumpft, gibt es nun eine Ecke, an der genau eine Kante endet, so wird diese entfernt. Das Ergebnis ist dann der Baum $T_{/e}$.

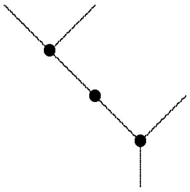
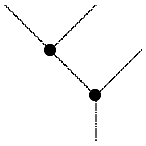
· 1. Fall: Nur schrumpfen.

$T =$ 

$T_{/e} =$ 

· 2. Fall: Schrumpfen und reduzieren.

$T =$ 


$T_{/e} =$ 

Der ∞-Funktor $j_T^{/e}$. Entsteht $T_{/e}$ aus T durch Schrumpfen der Kante e, so ist

$$j_T^{/e} : X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \longrightarrow X_{T_{/e}}$$

das Vergessen der e-Komponente (hierbei wird die Existenz von Projektionen benutzt.). Andernfalls muß weiter reduziert werden. Es existiert dann genau eine von e verschiedene Kante, die den gleichen Nachfolger wie e hat. Diese Kante wird mit e_2 bezeichnet, der Nachfolger mit e_1. $\bar{e}$ sei die den Kanten e_1 und e_2 entsprechende Kante in $T_{/e}$. $j_T^{/e}$ ist in diesem Fall zusätzlich durch einen ∞-Funktor

$$\mu : (X_T^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_1} \otimes (X_T^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_2} \longrightarrow (X_{T_{/e}})_{\bar{e}}$$

unter Ausnutzung des kanonischen Isomorphismus

$$A \otimes \mathcal{L}_0 \otimes B \cong A \otimes B$$

induziert. Der ∞-Funktor μ ist durch

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_1 \xrightarrow{max} \mathcal{L}_1, & t_1 \otimes t_2 \longmapsto max(t_1, t_2), & \text{falls } e_1 \text{ und } e_2 \text{ innnere Kanten,} \\
\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \xrightarrow{pr_1} \mathcal{L}_0, & t_1 \otimes t_2 \longmapsto t_1, & \text{falls } e_1 \text{ Wurzel und } e_2 \text{ kein Input,} \\
\mathcal{L}_1 \otimes X \xrightarrow{pr_2} X, & t \otimes x \longmapsto x, & \text{falls } e_2 \text{ Input und } e_1 \text{ innere Kante,} \\
\mathcal{L}_0 \otimes X \xrightarrow{pr_2} X, & t \otimes x \longmapsto x, & \text{falls } e_2 \text{ Input und } e_1 \text{ Wurzel.}
\end{array}$$

gegeben, dabei sind $t_1, t_2 \in ob\mathcal{L}_1$.

Die ∞-Funktoren $X_{T_e} \xleftarrow{j_T^e} X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \xrightarrow{i_1^e} X_T$

Der ∞-Funktor i_1^e. Der ∞-Funktor

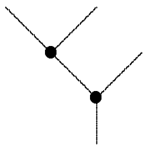
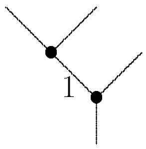
$$i_1^e : X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \longrightarrow X_T$$

ist durch

$$i_1 : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{L}_1 : 0 \longmapsto 1$$

(auf der e-Komponente) induziert.

Der zusammengesetzte Baum T_e. e sei eine Kante des Baumes T. Der zusammengesetzte Baum T_e entsteht aus dem Baum T, indem die Kante e mit einer 1 versehen wird.

$T =$  $T_e =$ 

Der ∞-Funktor j_T^e. Der ∞-Funktor

$$j_T^e : X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \longrightarrow X_{T_e}$$

sei der kanonische Klammerisomorphismus.

Monoidale ∞-Kategorien

Es läßt sich nun definieren, was eine monoidale ∞-Kategorie ist.

Definition 2.13 *Eine monoidale ∞-Kategorie (X,F) ist eine ∞-Kategorie X zusammen mit einem System von ∞-Funktoren*

$$\{F_T : X_T \to X\}_{T \in \mathcal{T}_1},$$

für das $F_| = Id$ ist, und das die folgenden Kohärenzbedingungen erfüllt. Für jeden Baum T und jede innere Kante e von T kommutieren die folgenden Diagramme.

$$\begin{tikzcd} X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "i_0^e"] \arrow[d, "j_T^{/e}"'] & X_T \arrow[d, "F_T"] \\ X_{T_{/e}} \arrow[r, "F_{T_{/e}}"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "i_1^e"] \arrow[d, "j_T^e"'] & X_T \arrow[d, "F_T"] \\ X_{T_e} \arrow[r, "F_{T_e}"'] & X \end{tikzcd}$$

(Der ∞-Funktor F_{T_e} ist auf Seite 27 definiert.)

Beispiel 2.14 *Monoidale Kategorien im Sinne von [10] liefern monoidale ∞-Kategorien.*

Ist (X, F) eine monoidale ∞-Kategorie, und sind $x_1, \cdots, x_n \in X$, so sei

$$x_1 \cdots x_n := F_{\lambda_n}(0 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n).$$

In einer monoidalen ∞-Kategorie (X, F) gelten zum Beispiel folgende Beziehungen.

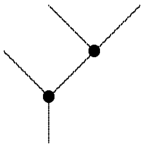
· Sind A, B und C Objekte, so gilt im allgemeinen nicht mehr die Gleichheit

$$A(BC) = ABC = (AB)C,$$

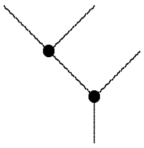
sondern es existieren zwei 1-Morphismen

$$A(BC) \xleftarrow{a'_{A,B,C}} ABC \xrightarrow{a_{A,B,C}} (AB)C.$$

$a'_{A,B,C} : ABC \to A(BC)$ ist durch $F_{T_1}(0 \otimes A \otimes \to \otimes B \otimes C)$ mit

$T_1 =$ 

gegeben, dabei ist $\to$ der von der Identität verschiedene 1-Morphismus in $\mathcal{L}_1$. $a_{A,B,C} : ABC \to (AB)C$ ist durch $F_{T_2}(0 \otimes \to \otimes A \otimes B \otimes C)$ mit

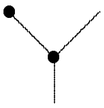
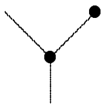
$T_2 =$ 

gegeben.

· Es sei $1 := F_{\lambda_0}(0)$. Zu jedem Objekt A existieren ein 1-Morphismen

$$A \xrightarrow{l_A} 1A \quad \text{und} \quad A \xrightarrow{r_A} A1.$$

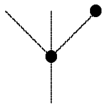
Es ist $l_A = F_{T_3}(0 \otimes \to \otimes A)$ und $r_A = F_{T_4}(0 \otimes A \otimes \to)$ mit

$T_3 =$  $T_4 =$  .

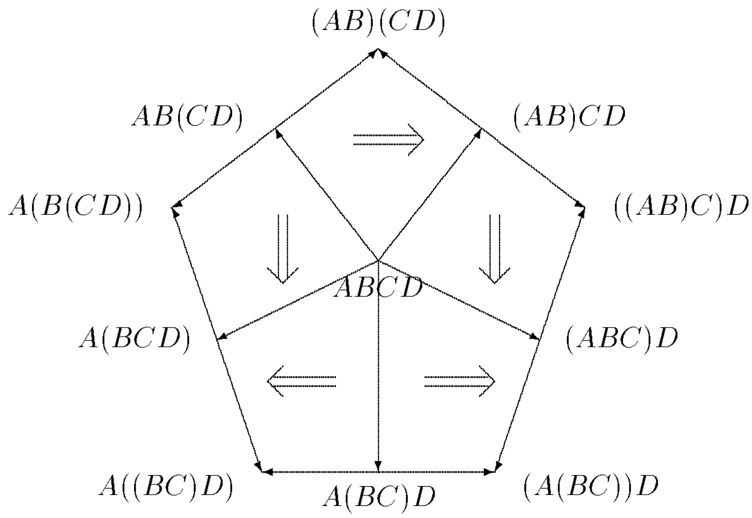
· Sind A, A', B und C Objekte, so kommutieren die folgenden Diagramme (im allgemeinen) nicht strikt, sondern nur bis auf einen (durch die Strukturdaten festgelegten) 2-Morphismus.

$$
\begin{tikzcd}
ABC \arrow[r, "a'_{A,B,C}"] \arrow[d, "uBC"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow"] & A(BC) \arrow[d, "u(BC)"] \\
A'BC \arrow[r, "a'_{A',B,C}"'] & A'(BC)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
ABC \arrow[r, "a_{A,B,C}"] \arrow[d, "uBC"'] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow"] & (AB)C \arrow[d, "(uB)C"] \\
A'BC \arrow[r, "a_{A',B,C}"'] & (A'B)C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
AB \arrow[d] \arrow[dr, "Ar_B"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\Swarrow"] & \\
AB1 \arrow[r, "a'_{A,B,1}"'] & A(B1)
\end{tikzcd}
$$

Der 1-Morphismus $AB \to AB1$ im rechten Diagramm ist $F_T(0 \otimes A \otimes B \otimes \to)$ mit

T =  .

· Für je vier Objekte A, B, C und D existieren 2-Morphismen



· Ist B ein Objekt und sind $A_1 \xrightarrow{u} A_2$ und $A_2 \xrightarrow{v} A_3$ 1-Morphismen, so kommutiert das folgende Diagramm strikt.

$$
\begin{tikzcd}
A_1B \arrow[d, "uB"'] \arrow[dr, "(u \times_0 v)B"] & \\
A_2B \arrow[r, "vB"'] & A_3B
\end{tikzcd}
$$

2.3.2 Strikt monoidale ∞-Kategorien und monoidale ∞-Kategorien

Es wird gezeigt, daß sich jede strikt monoidale ∞-Kategorie als monoidale ∞-Kategorie auffassen läßt. Ist $T \neq \lambda_0, \lambda_1$ ein Baum, so ist

$$X_T \cong (X_T)_{e(1)} \otimes \cdots \otimes (X_T)_{e(deg_T)}.$$

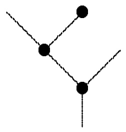
In diesem Abschnitt wird die rechte Seite als Definition von X_T für $T \neq \lambda_0, \lambda_1$ verwendet. Entsprechend sind $X_T^{(e,\mathcal{L}_0)}$, j_T^e, usw zu verstehen. Damit ist

$$X_{\lambda_n} = X^{\otimes n}.$$

Der ∞-Funktor $\varepsilon_T : X_T \to X^{\otimes n}$. Hat T n Inputs, so ist der ∞-Funktor

$$\varepsilon_T : X_T \to X^{\otimes n}$$

durch das Vergessen aller e-Komponenten, wobei e eine innere Kante ist, gegeben.

Ist T =  , so ist $\varepsilon_T \quad : \quad \begin{array}{rcl} \mathcal{L}_1 \otimes X \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X & \longrightarrow & X \otimes X \\ t_1 \otimes x_1 \otimes t_2 \otimes x_2 & \longmapsto & x_1 \otimes x_2. \end{array}$

Lemma 2.15 *Ist (X, Λ) eine strikt monoidale ∞-Kategorie, so ist $(X, \{F_T\}_{T\in\mathcal{T}})$ mit*

$$F_T : X_T \xrightarrow{\varepsilon_T} X^{\otimes n} \xrightarrow{\Lambda_n} X,$$

wobei n die Anzahl der Inputs von T sei, eine monoidale ∞-Kategorie.

Beweis: Es ist $F_| = Id$. Ist e eine innere Kante von T, so folgt aus der Kommutativität des Diagrammes

$$\begin{tikzcd} X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "i_0^e"] \arrow[d, "j_T^{/e}"'] & X_T \arrow[d, "\varepsilon_T"] & \\ X_{T_{/e}} \arrow[r, "\varepsilon_{T_{/e}}"'] & X^{\otimes n} \arrow[r, "\Lambda_n"'] & X \end{tikzcd}$$

die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "i_0^e"] \arrow[d, "j_T^{/e}"'] & X_T \arrow[d, "F_T"] \\ X_{T_{/e}} \arrow[r, "F_{T_{/e}}"'] & X \end{tikzcd}.$$

Damit ist eine der beiden Kohärenzbedingungen gezeigt.
e sei eine innere Kante von T. Weiter sei $T_e = T_2 \circ_e T_1$, q die Anzahl der Inputs von T_1, p die Anzahl der Inputs von T_2 und n die Anzahl der Inputs von T. Der ∞-Funktor

$$Id^{(e,\Lambda_q)}_{X_{\lambda_p}} : X^{(e,X^{\otimes q})}_{\lambda_p} \longrightarrow X^{\otimes p}$$

sei durch den ∞-Funktor Λ_q induziert. Der ∞-Funktor

$$\varepsilon^{(e,\varepsilon_{T_1})}_{T_2} : X_{T_e} = X^{(e,X_{T_1})}_{T_2} \longrightarrow X^{(e,X^{\otimes q})}_{\lambda_p}$$

entsteht aus dem ∞-Funktor ε_{T_2}, indem die zum Input e von T_2 gehörende Komponente $X \to X$ durch den ∞-Funktor ε_{T_1} ersetzt wird.
Das rechte Quadrat im folgende Diagramm kommutiert, da X strikt monoidal ist.

$$\begin{tikzcd}
X_{T_e} \arrow[rr, "\varepsilon^{(e,\varepsilon_{T_1})}_{T_2}"] \arrow[d, "\cong"'] & & X^{(e,X^{\otimes q})}_{\lambda_p} \arrow[r, "Id^{(e,\Lambda_q)}"] \arrow[d, "\cong"'] & X^{\otimes p} \arrow[d, "\Lambda_p"] \\
X^{(e,\mathcal{L}_0)}_T \arrow[r, "i^e_1"'] & X_T \arrow[r, "\varepsilon_T"'] & X^{\otimes n} \arrow[r, "\Lambda_n"'] & X
\end{tikzcd}$$

Das linke Quadrat kommutiert, da die vertikalen ∞-Funktoren kanonische Klammerisomorphismen und die horizontalen die 'Einschränkung auf die Inputs' sind. Es ist $\Lambda_p \circ Id^{(e,\Lambda_q)} \circ \varepsilon^{(e,\varepsilon_{T_1})}_{T_2} = F_{T_e}$, somit folgt aus der Kommutativität des Diagramms die Behauptung.

$\square$

Diese Zuordnung ist injektiv.

Lemma 2.16 *Ist (X,F) eine monoidale ∞-Kategorie und kommutiert*

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[r, "F_T"] \arrow[dr, "\varepsilon_T"'] & X \\
& X^{\otimes n} \arrow[u, "F_{\lambda_n}"']
\end{tikzcd}$$

für jeden Baum T, so wird X durch

$$\Lambda_n = F_{\lambda_n} : X^{\otimes n} \longrightarrow X$$

zu einer strikt monoidale ∞-Kategorie.

Beweis: Es genügt die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
X^{\otimes p+q-1} \arrow[r, "\Lambda_{p+q-1}"] \arrow[d, "\cong"'] & X \\
X \otimes \cdots \otimes X^{\otimes q} \otimes \cdots \otimes X \arrow[r, "Id \otimes \cdots \otimes \Lambda_q \otimes \cdots \otimes Id"'] & X^{\otimes p} \arrow[u, "\Lambda_p"']
\end{tikzcd}$$

zu zeigen. Das ist gleichbedeutend mit der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
X_{\lambda_{p+q-1}} \arrow[r, "F_{\lambda_{p+q-1}}"] \arrow[d, "\cong"'] & X \\
X_{\lambda_p}^{(e,\lambda_q)} \arrow[r, "Id^{(e,F_{\lambda_q})}"'] & X_{\lambda_p} \arrow[u, "F_{\lambda_p}"']
\end{tikzcd} .$$

Dabei ist $Id^{(e,F_{\lambda_q})} : X_{\lambda_p}^{(e,\lambda_q)} \to X_{\lambda_p}$ durch F_{λ_q} induziert. Für $q = 1$ ist die Kommutativität des Diagramms offensichtlich. Für $q \neq 1$ sei T der Baum, der entsteht, wenn die Wurzel von λ_q mit dem Input e von λ_p identifiziert wird. e ist eine innere Kante von T. Es ist $\varepsilon_T \circ i_0^e = \varepsilon_T \circ i_1^e$ und somit $F_T \circ i_0^e = F_T \circ i_1^e$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X_{\lambda_{p+q-1}} \arrow[drr, "F_{\lambda_{p+q-1}}"] \arrow[dd, bend right=60, "\cong"'] & & \\
X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[u, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[rr, "F_T \circ i_0^e"', "= F_T \circ i_1^e"'] & & X \\
X_{\lambda_p}^{(e,\lambda_q)} \arrow[urr, "F_{\lambda_p \circ_e \lambda_q}"'] & &
\end{tikzcd}$$

kommutiert aufgrund der Kohärenz. Mit $F_{\lambda_p \circ_e \lambda_q} = F_{\lambda_p} \circ Id_{X_{\lambda_p}}^{(e,F_{\lambda_q})}$ folgt die Behauptung. $\square$

Kapitel 3

Monoidale ∞-Funktoren

Es werden strikt monoidale ∞-Funktoren vorgestellt. In einem späteren Kapitel werden monoidale ∞-Kategorien rektifiziert. Bei der Rektifizierung wird sich zeigen, daß strikt monoidale ∞-Funktoren zu strikt sind. Aus diesem Grunde werden monoidale ∞-Funktoren eingeführt. Im nächsten Kapitel wird die Komposition monoidaler ∞-Funktoren erklärt und bewiesen, daß die Komposition assoziativ ist. Die monoidalen ∞-Kategorien bilden zusammen mit den monoidalen ∞-Funktoren eine Kategorie.

3.1 Strikt monoidale ∞-Funktoren.

Der ∞-Funktor $F_T^{X_1,X_2}$. Ist $F : X_1 \to X_2$ ein ∞-Funktor, so sei für $T \in \mathcal{T}_1$ der ∞-Funktor

$$F_T^{X_1,X_2} : X_{1T} \longrightarrow X_{2T}$$

durch

$$F_T^{X_1,X_2} := (F_T^{X_1,X_2})_{e(0)} \otimes \cdots \otimes (F_T^{X_1,X_2})_{e(deg_T)},$$

mit

$$(F_T^{X_1,X_2})_e = \begin{cases} F, & \text{falls e Input,} \\ Id, & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert

Definition 3.1 *Ein strikt monoidaler ∞-Funktor $F : X_1 \to X_2$ zwischen monoidalen ∞-Kategorien (X_1, F_1) und (X_2, F_2), ist ein ∞-Funktor $F : X_1 \to X_2$ für den das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} X_{1T} \arrow[r, "F_{1T}"] \arrow[d, "F_T^{X_1,X_2}"'] & X_1 \arrow[d, "F"] \\ X_{2T} \arrow[r, "F_{2T}"'] & X_2 \end{tikzcd}$$

für jeden Baum $T \in \mathcal{T}_1$ kommutiert.

Beispiel 3.2 · *Sind $F : X \to Y$ und $G : Y \to Z$ strikt monoidale ∞-Funktoren zwischen monoidalen ∞-Kategorien, so ist die Komposition*

$$X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{G} Z$$

ebenfalls ein strikt monoidaler ∞-Funktor.

· *Ist X eine monoidale ∞-Kategorie, so ist die Identität $Id_X : X \to X$ ein strikt monoidaler ∞-Funktor.*

Die Komposition strikt monoidaler ∞-Funktoren ist assoziativ und es gilt $F \circ Id = F = Id \circ F$. Folglich bilden die monoidalen ∞-Kategorien und die strikt monoidalen ∞-Funktoren eine Kategorie.

Bezeichnung 3.3 *Die Kategorie der monoidalen ∞-Kategorien und der strikt monoidalen ∞-Funktoren wird mit*

$$mon' \infty - cat$$

bezeichnet.

Lemma 3.4 *Jeder strikt monoidale ∞-Funktor zwischen strikt monoidalen ∞-Kategorien ist ein strikt monoidaler ∞-Funktor zwischen den entsprechenden monoidalen ∞-Kategorien (siehe 2.15).*

Beweis: $F : X \to Y$ sei ein strikt monoidaler ∞-Funktor zwischen strikt monoidalen ∞-Kategorien (X, Λ^X), (Y, Λ^Y). Für jeden Baum $T \in \mathcal{T}_1$ kommutiert das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[r, "\varepsilon_T"] \arrow[d, "F_T^{X,Y}"'] & X^{\otimes n} \arrow[r, "\Lambda_n^X"] \arrow[d, "F^{\otimes n}"'] & X \arrow[d, "F"] \\
Y_T \arrow[r, "\varepsilon_T"'] & Y^{\otimes n} \arrow[r, "\Lambda_n^Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Aus der Kommutativität des Diagramms folgt die Behauptung. □

Damit ergibt sich auch sofort das folgende Lemma.

Lemma 3.5 *Es gilt*

$$str\ mon\ \infty - cat \subset mon' \infty - cat.$$

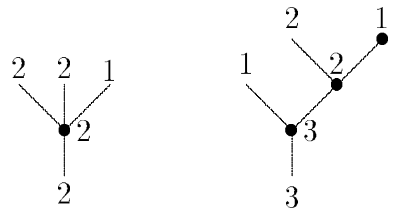
□

3.2 Farbige Bäume

Es steht eine endliche Menge von Farben zur Verfügung, diese Farben seien $1, \ldots, k$. Es sei $\underline{k} := \{1, \ldots, k\}$.

Definition 3.6 *Ein k-farbiger Baum T ist ein Baum, bei dem jeder Ecke, jedem Anfangspunkt eines Inputs und dem Endpunkt der Wurzel eine Zahl (Farbe genannt) aus* $\{1, \ldots, k\}$ *zugeordnet ist, so daß die Zahlen beim Durchlaufen eines Weges in Richtung Wurzel nicht kleiner werden. Die Menge der k-farbigen Bäume wird mit* $\mathcal{T}_k$ *bezeichnet.*

Beispiel 3.7 *Es folgen einige Beispiele für farbige Bäume.*



Steht am Anfang einer Kante die Zahl a und am Ende die Zahl b, so hat man die Vorstellung, daß die Kante der Reihe nach (dh. beim Durchlaufen in Richtung Wurzel) die Farben $a, a+1, \ldots, b-1, b$ annimmt.

Ist T ein k-farbiger Baum, so sei wT die Zahl am Ende der Wurzel. wT wird auch *Wurzelfarbe* genannt. Ist e ein Input, so wird die Farbe am Anfang des Inputs e *Inputfarbe* (von e) genannt.

Filtrierung. Die farbigen Bäume werden filtriert. Ist e eine Kante eines Baumes T, a die Zahl am Anfang und b die Zahl am Ende der Kante e, so ist e eine *n-Kante*, falls e die Farbe n animmt, also $a \leq n \leq b$ ist. (T,n) bezeichne die Menge der n-Kanten des Baumes T. Durch die Zuordnung

$$T \longmapsto (wT, deg_T, \sum_{l=1}^{wT} \#(T, l))$$

werden die k-farbigen Bäume filtriert. Ein Baum T' ist von kleinerer Filtrierung als ein Baum T, falls

$$wT' < wT$$

oder falls

$$wT' = wT, deg_{T'} < deg_T$$

oder falls

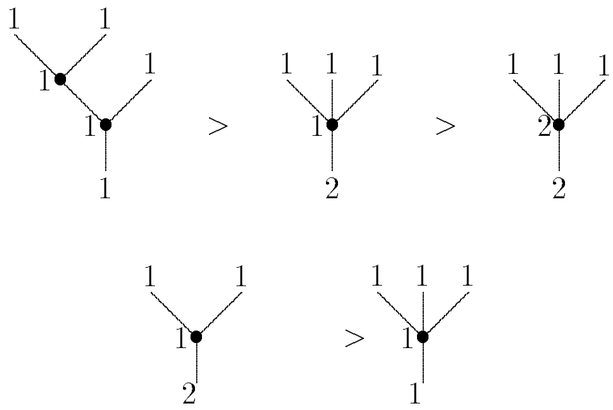
$$wT' = wT, deg_{T'} = deg_T, \sum_{1}^{wT'} \#(T', l) > \sum_{1}^{wT} \#(T, l).$$

Ist T' von kleinerer Filtrierung, so wird $T' < T$ geschrieben. Ein Baum T' ist also von kleinerer Filtrierung als ein Baum T

· falls die Wurzelfarbe von T' kleiner als die von T ist,

· oder falls die Wurzelfarbe von T' gleich der von T ist und T' weniger Kanten als T besitzt,

· oder falls die Wurzelfarbe von T' gleich der von T ist, die Kantenzahl von T und T' gleich sind und die Summe der n-Kanten von T' größer als die Summe der n-Kanten von T ist.



Verschiedene Begriffe werden jetzt auf den Fall farbiger Bäume erweitert (vgl Kapitel 2).

k-farbige Bäume und ∞-Kategorien. Ist $X = (X_1, \dots, X_k)$ ein k-Tupel von ∞-Kategorien und T ein k-farbiger Baum, so sei

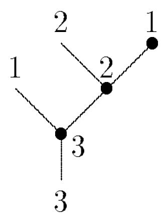
$$X_T := (X_T)_{e(0)} \otimes \cdots \otimes (X_T)_{e(deg_T)}$$

mit

$$(X_T)_e := \begin{cases} X_a, & \text{falls e ein Input ist,} \\ \mathcal{L}_{b-a+1}, & \text{falls e eine innere Kante ist,} \\ \mathcal{L}_{b-a}, & \text{falls e die Wurzel, jedoch kein Input ist,} \end{cases}$$

dabei ist a die Farbe am Anfang und b die am Ende der Kante e. $(X_T)_e$ wird *e-Komponente von X_T* genannt.

Beispiel 3.8

Ist $T =$  *, so ist* $X_T = \mathcal{L}_0 \otimes X_1 \otimes \mathcal{L}_2 \otimes X_2 \otimes \mathcal{L}_2$.

Die ∞-Kategorie $X_T^{(e,Y)}$. Ist Y eine ∞-Kategorie, T ein k-farbiger Baum und e eine Kante von T, so sei

$$X_T^{(e,Y)} = (X_T^{(e,Y)})_{e(0)} \otimes \cdots \otimes (X_T^{(e,Y)})_{e(deg_T)}$$

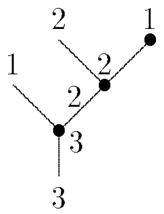
mit

$$(X_T^{(e,Y)})_{e'} = \begin{cases} Y, & \text{falls } e' = e, \\ (X_T)_{e'}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

T_1 und T_2 seien Bäume. Ist e ein Input von T_1 und stimmen die Wurzelfarbe von T_2 und die Inputfarbe von e überein, so werden häufig ∞-Kategorien der Gestalt $X_{T_1}^{(e,X_{T_2})}$ betrachtet. Zur einfacheren Beschreibung dieser ∞-Kategorien werden zusammengesetzte Bäume eingeführt.

Definition 3.9 *Ein zusammengesetzter k-farbiger Baum T ist ein Baum, bei dem sowohl jeder Ecke, jedem Anfangspunkt eines Inputs, dem Endpunkt der Wurzel und vielleicht auch einigen Kanten eine Zahl aus $\{1, \ldots, k\}$ zugeordnet ist, so daß die Zahlen beim Durchlaufen eines Weges in Richtung Wurzel nicht abnehmen. Die Menge der zusammengesetzten k-farbigen Bäume wird mit $\mathcal{T}_k'$ bezeichnet.*

Beispiel 3.10

Ist $T =$ 

, so ist $X_T = \mathcal{L}_0 \otimes X_1 \otimes (\mathcal{L}_0 \otimes X_2 \otimes \mathcal{L}_2)$.

Ist T ein zusammengesetzter Baum, so sei deg_T die Anzahl der Kanten von T minus 1. Zusammengesetzte k-farbige Bäume kann man sich auch als Kollektion k-farbiger Bäume, die aufeinandergesteckt sind, vorstellen. Dabei entspricht die einer Kante zugeordnete Zahl der Wurzelfarbe des aufgesteckten Baumes. Jedoch liefert nicht jede Kollektion von Bäumen einen zusammengesetzten Baum im obigen Sinne.

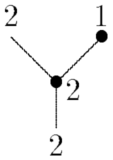
Der zusammengesetzte Baum $T_2 \circ_e T_1$. Sind T_1 und T_2 zusammengesetzte Bäume, ist e ein Input von T_2 und ist die Inputfarbe von e gleich der Wurzelfarbe von T_1, so entsteht der (zusammengesetzte) Baum $T_2 \circ_e T_1$ aus den Bäumen T_1 und T_2, indem die Wurzel des Baumes T_1 mit dem Input e des Baumes T_2 identifiziert wird. Der Kante, die der Kante e entspricht, wird falls vorhanden die der Wurzel von T_1 zugeordnete Zahl zugeordnet, ansonsten wird der Kante die Zahl wT_1 zugeordnet (gegebenenfalls wird die alte Zahl überschrieben).

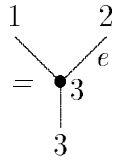
Zusammengesetzte Bäume und ∞-Kategorien. Ist $X = (X_1, \ldots, X_k)$ ein k-Tupel von ∞-Kategorien und $T = T_2 \circ_e T_1$ ein zusammengesetzter Baum mit $T_1 \in \mathcal{T}'_k$ und $T_2 \in \mathcal{T}_k$ und ist X_{T_1} bereits definiert, so sei

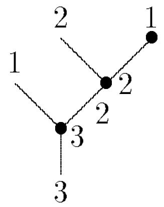
$$X_T := X_{T_2}^{(e, X_{T_1})}.$$

Ist e' eine Kante des Baumes T, so wird die zur Kante e' gehörende ∞-Kategorie *e'-Komponente von* X_T genannt.

Beispiel 3.11

Ist $T_1 =$ 

und $T_2 =$ 

, *so ist* $T_2 \circ_e T_1 =$ 

Es ist dann

$$X_T = \mathcal{L}_0 \otimes X_1 \otimes (\mathcal{L}_0 \otimes X_2 \otimes \mathcal{L}_2).$$

Die e-Komponente von X_T *ist in diesem Beispiel* $\mathcal{L}_0$.

Erweiterungsprozeß. Ist ein System von ∞-Funktoren

$$\{F_T : X_T \to X_{wT}\}_{T \in \mathcal{T}_k}$$

gegeben, so läßt sich dieses System in kanonischer Weise zu einem System

$$\{F_T : X_T \to X_{wT}\}_{T \in \mathcal{T}'_k}$$

von ∞-Funktoren erweitern. Ist $T = T_2 \circ_e T_1$ mit $T_1 \in \mathcal{T}'_k$ und $T_2 \in \mathcal{T}_k$ und ist der ∞-Funktor F_{T_1} bereits definiert, so sei der ∞-Funktor F_T als folgende Komposition definiert.

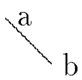
$$F_T : X_T = X_{T_2}^{(e, X_{T_1})} \xrightarrow{Id_{X_{T_2}}^{(e, F_{T_1})}} X_{T_2} \xrightarrow{F_{T_2}} X_{wT_2} = X_{wT},$$

dabei ist der ∞-Funktor $Id_{X_{T_2}}^{(e, F_{T_1})} : X_{T_2}^{(e, X_{T_1})} \to X_{T_2}$ durch $F_{T_1} : X_{T_1} \to X_{wT_1}$ induziert. Ist im folgenden ein System von ∞-Funktoren $\{F_T : X_T \to X_{wT}\}_{T \in \mathcal{T}_k}$ gegeben, so sei F_T für einen zusammengesetzten Baum T stets wie oben definiert.

3.3 Monoidale ∞-Funktoren

Ein monoidaler ∞-Funktor ist gewissermaßen ein System $\{F_T : X_T \to X_{wT}\}_{T \in \mathcal{T}_2}$ von ∞-Funktoren, das gewisse Kohärenzbedingungen erfüllt. Zur Formulierung dieser Kohärenzbedingungen werden noch einige Bezeichnungen benötigt.

Im folgenden sei $T \in \mathcal{T}_k$ und e sei eine Kante von T, a sei die Farbe am Anfang und b die Farbe am Ende der Kante e.

Kante e 

Die ∞-Funktoren $X_{T_{(c,e)}} \xleftarrow{j} X_T^{(c,e)} \xrightarrow{i} X_T$

e sei kein Input. Für $a \leq c \leq b$ sei

$$X_T^{(c,e)} := \begin{cases} X_T^{(e,\mathcal{L}_{b-c})}, & \text{falls e Wurzel,} \\ X_T^{(e,\mathcal{L}_{b-c+1})}, & \text{falls e innere Kante.} \end{cases}$$

Man stellt sich vor, daß die Farben $c, c+1, \ldots, b-1, b$ der Kante e ausgewählt werden.

Der ∞-Funktor $i_T^{(c,e)}$. Der ∞-Funktor

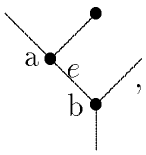
$$i_T^{(c,e)} : X_T^{(c,e)} \longrightarrow X_T$$

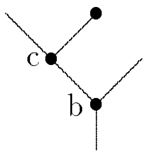
ist (auf der e-Komponente) durch den Funktor

$$\begin{array}{rcllcll} \mathcal{L}_{b-c} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{b-a} & : & t & \longmapsto & t, & \text{falls e Wurzel,} \\ \mathcal{L}_{b-c+1} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{b-a+1} & : & t & \longmapsto & t, & \text{falls e innere Kante,} \end{array}$$

induziert.

Der Baum $T_{(c,e)}$. Der Baum $T_{(c,e)}$ entsteht aus T, indem die Zahl am Anfang der Kante e durch c ersetzt wird. Damit $T_{(c,e)}$ wieder ein Baum ist, muß $a \leq c \leq b$ gelten.

Ist T = 

, so ist $T_{(c,e)}$ = 

.

Auch für einen Input e ist die Definition des Baumes $T_{(c,e)}$ sinnvoll.

Der ∞-Funktor $j_T^{(c,e)}$. Der ∞-Funktor

$$j_T^{(c,e)} : X_T^{(c,e)} \longrightarrow X_{T_{(c,e)}}$$

ist durch

$$j_T^{(c,e)} := (j_T^{(c,e)})_{e(0)} \otimes \cdots \otimes (j_T^{(c,e)})_{e(deg_T)}$$

definiert, dabei ist $(j_T^{(c,e)})_{e'}$ durch den Funktor

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_{a-d+1} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{c-d+1} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0, & \text{falls } t = 0, \\ t - a + c, & \text{falls } t > 0, \end{cases} \end{array}$$

gegeben, falls e' eine innere Kante mit Nachfolger e ist, dabei ist d die Zahl am Anfang der Kante e', ansonsten ist $(j_T^{(c,e)})_{e'} = id$.

Es kommt häufig vor, daß ∞-Funktoren mit Quelle X_T als Tensorprodukt von ∞-Funktoren, die den Kanten von T zugeordnet sind, definiert sind, zum Beispiel wurde $j_T^{(c,e)}$ gerade so definiert Der der Kante e zugordnete ∞-Funktor wird dann auch *e-Komponente* genannt.
Zum Beispiel ist $(j_T^{(c,e)})_{e'}$ die e'-Komponente von $j_T^{(c,e)}$.

Die ∞-Funktoren $X_{T_{(e,c)}} \xleftarrow{j} X_T^{(e,c)} \xrightarrow{i} X_T$

e sei kein Input. Für $a \leq c \leq b$ sei

$$X_T^{(e,c)} := X_T^{(e,\mathcal{L}_{c-a})}.$$

Man stellt sich vor, daß die Farben $a, a+1, \dots, c-1, c$ der Kante e ausgewählt werden.

Der ∞-Funktor $i_T^{(e,c)}$. Der ∞-Funktor

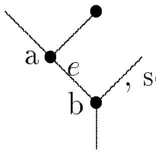
$$i_T^{(e,c)} : X_T^{(e,c)} \longrightarrow X_T$$

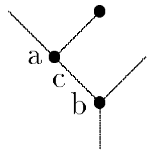
ist durch den Funktor

$$\begin{array}{lllllll} \mathcal{L}_{c-a} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{b-a} & : & t & \longmapsto & t+b-c, & \text{falls e Wurzel,} \\ \mathcal{L}_{c-a} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{b-a+1} & : & t & \longmapsto & t+b-c+1, & \text{falls e innere Kante,} \end{array}$$

induziert.

Der (zusammengesetzte) Baum $T_{(e,c)}$. Der Baum $T_{(e,c)}$ entsteht aus dem Baum T, indem die Kante e mit der Zahl c versehen wird. Damit $T_{(e,c)}$ ein zusammengesetzter Baum ist, muß $a \leq c \leq b$ gelten.

Ist T = 

, so ist $T_{(e,c)}$ = 

.

Auch für einen Input e ist die Definition des Baumes $T_{(e,c)}$ sinnvoll.

Der ∞-Funktor $j_T^{(e,c)}$. Der ∞-Funktor

$$j_T^{(e,c)} : X_T^{(e,c)} \longrightarrow X_{T_{(e,c)}}$$

ist durch den kanonischen Klammerisomorphismus gegeben. (Die Klammerung von $X_{T_{(e,c)}}$ ist auf Seite 41 definiert.)

Die ∞-Funktoren $X_{T_{/e}} \overset{j}{\leftarrow} X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \overset{i}{\rightarrow} X_T$

Der ∞-Funktor $i_T^{/e}$. e sei eine innere Kante. Der ∞-Funktor

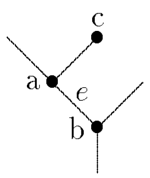
$$i_T^{/e} : X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \longrightarrow X_T$$

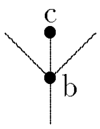
ist durch den Funktor

$$i_0 : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{L}_{b-a+1} : 0 \longmapsto 0$$

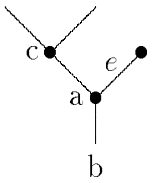
induziert.

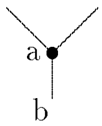
Der Baum $T_{/e}$. Der Baum $T_{/e}$ entsteht aus dem Baum T wie folgt: Die Kante e wird geschrumpft. Der zu einer Ecke geschrumpften Kante e wird die Zahl zugeordnet, die am Ende der Kante e stand. Gibt es nun eine Ecke, in der genau eine Kante endet, so wird diese (samt Label) eliminiert. Das Ergebnis ist der Baum $T_{/e}$. Es ist $T_{/e} \in \mathcal{T}'_k$.

Ist T = 

, so ist $T_{/e}$ = 

.

Ist T = 

, so ist $T_{/e}$ = 

Der ∞-Funktor $j_T^{/e}$. Entsteht $T_{/e}$ aus T durch Schrumpfen der Kante e, so ist der ∞-Funktor

$$j_T^{/e} : X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \longrightarrow X_{T_{/e}}$$

einerseits durch das Vergessen der e-Komponente gegeben und andererseits auf den e'-Komponenten mit e' innere Kante mit Nachfolger e durch einen ∞-Funktor

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{L}_{a-d+1} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{c-d+1} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0, & \text{falls } t = 0, \\ t-a+c, & \text{falls } t > 0, \end{cases} \end{array}$$

gegeben, dabei ist d die Zahl am Anfang der Kante e'.
Andernfalls liegt folgende Situation vor: $T_{/e}$ entsteht nicht aus T durch Schrumpfen der Kante e. Es existiert dann genau eine von e verschiedene Kante e_2, die den gleichen Nachfolger wie e hat. Der Nachfolger von e wird mit e_1 bezeichnet. $\bar{e}$ sei die den Kanten e_1 und e_2 entsprechende Kante in $T_{/e}$.

Konvention: Es wird später auf die $Situation(*)$ verwiesen, damit ist die gerade beschriebene Situation mit den oben eingeführten Bezeichnungen gemeint.
$j_T^{/e}$ ist in diesem Fall durch einen ∞-Funktor

$$\mu : (X_T^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_1} \otimes (X_T^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_2} \longrightarrow (X_{T_{/e}})_{\bar{e}}$$

unter Ausnutzung des kanonischen Klammerisomorphismus

$$A \otimes \mathcal{L}_0 \otimes B \cong A \otimes B$$

induziert. Falls e_2 kein Input ist, ist dieser ∞-Funktor durch

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_m \otimes \mathcal{L}_n & \longrightarrow & \mathcal{L}_{m+n-1} \\ t_1 \otimes t_2 & \longmapsto & \begin{cases} t_1, & \text{falls } t_2 = 0, \\ t_2 + m - 1, & \text{falls } t_2 > 0, \end{cases} \end{array}$$

gegeben, dabei sind t_1 und t_2 Objekte. Ist e_2 ein Input, so ist μ durch die Projektion

$$pr_2 : \mathcal{L}_m \otimes X_l \longrightarrow X_l$$

gegeben. Hierbei handelt es sich um eine Verallgemeinerung des bereits auf Seite 29 definierten ∞-Funktors μ.

Erweiterung der Bezeichnungen auf zusammengesetzte Bäume. Die eben eingeführten Bezeichnungen lassen sich auch auf zusammengesetzte Bäume erweitern. Ein zusammengesetzter Baum besteht aus einer Kollektion von Bäumen, die zusammengesteckt sind. Wendet man eine der oben definierten Konstruktionen auf einen Baum dieser Kollektion an, so induziert das eine Konstruktion auf dem zusammengesetzten Baum. Ist zum Beispiel $T = T_2 \circ_e T_1$ mit $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_k$ und e' eine innere Kante des Baumes T_1, so wird mit $X_T^{(e',\mathcal{L}_0)}$ der Die ∞-Kategorie $X_{T_2}^{(e, X_{T_1}^{(e',\mathcal{L}_0)})}$ bezeichnet. (Dabei ist zu beachten, daß die Kante e des Baumes $T = T_2 \circ_e T_1$ als Wurzel das Baumes T_1 betrachtet wird und nicht als Input des Baumes T_2).

Monoidale ∞-Funktoren

Nun werden monoidale ∞-Funktoren definiert.
Sind $a_1, \ldots, a_n \in ob\mathcal{L}_m$, so bezeichne $i_{a_1,\ldots,a_n} : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ den Funktor

$$\begin{array}{rrcl} i_{a_1,\ldots,a_n} : & \mathcal{L}_n & \longrightarrow & \mathcal{L}_m, \\ & t & \longmapsto & a_t, \end{array}$$

dabei ist $t \in ob\mathcal{L}_n$. Ist $(X_T)_e = \mathcal{L}_m$, so sei

$$i^e_{a_1,\ldots,a_n} : X_T^{(e,\mathcal{L}_n)} \longrightarrow X_T$$

der ∞-Funktor, der durch $i_{a_1,\ldots,a_n}$ (auf der e-Komponente) induziert ist.

Definition 3.12 *Ein monoidaler ∞-Funktor (X, F) ist ein 2-Tupel von ∞-Kategorien $X = (X_1, X_2)$ zusammen mit einem System von ∞-Funktoren*

$$\{F_T : X_T \to X_{wT}\}_{T \in \mathcal{T}_2},$$

für das $F_{|_1^1} = Id_{X_1}$ und $F_{|_2^2} = Id_{X_2}$ gilt, und das die folgenden Kohärenzbedingungen erfüllt.

Kohärenzbedingung für innere Kanten mit Farbwechsel

Es sei $T \in \mathcal{T}_2$. Ist e ist eine innere Kante mit Farbwechsel (dh. $(X_T)_e = \mathcal{L}_2$), so kommutieren die folgenden Diagramme.

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,\mathcal{L}_1)} \arrow[r, "i_{0,1}^e"] \arrow[d, "j_T^{(2,e)}"'] & X_T \arrow[d, "F_T"] \\
X_{T_{(2,e)}} \arrow[r, "F_{T_{(2,e)}}"'] & X_{wT}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_T^{(e,\mathcal{L}_1)} \arrow[r, "i_{1,2}^e"] \arrow[d, "j_T^{(e,2)}"'] & X_T \arrow[d, "F_T"] \\
X_{T_{(e,2)}} \arrow[r, "F_{T_{(e,2)}}"'] & X_{wT}
\end{tikzcd}$$

Kohärenzbedingung für innere Kanten ohne Farbwechsel

Es sei $T \in \mathcal{T}_2$. Ist e eine innere Kante ohne Farbwechsel (dh. $(X_T)_e = \mathcal{L}_1$), so kommutieren die folgenden Diagramme.

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "i_0^e"] \arrow[d, "j_T^{/e}"'] & X_T \arrow[d, "F_T"] \\
X_{T_{/e}} \arrow[r, "F_{T_{/e}}"'] & X_{wT}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "i_1^e"] \arrow[d, "j_T^{(e,1)}"'] & X_T \arrow[d, "F_T"] \\
X_{T_{(e,1)}} \arrow[r, "F_{T_{(e,1)}}"'] & X_{wT}
\end{tikzcd}$$

Kohärenzbedingung für die Wurzel mit einem Farbwechsel

Es sei $T \in \mathcal{T}_2$. Ist e die Wurzel und kein Input und besitzt e einen Farbwechsel (dh. $(X_T)_e = \mathcal{L}_1$), so kommutieren die folgenden Diagramme.

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "i_0^e"] \arrow[d, "j_T^{(2,e)}"'] & X_T \arrow[d, "F_T"] \\
X_{T_{(2,e)}} \arrow[r, "F_{T_{(2,e)}}"'] & X_{wT}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "i_1^e"] \arrow[d, "j_T^{(e,1)}"'] & X_T \arrow[d, "F_T"] \\
X_{T_{(e,1)}} \arrow[r, "F_{T_{(e,1)}}"'] & X_{wT}
\end{tikzcd}$$

Kohärenzbedingung für einen Input mit Farbwechsel

Es sei $T \in \mathcal{T}_2$. Ist e ein von der Wurzel verschiedener Input mit Farbwechsel, so kommutiert das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[d, "Id"'] \arrow[dr, "F_T"] & \\
X_{T_{(e,2)}} \arrow[r, "F_{T_{(e,2)}}"'] & X_{wT}
\end{tikzcd}$$

Ein System von ∞-Funktoren, das die oben genannten Bedingungen erfüllt, heißt monoidaler ∞-Funktor.

Die Quelle eines monoidalen ∞-Funktors. *Die Quelle des monoidalen ∞-Funktors (X, F) ist die monoidale ∞-Kategorie (X_1, F^1), wobei*

$$F^1_T = F_T : X_{1T} = X_T \xrightarrow{F_T} X_{wT} = X_{1wT}$$

für $T \in \mathcal{T}_1$ ist. (Das bedeutet, daß Bäume, die nur die Farbe 1 annehmen, die monoidalen Struktur der Quelle wiedergeben.)

Das Ziel eines monoidalen ∞-Funktors. *Das Ziel des monoidalen ∞-Funktors (X, F) ist die monoidale ∞-Kategorie (X_2, F^2), wobei*

$$F^2_T = F_{T^2} : X_{2T} = X_{T^{\{2\}}} \xrightarrow{F_{T^{\{2\}}}} X_{wT^{\{2\}}} = X_{2wT}$$

für $T \in \mathcal{T}_1$ ist, dabei ist $T^{\{2\}}$ der Baum, der aus T entsteht, indem jede 1 durch eine 2 ersetzt wird. (Das bedeutet, das Bäume, die nur die Farbe 2 annehmen, die monoidale Struktur des Ziels wiedergeben.)
Statt (X, F) wird auch einfach $F : X_1 \to X_2$ geschrieben.

Lemma 3.13 *Ein monoidaler ∞-Funktor ist bereits durch die ∞-Funktoren F_T, wobei T maximal einen Farbwechsel und zwar in der Wurzel besitzt, eindeutig bestimmt.*

Beweis: Ist T nicht von der oben beschriebenen Form, so besitzt X_T enweder eine Komponente der Form $\mathcal{L}_2$ oder es gibt einen Input, der zwei Farben hat. Im beiden Fällen sorgen die Kohärenzbedingungen dafür, daß sich der Baum auf Bäume kleinerer Filtrierung zurückführen läßt. Da angenommen werden darf, daß die Behauptung für Bäume kleinerer Filtrierung gilt, ist damit die Behauptung bewiesen. □

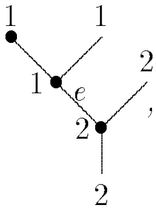
$\mathcal{T}^0_2 \subset \mathcal{T}_2$ sei die Teilmenge der zweifarbigen Bäume, die genau einen Farbwechsel haben und zwar in der Wurzel.

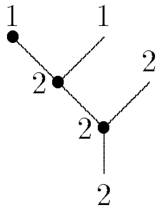
Korollar 3.14 *Sind $F, G : X \to Y$ monoidale ∞-Funktoren und ist $F_T = G_T$ für $T \in \mathcal{T}^0_2$, so ist $F = G$.* □

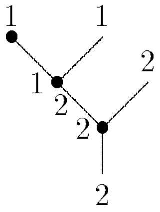
In Kapitel 4 wird unter anderem gezeigt, daß sich ein strikt monoidaler ∞-Funktor als monoidaler ∞-Funktor auffassen läßt.

Es folgen Beispiele für Kohärenzbedingungen.

Beispiel 3.15 $\cdot$ *Kohärenzbedingung für innere Kanten mit Farbwechsel*

Ist $T =$ 

, so ist $T_{(2,e)} =$ 

und $T_{(e,2)} =$ 

.

Es ist

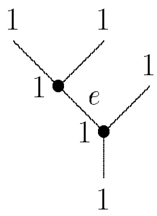
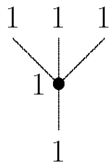
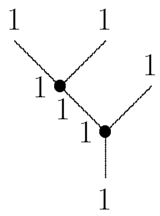
$$
\begin{aligned}
X_T &= \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X_1 \otimes X_2, \\
X_T^{(e,\mathcal{L}_1)} &= \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X_1 \otimes X_2, \\
X_{T_{(2,e)}} &= \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2 \otimes X_1 \otimes X_2, \\
X_{T_{(e,2)}} &= \mathcal{L}_0 \otimes (\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X_1) \otimes X_2, \\
X_{wT} &= X_2.
\end{aligned}
$$

In diesem Fall ergeben sich die beiden folgenden Kohärenzdiagramme.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X_1 \otimes X_2 \arrow[r, "id \otimes i_{0,1} \otimes id \otimes id \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes id \otimes i_{0,2} \otimes id \otimes id"'] & \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X_1 \otimes X_2 \arrow[d, "F_T"] \\
\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2 \otimes X_1 \otimes X_2 \arrow[r, "F_{T_{(2,e)}}"'] & X_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X_1 \otimes X_2 \arrow[r, "id \otimes i_{1,2} \otimes id \otimes id \otimes id"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X_1 \otimes X_2 \arrow[d, "F_T"] \\
\mathcal{L}_0 \otimes (\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X_1) \otimes X_2 \arrow[r, "F_{T_{(e,2)}}"'] & X_2
\end{tikzcd}
$$

· *Kohärenzbedingung für innere Kanten ohne Farbwechsel*

Ist $T =$  *, so ist* $T_{/e} =$  *und* $T_{(e,1)} =$ 

Es ist

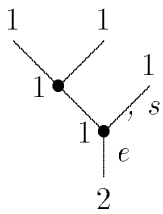
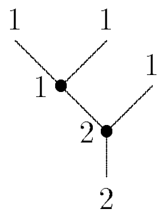
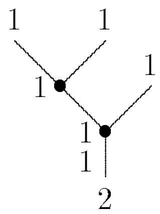
$$\begin{aligned}
X_T &= \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \otimes X_1, \\
X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} &= \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_0 \otimes X_1 \otimes X_1 \otimes X_1, \\
X_{T_{/e}} &= \mathcal{L}_0 \otimes X_1 \otimes X_1 \otimes X_1, \\
X_{T_{(e,1)}} &= \mathcal{L}_0 \otimes (\mathcal{L}_0 \otimes X_1 \otimes X_1) \otimes X_1, \\
X_{wT} &= X_1.
\end{aligned}$$

In diesem Fall ergeben sich die folgenden Kohärenzdiagramme.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_0 \otimes X_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \arrow[r, "id \otimes i_0 \otimes id \otimes id \otimes id"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \arrow[d, "F_T"] \\
\mathcal{L}_0 \otimes X_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \arrow[r, "F_{T_{/e}}"'] & X_1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_0 \otimes X_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \arrow[r, "id \otimes i_1 \otimes id \otimes id \otimes id"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \arrow[d, "F_T"] \\
\mathcal{L}_0 \otimes (\mathcal{L}_0 \otimes X_1 \otimes X_1) \otimes X_1 \arrow[r, "F_{T_{(e,1)}}"'] & X_1
\end{tikzcd}$$

· *Kohärenzbedingung für die Wurzel mit Farbwechsel*

Ist $T =$  *, so ist* $T_{(2,e)} =$  *und* $T_{(e,1)} =$ 

Es ist

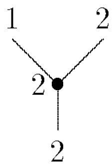
$$
\begin{aligned}
X_T &= \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \otimes X_1, \\
X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} &= \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \otimes X_1, \\
X_{T_{(2,e)}} &= \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_2 \otimes X_1 \otimes X_1 \otimes X_1, \\
X_{T_{(e,1)}} &= \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \otimes X_1, \\
X_{wT} &= X_2.
\end{aligned}
$$

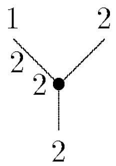
In diesem Fall ergeben sich die folgenden Kohärenzdiagramme.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \arrow[r, "i_0 \otimes id \otimes id \otimes id \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes i_{0,2} \otimes id \otimes id \otimes id"'] & \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \arrow[d, "F_T"] \\
\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_2 \otimes X_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \arrow[r, "F_{T_{(2,e)}}"'] & X_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \arrow[r, "i_1 \otimes id \otimes id \otimes id \otimes id"] \arrow[d, "Id"'] & \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \arrow[d, "F_T"] \\
\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \otimes X_1 \arrow[r, "F_{T_{(e,1)}}"'] & X_2
\end{tikzcd}
$$

· *Kohärenzbedingung für einen Input mit Farbwechsel*

Ist $T =$ 

, *so ist* $T_{(e,2)} =$ 

Es ist

$$
\begin{aligned}
X_T &= X_1 \otimes X_2, \\
X_{T_{(e,2)}} &= X_2 \otimes X_2, \\
X_{wT} &= X_2.
\end{aligned}
$$

In diesem Fall ergibt sich das folgende Kohärenzdiagramm.

$$
\begin{tikzcd}
 & X_1 \otimes X_2 \arrow[dl, "Id"'] \arrow[d, "F_T"] \\
X_1 \otimes X_2 \arrow[r, "F_{T_{(e,2)}}"'] & X_2
\end{tikzcd}
$$

Es werden einige Beziehungen aufgeführt, die ein monoidaler ∞-Funktor erfüllt. Die Quelle des monoidalen ∞-Funktors $((X,Y),F)$ sei (X,F^1) und das Ziel sei (Y,F^2). Statt $F_{|^1_2}$ wird auch einfach F geschrieben.

- Es sei $1_X := F^1_{|}(0)$ und $1_Y := F^2_{|}(0)$. Es existiert ein 1-Morphismus (in Y)

  $$F_1 : 1_Y \longrightarrow F(1_X).$$

  Dieser 1-Morphismus ist durch $F_T(0)$ mit

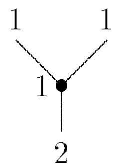
  T = 

  gegeben.

- Zu je zwei Objekten $A, B \in X$ existiert ein 1-Morphismus.

  $$F_{A,B} : F(A)F(B) \longrightarrow F(AB).$$

  Dieser 1-Morphismus ist durch $F_T(\rightarrow \otimes A \otimes B)$ mit

  gegeben, dabei ist $\rightarrow$ der von Identität verschiedene 1-Morphismus in $\mathcal{L}_1$.

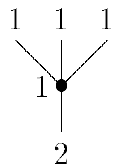
- Für jedes Objekt $A \in X$ existiert ein 2-Morphismus in Y, so daß das folgende Diagramm kommutiert.

$$
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(l_{1_X})"] \arrow[d, "l_{F(A)}"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow"] & F(1_X A) \\
1_Y F(A) \arrow[r, "F_1 F(A)"'] & F(1_X)F(A) \arrow[u, "F_{1_X,A}"']
\end{tikzcd}
$$

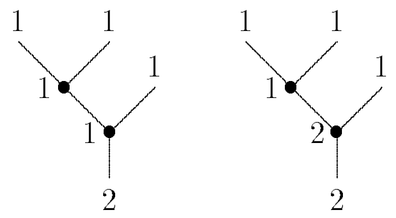
· Für je drei Objekte $A, B, C \in X$ existieren 2-Morphismen.

$$\begin{tikzcd}
F(A(BC)) & F(ABC) \arrow[l, "F_{a'_{A,B,C}}"'] \arrow[r, "F_{a_{A,B,C}}"] & F((AB)C) \\
F(A)F(BC) \arrow[u, "F_{A,BC}"] \arrow[r, phantom, "\Nearrow"] & & F(AB)F(C) \arrow[u, "F_{AB,C}"'] \arrow[l, phantom, "\Nwarrow"] \\
F(A)(F(B)F(C)) \arrow[u, "F(A)F_{B,C}"] & F(A)F(B)F(C) \arrow[l, "a'_{F(A),F(B),F(C)}"] \arrow[r, "a_{F(A),F(B),F(C)}"'] \arrow[uu] & (F(A)F(B))F(C) \arrow[u, "F_{A,B}F(C)"']
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $F(A)F(B)F(C) \to F(ABC)$ durch $F_T(\to \otimes A \otimes B \otimes C)$ mit



gegeben. Das rechte Diagramm ergibt sich, indem die zu den Bäumen



gehörenden Kohärenzbedingungen betrachtet werden.

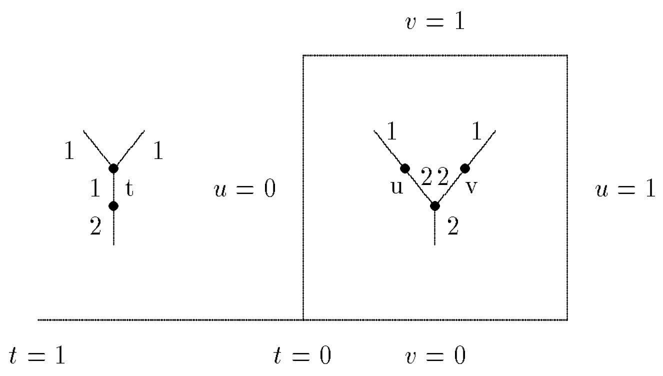
· Für je vier Objekte $A, B, C, D \in X$ eixstiert ein 3-Morphismus α mit $d_2^- \alpha =$

$$\begin{tikzcd}
 & F(ABC)D \arrow[rr] & & F(((AB)C)D) \\
 & F(ABC)F(D) \arrow[u] \arrow[rr] & \Nwarrow & F((AB)C)F(D) \arrow[u] \\
 \Leftarrow & & \Nwarrow & \\
F(ABCD) \arrow[uuur] & (F(A)F(B)F(C))F(D) \arrow[uu] \arrow[r] & ((F(A)F(B))F(C))F(D) \arrow[r] & (F(AB)F(C))F(D) \arrow[uu] \\
 & F(A)F(B)F(C)F(D) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ul] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & (F(A)F(B))F(C)F(D) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & F(AB)F(C)F(D) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

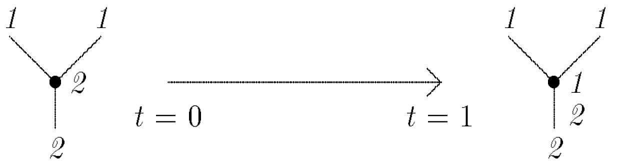
und $d_2^+\alpha =$

$$
\begin{tikzcd}
 & & F((ABC)D) \arrow[drr] & & \\
F(ABCD) \arrow[urr] \arrow[rr] & & F((AB)CD) \arrow[rr] \arrow[u, phantom, "\Uparrow"] & & F(((AB)C)D) \\
F(A)F(B)F(C)F(D) \arrow[u] \arrow[dr] & \Uparrow & F(AB)F(C)F(D) \arrow[u] \arrow[dr] & \Uparrow & F((AB)C)F(D) \arrow[u] \\
 & (F(A)F(B))F(C)F(D) \arrow[ur] & & (F(AB)F(C))F(D) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Bemerkung 3.16 *Die monoidalen ∞-Funktoren wurden ähnlich zu den in der homotopischen Kohärenztheorie bekannten Homotopiehomomorphismen defineirt (siehe [3]).*
Wird die Definition genau analog angesetzt, so entstehen Probleme bei der Komposition monoidaler ∞-Funktoren. Die Definition der farbigen Bäume muß folglich modifiziert werden. Im kategoriellen Fall werden deshalb keine Farbwechsel in den Ecken zugelassen. Das hat zur Folge, daß (im kategoriellen Fall) das aus der homotopischen Kohärenztheorie (siehe [3, S.97]) bekannte Quadrat



degeneriert ist. In der hier in der Arbeit verwendeten Notation ergibt sich das folgende Schaubild.



Dieser Ansatz sorgt dafür, daß die Komposition monoidaler ∞-Funtoren assoziativ ist.

Kapitel 4

Die Kategorie der monoidalen ∞-Kategorien

4.1 Kohärente System

Dieser Abschnitt befaßt sich mit kohärenten Systemen. Kohärente System bilden ein technisches Hilfsmittel, um mit monoidalen ∞-Kategorien und monoidalen ∞-Funktoren zu arbeiten. Kohärente 1-Systeme sind genau die monoidalen ∞-Kategorien, kohärente 2-Systeme sind genau die monoidalen ∞-Funktoren, kohärente 3-Systeme finden bei der Beschreibung der Komposition monoidaler ∞-Funktoren Verwendung und kohärente 4-Systeme werden sich beim Nachweis der Assoziativität der Komposition als hilfreich erweisen. Kohärente k-System mit $k > 4$ haben für unsere Theorie monoidaler ∞-Kategorien und monoidaler ∞-Funktoren keine Bedeutung.

Definition 4.1 *Ein kohärentes k-System (X, F) ist ein k-Tupel $(X_1, \ldots, X_k)$ von ∞-Kategorien zusammen mit einem System von ∞-Funktoren*

$$\{F_T : X_T \to X_{wT}\}_{T \in \mathcal{T}_k},$$

das den folgenden Bedingungen genügt.

- *Ist $T = |_b^b$, $b \in \underline{k}$, so ist*

$$F_{|_b^b} = Id_{X_b}.$$

- *Ist e eine Kante des Baumes T, die kein Input ist, a die Zahl am Anfang der Kante e, b die am Ende und ist $a \leq c \leq b$, so kommutiert das folgende Diagramm.*

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,c)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_T \arrow[d, "F"] \\
X_{T_{(e,c)}} \arrow[r, "F"'] & X_{wT}
\end{tikzcd}$$

· *Ist e eine Kante des Baumes T, die kein Input ist, a die Zahl am Anfang der Kante e, b die am Ende und ist $a < c \leq b$, so kommutiert das folgende Diagramm.*

$$\begin{tikzcd} X_T^{(c,e)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_T \arrow[d, "F"] \\ X_{T_{(c,e)}} \arrow[r, "F"'] & X_{wT} \end{tikzcd}$$

· *Für jede einfarbige innere Kante von T kommutiert das folgende Diagramm.*

$$\begin{tikzcd} X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_T \arrow[d, "F"] \\ X_{T_{/e}} \arrow[r, "F"'] & X_{wT} \end{tikzcd}$$

· *Ist e ein Input des Baumes T, a die Zahl am Anfang der Kante e, b die am Ende und ist $a < c \leq b$, so kommutiert das folgende Diagramm.*

$$\begin{tikzcd} X_T \arrow[d, "="'] \arrow[dr, "F"] & \\ X_{T_{(e,c)}} \arrow[r, "F"'] & X_{wT} \end{tikzcd}$$

Analog wie auf Seite 45 läßt sich definieren, was es bedeutet, daß eine Kohärenzbedingung für einen zusammmengesetzten Baum erfüllt ist. Sind die Kohärenzbedingungen für Bäume erfüllt, so sind sie auch für zusammengesetzte Bäume erfüllt.

Lemma 4.2 *Die kohärenten 1-Systeme sind genau die monoidalen ∞-Kategorien und die kohärenten 2-Systeme sind genau die monoidalen ∞-Funktoren.*

Beweis: Es ist nur zu zeigen, daß im Falle eines monoidalen ∞-Funktors (X, F) das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_T^{(e,1)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_T \arrow[d, "F"] \\ X_{T_{(e,1)}} \arrow[r, "F"'] & X_2 \end{tikzcd}$$

für jeden Baum $T \in \mathcal{T}_2$ und jede zweifarbige innere Kante e von T kommutiert.

$$j' : X_T^{(e,1)} \longrightarrow X_{T_{(e,2)}}^{(e,1)}$$

sei der kanonische Klammerisomorphismus Das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
X_T^{(e,1)} \arrow[r, "i_1^e"] \arrow[d, "j'"'] & X_T^{(e,2)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] & X_T \arrow[d, "F"] \\
X_{T_{(e,2)}}^{(e,1)} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "j"'] & X_{T_{(e,2)}} \arrow[r, "F"] & X_2 \\
& X_{(T_{(e,2)})_{(e,1)}} = X_{T_{(e,1)}} \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}
$$

kommutiert, da

$$(j_T^{(e,2)})_e \circ (i_1^e)_e = i_1 = (i_{T_{(e,2)}}^{(e,1)})_e \circ (j')_e$$

und da (X, F) ein monoidaler ∞-Funktor ist. Dabei ist zu beachten, daß $T_{(e,c)} = T_2 \circ_e T_1$ mit $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_2$ ist. Aus der Kohärenzbedingung für die Wurzel von T_1 folgt die Kommutativität des unteren Teils des Diagramms. Da $i_T^{(e,2)} \circ i_1^e = i_T^{(e,1)}$ und $j_{T_{(e,2)}}^{(e,1)} \circ j' = j_T^{(e,1)}$ ist, folgt die Behauptung. □

Lemma 4.3 *Ein kohärentes k-System ist bereits durch die ∞-Funktoren F_T, wobei T keinen Farbwechsel oder maximal einen Farbwechsel und zwar in der Wurzel besitzt, eindeutig bestimmt.*

Beweis: Ist T nicht von der oben beschriebenen Form, so besitzt X_T entweder eine Komponente der Form $\mathcal{L}_n$ mit $n \geq 2$ oder es gibt einen Input, der mehr als zwei Farben hat. In beiden Fällen sorgen die Kohärenzbedingungen dafür, daß sich der Baum auf Bäume kleinerer Filtrierung zurückführen läßt. Da angenommen werden darf, daß die Behauptung für Bäume kleinerer Filtrierung gilt, ist damit die Behauptung bewiesen. □

Lemma 4.4 *Ist (X, F) ein kohärentes k-System, $T \in \mathcal{T}_k$ und e eine innere Kante von T, so kommutiert*

$$
\begin{tikzcd}
X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_T \arrow[d, "F"] \\
X_{T_{/e}} \arrow[r, "F"'] & X_{wT}
\end{tikzcd}
$$

Beweis: Ohne Einschränkung sei e eine mehrfarbige Kante. b sei die Zahl am Ende der Kante e. e ist dann eine einfarbige innere Kante des Baumes $T_{(b,e)}$ und es ist $(T_{(b,e)})_{/e} = T_{/e}$. Der ∞-Funktor

$$j' = X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \longrightarrow X_{T_{(b,e)}}^{(e,\mathcal{L}_0)}$$

sei durch

$$j' := (j')_{e(0)} \otimes \cdots \otimes (j')_{e(deg_T)}$$

mit

$$(j')_{e'} := \begin{cases} id_{\mathcal{L}_0}, & \text{falls } e' = e, \\ (j_T^{(b,e)})_{e'}, & \text{falls } e' \neq e. \end{cases}$$

definiert, dh der ∞-Funktor j' unterscheidet sich von $j_T^{(b,e)} : X_T^{(b,e)} \to X_{T_{(b,e)}}$ nur in der e-Komponente. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "i_0^e"] \arrow[d, "j'"'] & X_T^{(b,e)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] & X_T \arrow[d, "F"] \\
X_{T_{(b,e)}}^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "j"'] & X_{T_{(b,e)}} \arrow[r, "F"] & X_{wT} \\
& (T_{(b,e)})_{/e} = T_{/e} \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert, da (X, F) ein monoidaler ∞-Funktor ist und da

$$(j_T^{(b,e)})_e \circ (i_0^e)_e = i_0 = (i_{T_{(b,e)}}^{/e})_e \circ (j')_e$$

und

$$(j_T^{(b,e)})_{e'} \circ (i_0^e)_{e'} = (j_T^{(b,e)})_{e'} = (j')_{e'} = (i_{T_{(b,e)}}^{/e})_{e'} \circ (j')_{e'}$$

für jede innere Kante e' mit Nachfolger e. Aus der Kommutativität dieses Diagramms folgt die Behauptung, da $i_T^{(b,e)} \circ i_0^e = i_T^{/e}$ und $j_{T_{(b,e)}}^{/e} \circ j' = j_T^{/e}$ ist. $\square$

4.2 Marginale Systeme

Es sei $N = \{j_1, \ldots, j_l\} \subset \underline{k}$ mit $j_1 < \ldots < j_l$.

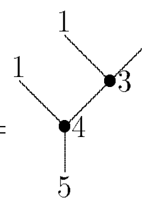
Das l-Tupel NX. Bezeichnet X das k-Tupel $(X_1, \ldots, X_k)$ von ∞-Kategorien, so bezeichne NX das l-Tupel

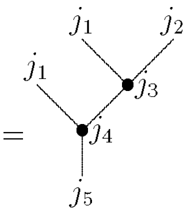
$$(NX_1, \ldots, NX_l) := (X_{j_1}, \ldots, X_{j_l})$$

von ∞-Kategorien.

Beispiel 4.5 *Ist* $N = \{1, 3\} \subset \underline{4}$ *und* $X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$*, so ist* $NX = \{X_1, X_3\}$.

Der (zusammengesetzte) Baum T^N. Ist $T \in \mathcal{T}_l'$, so sei T^N der (zusammengesetzte) Baum, der aus T entsteht, indem jede Zahl t durch j_t ersetzt wird. Es ist $T^N \in \mathcal{T}_k'$. Ist $T \in \mathcal{T}_l$, so ist $T^N \in \mathcal{T}_k$.

$T =$ 

$T^N =$ 

Ist $T = T_2 \circ_e T_1$, so ist $T^N = (T_2)^N \circ_e (T_1)^N$.

Der ∞-Funktor $I_{N,T} : NX_T \to X_{T^N}$. T sei ein l-farbiger Baum. Der ∞-Funtkor

$$I_{N,T} : NX_T \longrightarrow X_{T^N}$$

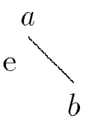
ist durch

$$I_{N,T} := (I_{N,T})_{e(0)} \otimes \cdots \otimes (I_{N,T})_{e(deg_T)}$$

mit

$$(I_{N,T})_e = \begin{cases} \begin{array}{rcl} \mathcal{L}_{b-a+1} & \to & \mathcal{L}_{j_b-j_a+1} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 0, & \text{falls } t = 0, \\ j_b - j_{b-t+1} + 1, & \text{falls } t > 0, \end{cases} \end{array} & \text{falls e innere Kante,} \\ \\ \begin{array}{rcl} \mathcal{L}_{b-a} & \to & \mathcal{L}_{j_b-j_a}, \\ t & \mapsto & j_b - j_{b-t}, \end{array} & \begin{array}{l}\text{falls e Wurzel,} \\ \text{jedoch kein Input,}\end{array} \\ \\ Id_{X_{j_a}}, & \text{falls e Input,} \end{cases}$$

gegeben, dabei ist a die Zahl am Anfang der Kante e und b die Zahl am Ende.

Kante e 

$(I_{N,T})_e$ heißt *e-Komponente* von $I_{N,T}$. Der ∞-Funktor $I_{N,T}$ läßt sich auch für zusammengesetzte Bäume T definieren. Ist $T = T_2 \circ_{e'} T_1$ mit $T_1 \in \mathcal{T}_k'$ und $T_2 \in \mathcal{T}_k$ und ist I_{N,T_1} bereits definiert, so ist

$$I_{N,T} := I_{N,T_2}^{(e,I_{N,T_1})} := (I_{N,T})_{e(0)} \otimes \cdots \otimes (I_{N,T})_{e(deg_{T_2})}$$

mit

$$(I_{N,T})_e := \begin{cases} (I_{N,T_2})_e, & \text{falls } e \neq e', \\ I_{N,T_1}, & \text{falls } e = e'. \end{cases}$$

Satz 4.6 *Ist (X, F) ein kohärentes k-System, so ist (NX, F^N) mit $F_T^N := F_{T^N} \circ I_T^N$ ein kohärentes l-System.*

Beweis: Ist $T = |_b^b$, $b \in \underline{k}$, so ist

$$F_T^N = F_{T^N} \circ I_T^N = F_{T^N} = Id_{X_{j_b}} = Id_{NX_b}.$$

Behauptung: Ist e eine Kante des Baumes T, die kein Input ist, a die Zahl am Anfang der Kante e, b die am Ende und ist $a \leq c \leq b$, so kommutiert das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,c)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_T \arrow[d, "F"] \\
X_{T_{(e,c)}} \arrow[r, "F"'] & X_{wT}
\end{tikzcd}$$

Beweis: Der ∞-Funtkor

$$I_{N,T}^{(e,c)} : NX_T^{(e,c)} \longrightarrow X_{T^N}^{(e,j_c)}$$

unterscheide sich von $I_{N,T}$ nur in der e-Komponente. Es sei

$$\begin{array}{rcl}
(I_{N,T}^{(e,c)})_e : \mathcal{L}_{c-a} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{j_c - j_a}, \\
t & \longmapsto & j_c - j_{c-t}.
\end{array}$$

Es wird die Kommutativität des folgenden Diagramms gezeigt.

$$\begin{tikzcd}
NX_T^{(e,c)} \arrow[rrr, "i"] \arrow[ddd, "j"'] \arrow[drr, "I"] & & & NX_T \arrow[d, "I"] \\
& & X_{T^N}^{(e,j_c)} \arrow[r, "i"] \arrow[dd, "j"'] & X_{T^N} \arrow[dd, "F"] \\
& & & \\
NX_{T_{(e,c)}} \arrow[r, "I"'] & X_{{T_{(e,c)}}^N} = X_{{T^N}_{(e,j_c)}} \arrow[rr, "F"'] & & X_{wT^N}
\end{tikzcd}$$

Für $t \in ob\mathcal{L}_{c-a}$ ist

$$\begin{aligned}
((i_{T^N}^{(e,j_c)})_e \circ (I_{N,T}^{(e,c)})_e)(t) &= (i_{T^N}^{(e,j_c)})_e(j_c - j_{c-t}) \\
&= \begin{cases} (j_c - j_{c-t}) + j_b - j_c, & \text{falls e Wurzel,} \\ (j_c - j_{c-t}) + j_b - j_c + 1, & \text{falls e innere Kante,} \end{cases} \\
&= \begin{cases} j_b - j_{c-t}, & \text{falls e Wurzel,} \\ j_b - j_{c-t} + 1, & \text{falls e innere Kante.} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$((I_{N,T})_e \circ (i_T^{(e,c)})_e)(t) = \begin{cases} (I_{N,T})_e(t+b-c), & \text{falls e Wurzel,} \\ (I_{N,T})_e(t+b-c+1), & \text{falls e innere Kante,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} j_b - j_{b-(t+b-c)}, & \text{falls e Wurzel,} \\ j_b - j_{b-(t+b-c+1)+1} + 1, & \text{falls e innere Kante,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} j_b - j_{c-t}, & \text{falls e Wurzel,} \\ j_b - j_{c-t} + 1, & \text{falls e innere Kante.} \end{cases}$$

Folglich gilt

$$i_{T^N}^{(e,j_c)} \circ I_{N,T}^{(e,c)} = I_{N,T} \circ i_T^{(e,c)}.$$

Da $(I_{N,T}^{(e,c)})_e = (I_{N,T_{(e,c)}})_e$ und die vertikalen ∞-Funktoren kanonische Klammeriso-morphismen sind, folgt

$$j_{T^N}^{(e,c)} \circ I_{N,T}^{(e,c)} = I_{N,T} \circ j_T^{(e,c)}.$$

Aufgrund der Kohärenz von (X, F) gilt

$$F_{T^N} \circ i_{T^N}^{(e,c)} = F_{T^N{}_{(e,j_c)}} \circ j_{T^N}^{(e,j_c)}.$$

Damit ist die Kommutativität des Diagramms gezeigt. Ist $T_{(e,c)} = T_2 \circ_e T_1$ mit $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_l$, so ist

$$F_{T^N} \circ I_{N,T} = F_{T_2{}^N} \circ Id_{X_{T_2{}^N}}^{(e,F_{T_1{}^N})} \circ I_{N,T_2}^{(e,I_{N,T_1})} = F_{T_2{}^N} \circ I_{N,T_2}^{(e,F_{T_1})} = F_T$$

Dabei ist der ∞-Funktor $Id_{X_{T_2{}^N}}^{(e,F_{T_1{}^N})}$ durch $F_{T_1{}^N}$ induziert, der ∞-Funktor $I_{N,T_2}^{(e,I_{N,T_1})}$ bzw $I_{N,T_2}^{(e,F_{T_1})}$ unterscheidet sich sich von dem ∞-Funktor I_{N,T_2} nur in der e-Komponente, die neue e-Komponente ist I_{N,T_1} bzw F_{T_1}.
Damit folgt die Behauptung.

Behauptung: Ist e eine Kante des Baumes T, die kein Input ist, a die Zahl am Anfang der Kante e, b die am Ende und ist $a < c \leq b$, so kommutiert das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd} NX_T^{(c,e)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & NX_T \arrow[d, "F^N"] \\ NX_{T_{(c,e)}} \arrow[r, "F^N"'] & NX_{wT} \end{tikzcd}$$

Beweis: Der ∞-Funktor

$$I_{N,T}^{(c,e)} : NX_T^{(c,e)} \longrightarrow X_{T^N}^{(j_c,e)}$$

unterscheide sich von dem ∞-Funktor $I_{N,T}$ nur in der e-Komponente. Es sei

$$(I_{N,T}^{(c,e)})_e = \begin{cases} \begin{array}{rcl} \mathcal{L}_{b-c+1} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{j_b-j_c+1} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0, & \text{falls } t=0, \\ j_b - j_{b-t+1}+1, & \text{falls } t>0, \end{cases} \end{array} & \text{falls e innere Kante,} \\ \\ \begin{array}{rcl} \mathcal{L}_{b-c} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{j_b-j_c}, \\ t & \longmapsto & j_b - j_{b-t}, \end{array} & \text{falls e Wurzel.} \end{cases}$$

Es wird die Kommutativität des folgenden Diagramms gezeigt.

$$\begin{tikzcd}
NX_T^{(c,e)} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "I"] \arrow[dd, "j"'] & & NX_T \arrow[d, "I"] \\
& X_{T^N}^{(j_c,e)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_{T^N} \arrow[d, "F"] \\
NX_{T_{(c,e)}} \arrow[r, "I"'] & X_{{T_{(c,e)}}^N} = X_{{T^N}_{(j_c,e)}} \arrow[r, "F"'] & X_{wT^N}
\end{tikzcd}$$

Ist e eine innere Kante, so ist für $t \in ob\mathcal{L}_{b-c+1}$

$$\begin{aligned} ((i_{T^N}^{(j_c,e)})_e \circ (I_{N,T}^{(c,e)})_e)(t) &= \begin{cases} 0, & \text{falls } t=0, \\ j_b - j_{b-t+1}+1, & \text{falls } t>0, \end{cases} \\ &= ((I_{N,T})_e \circ (i_T^{(c,e)})_e)(t). \end{aligned}$$

Ist e die Wurzel, so ist für $t \in ob\mathcal{L}_{b-c}$

$$((i_{T^N}^{(j_c,e)})_e \circ (I_{N,T}^{(c,e)})_e)(t) = j_b - j_{b-t} = ((I_{N,T})_e \circ (i_T^{(c,e)})_e)(t).$$

Folglich gilt

$$i_{T^N}^{(j_c,e)} \circ I_{N,T}^{(c,e)} = I_{N,T} \circ i_T^{(c,e)}.$$

Ist e' eine innere Kante mit Nachfolger e und ist d die Zahl am Anfang der Kante e', so gilt für $t \in ob\mathcal{L}_{a-d+1}$

$$\begin{aligned} ((j_{T^N}^{(j_c,e)})_{e'} \circ (I_{N,T}^{(c,e)})_{e'})(t) &= \begin{cases} (j_{T^N}^{(j_c,e)})_{e'}(0), & \text{falls } t=0, \\ (j_{T^N}^{(j_c,e)})_{e'}(j_a - j_{a-t+1}+1), & \text{falls } t>0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } t=0, \\ j_a - j_{a-t+1} + 1 - j_a + j_c, & \text{falls } t>0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } t=0, \\ j_c - j_{a-t+1}+1, & \text{falls } t>0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
((I_{N,T_{(c,e)}})_{e'} \circ (j_T^{(c,e)})_{e'})(t) &= \begin{cases} (I_{N,T_{(c,e)}})_{e'}(0), & \text{falls } t = 0, \\ (I_{N,T_{(c,e)}})_{e'}(t-a+c), & \text{falls } t > 0, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls } t = 0, \\ j_c - j_{c-(t-a+c+1)} + 1, & \text{falls } t > 0, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls } t = 0, \\ j_c - j_{a-t+1} + 1, & \text{falls } t > 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$j_{T^N}^{(j_c,e)} \circ I_{N,T}^{(c,e)} = I_{N,T_{(c,e)}} \circ j_T^{(c,e)}.$$

Aufgrund der Kohärenz von (X,F) gilt

$$F_{T^N} \circ i_{T^N}^{(j_c,e)} = F_{T^N{}_{(j_c,e)}} \circ j_{T^N}^{(j_c,e)}.$$

Damit ist die Kommutativität des Diagramms gezeigt.

<u>Behauptung:</u> Für jede einfarbige Kante e des Baumes T kommutiert das folgende Diagramm.

$$
\begin{tikzcd}
NX_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & NX_T \arrow[d, "F^N"] \\
NX_{T_{/e}} \arrow[r, "F^N"'] & NX_{wT}
\end{tikzcd}
$$

<u>Beweis:</u> Der ∞-Funktor

$$I_{N,T}^{(e,\mathcal{L}_0)} : NX_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \longrightarrow X_{T^N}^{(e,\mathcal{L}_0)}$$

unterscheide sich von dem ∞-Funktor $I_{N,T}$ nur in der e-Komponente. Es sei

$$
\begin{aligned}
(I_{N,T}^{(e,\mathcal{L}_0)})_e : \mathcal{L}_0 &\longrightarrow \mathcal{L}_0, \\
0 &\longmapsto 0.
\end{aligned}
$$

Es wird die Kommutativität des folgenden Diagramms gezeigt.

$$
\begin{tikzcd}
NX_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[rr, "i"] \arrow[dd, "j"'] \arrow[dr, "I"] & & NX_T \arrow[d, "I"] \\
& X_{T^N}^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_{T^N} \arrow[d, "F"] \\
NX_{T_{/e}} \arrow[r, "I"'] & X_{T_{/e}{}^N} = X_{T^N{}_{/e}} \arrow[r, "F"'] & X_{wT^N}
\end{tikzcd}
$$

Offensichtlich gilt

$$i^{/e}_{T^N} \circ I_{N,T} = I_{N,T_{/e}} \circ i^{/e}_{T}.$$

Aufgrund der Kohärenz von (X, F) folgt

$$F_{T^N} \circ i^{/e}_{T^N} = F_{T^N{}_{/e}} \circ j^{/e}_{T^N}.$$

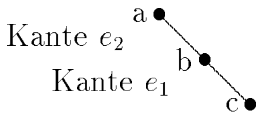
Zu zeigen bleibt

$$j^{/e}_{T^N} \circ I^{/e}_{N,T} = I_{N,T_{/e}} \circ j^{/e}_{T}.$$

Ohne Einschränkung darf davon ausgegangen werden, daß die Situation (*) von Seite 45 vorliegt, dh beim Schrumpfen der Kante e entsteht eine Ecke, in der nur eine Kante endet. Es werden die gleichen Bezeichnungen gewählt wie auf Seite 45. Es ist nur zu zeigen, daß I und μ miteinander verträglich sind, das heißt, es ist die Kommutativtät von

$$\begin{tikzcd}
(NX_T^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_1} \otimes (NX_T^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_2} \arrow[r, "I_{e_1} \otimes I_{e_2}"] \arrow[d, "\mu"'] & (X_{T^N}^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_1} \otimes (X_{T^N}^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_2} \arrow[d, "\mu"] \\
(NX_{T_{/e}})_{\bar{e}} \arrow[r, "I_{\bar{e}}"'] & (X_{T_{/e}{}^N})_{\bar{e}} = (X_{T^N{}_{/e}})_{\bar{e}}
\end{tikzcd}$$

zu zeigen. a sei die Farbe am Anfang der Kante e_2, b die am Ende. Dann ist b auch die Farbe am Anfang der Kante e_1, die Farbe am Ende der Kante e_1 sei c.



<u>Fall 1:</u> e_1 und e_2 sind innere Kanten.
Es ist die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_{c-b+1} \otimes \mathcal{L}_{b-a+1} \arrow[r, "I_{e_1} \otimes I_{e_2}"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathcal{L}_{j_c-j_b+1} \otimes \mathcal{L}_{j_b-j_a+1} \arrow[d, "\mu"] \\
\mathcal{L}_{c-a+1} \arrow[r, "I_{\bar{e}}"'] & \mathcal{L}_{j_c-j_a+1}
\end{tikzcd}$$

zu zeigen. Für $t_1 \in ob\mathcal{L}_{c-b+1}$ und $t_2 \in ob\mathcal{L}_{b-a+1}$ gilt

$$\begin{aligned}
(\mu \circ ((I_{N,T})_{e_1} \otimes (I_{N,T})_{e_2}))(t_1 \otimes t_2) &= \mu((I_{N,T})_{e_1}(t_1) \otimes (I_{N,T})_{e_2}(t_2)) \\
&= \begin{cases} (I_{N,T})_{e_1}(t_1), & \text{falls } t_2 = 0, \\ (I_{N,T})_{e_2}(t_2) + (j_c - j_b + 1) - 1, & \text{falls } t_2 > 0, \end{cases} \\
&= \begin{cases} (I_{N,T})_{e_1}(t_1), & \text{falls } t_2 = 0, \\ j_c - j_{b-t_2+1} + 1, & \text{falls } t_2 > 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$((I_{N,T_{/e}}\circ\mu)(t_1\otimes t_2) \;=\; \begin{cases}(I_{N,T_{/e}})_{\bar e}(t_1), & \text{falls } t_2=0,\\ (I_{N,T_{/e}})_{\bar e}(t_2+(c-b+1)-1), & \text{falls } t_2>0,\end{cases}$$

$$= \begin{cases}(I_{N,T_{/e}})_{\bar e}(t_1), & \text{falls } t_2=0,\\ j_c-j_{c-(t_2+(c-b+1)-1)+1}+1, & \text{falls } t_2>0,\end{cases}$$

$$= \begin{cases}(I_{N,T})_{\bar e}(t_1), & \text{falls } t_2=0,\\ j_c-j_{b-t_2+1}+1, & \text{falls } t_2>0.\end{cases}$$

Fall 2: e_1 ist die Wurzel und e_2 ist eine innere Kante.
Es ist die Kommutativtät von

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_{c-b}\otimes\mathcal{L}_{b-a+1} \arrow[r, "I_{e_1}\otimes I_{e_2}"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathcal{L}_{j_c-j_b}\otimes\mathcal{L}_{j_b-j_a+1} \arrow[d, "\mu"] \\
\mathcal{L}_{c-a} \arrow[r, "I_{\bar e}"'] & \mathcal{L}_{j_c-j_a}
\end{tikzcd}$$

zu zeigen. Für $t_1\in ob\mathcal{L}_{c-b}$ und $t_2\in ob\mathcal{L}_{b-a+1}$ gilt

$$(\mu\circ((I_{N,T})_{e_1}\otimes(I_{N,T})_{e_2}))(t_1\otimes t_2) \;=\; \mu((I_{N,T})_{e_1}(t_1)\otimes(I_{N,T})_{e_2}(t_2))$$

$$= \begin{cases}(I_{N,T})_{e_1}(t_1), & \text{falls } t_2=0,\\ (I_{N,T})_{e_2}(t_2)+(j_c-j_b)-1, & \text{falls } t_2>0,\end{cases}$$

$$= \begin{cases}(I_{N,T})_{e_1}(t_1), & \text{falls } t_2=0,\\ j_c-j_{b-t_2+1}, & \text{falls } t_2>0,\end{cases}$$

$$((I_{N,T_{/e}})_{\bar e}\circ\mu)(t_1\otimes t_2) \;=\; \begin{cases}(I_{N,T_{/e}})_{\bar e}(t_1), & \text{falls } t_2=0,\\ (I_{N,T_{/e}})_{\bar e}(t_2+(c-b)-1), & \text{falls } t_2>0,\end{cases}$$

$$= \begin{cases}(I_{N,T_{/e}})_{\bar e}(t_1), & \text{falls } t_2=0,\\ j_c-j_{c-(t_2+(c-b)-1)}, & \text{falls } t_2>0,\end{cases}$$

$$= \begin{cases}(I_{N,T_{/e}})_{\bar e}(t_1), & \text{falls } t_2=0,\\ j_c-j_{b-t_2+1}, & \text{falls } t_2>0\end{cases}$$

Fall 3: e_2 ist ein Input.

Die Kommutativtät von

$$\begin{tikzcd}
(NX_T^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_1} \otimes NX_a \arrow[r, "(I_{N,T})_{e_1} \otimes Id"] \arrow[d, "\mu"'] & (X_{T^N}^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_1} \otimes X_{j_a} \arrow[d, "\mu"] \\
NX_a \arrow[r, "Id"'] & X_{j_a}
\end{tikzcd}$$

ist klar. Damit ist die Behauptung gezeigt.

<u>Behauptung:</u> Ist e ein Input des Baumes T, a die Zahl am Anfang der Kante e, b die am Ende und ist $a < c \leq b$, so kommutiert das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
NX_T \arrow[d, "="'] \arrow[dr, "F^N"] & \\
NX_{T_{(e,c)}} \arrow[r, "F^N"'] & NX_{wT}
\end{tikzcd}$$

<u>Beweis:</u> Aufgrund der Kohärenz von (X,F) und da $(I_{N,T})_e = (I_{N,T_{(e,j_c)}})_e$ ist, kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
NX_T \arrow[r, "I"] \arrow[d, "="'] & X_{T^N} \arrow[d, "="'] \arrow[dr, "F"] & \\
NX_{T_{(e,c)}} \arrow[r, "I"'] & X_{T_{(e,c)}{}^N} = X_{T^N{}_{(e,j_c)}} \arrow[r, "F"'] & X_{wT^N}
\end{tikzcd}.$$

Aus der Kommutativität des Diagramms folgt die Behauptung.

Damit ist gezeigt, daß (NX, F^N) ein kohärentes l-System ist. $\square$

Lemma 4.7 *Es sei* $N_1 = \{j_1, \ldots, j_l\} \subset \underline{k}$ *mit* $j_1 < \cdots < j_l$, $N_2 = \{k_1, \ldots, k_s\} \subset \underline{l}$ *mit* $k_1 < \cdots < k_s$ *und* $N = \{j_{k_1}, j_{k_2}, \ldots, j_{k_3}\} \subset \underline{k}$. *Es gilt dann:*

- $(T^{N_2})^{N_1} = T^N$ *für* $T \in \mathcal{T}_k$.
- $I_{N_1,T^{N_2}} \circ I_{N_2,T} = I_{N,T}$ *für* $T \in \mathcal{T}_k$.
- *Ist* $\{F_T : X_T \to X_{wT}\}_{T \in \mathcal{T}_k}$ *ein System von* ∞*-Funktoren, so ist* $(F^{N_1})_T^{N_2} = F_T^N$.

Beweis: Der erste Punkt der Behauptung ist klar. Für den zweiten wird

$$(I_{N_1,T^{N_2}})_e \circ (I_{N_2,T})_e = (I_{N,T})_e$$

gezeigt. Ist e eine innere Kante, so ist

$$((I_{N_1,T^{N_2}})_e \circ (I_{N_2,T})_e)(0) = 0 = (I_{N,T})_e(0)$$

und für $t > 0$ ist

$$\begin{aligned}((I_{N_1,T^{N_2}})_e \circ (I_{N_2,T})_e)(t) &= (I_{N_1,T^{N_2}})_e(k_b - k_{b-t+1} + 1) \\ &= j_{k_b} - j_{k_b-(k_b-k_{b-t+1}+1)+1} + 1 \\ &= j_{k_b} - j_{k_{b-t+1}} + 1 \;=\; (I_{N,T})_e(t).\end{aligned}$$

Ist e die Wurzel, jedoch kein Input, so ist

$$\begin{aligned}((I_{N_1,T^{N_2}})_e \circ (I_{N_2,T})_e)(t) &= (I_{N_1,T^{N_2}})_e(k_b - k_{b-t}) \;=\; j_{k_b} - j_{k_b-(k_b-k_{b_t})} \\ &= j_{k_b} - j_{k_{b-t}} \;=\; (I_{N,T})_e(t).\end{aligned}$$

Ist e ein Input, so ist

$$(I_{N_1,T^{N_2}})_e \circ (I_{N_2,T})_e = Id = (I_{N,T})_e.$$

Somit ist der zweite Teil gezeigt. Es gilt

$$(F^{N_1})_T^{N_2} = F_{T^{N_2}}^{N_1} \circ I_{N_2,T} = F_{(T^{N_2})^{N_1}} \circ I_{N_1,T^{N_2}} \circ I_{N_2,T} = F_{T^N} \circ I_{N,T} = F_T^N.$$

Damit ist alles gezeigt. □

4.3 Zusammensetzen kohärenter Systeme

Auf der Menge der kohärenten Systeme wird eine assoziative Verknüpfung definiert. Das Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz *Es sei ein kohärentes l-System $((X_1, \ldots, X_l), F_1)$ und ein kohärentes m-System $((X_l, \cdots, X_{l+m-1}), F_2)$ gegeben, dann existiert genau ein kohärentes (l+m-1)-System $((X_1, \ldots, X_{l+m-1}), F)$ mit $F^{\{1,\cdots,l\}} = F_1$ und $F^{\{l,\cdots,l+m-1\}} = F_2$.*

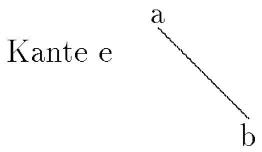
Für den Beweis dieses Satzes werden noch einige ∞-Funktoren und einige Resultate benötigt.

Zuerst werden einige Bezeichnungen eingeführt, die es erlauben, gewisse 'Farbbereiche' von Kanten eines Baumes gezielt anzusprechen. Hierbei handelt es sich gewissermaßen um Verallgemeinerungen von bereits in Kapitel 3 eingeführten Bezeichnungen.

Die ∞-Kategorie X_T^f. Für $a, b \in I\!N$ sei $[a, b] := \{n \in I\!N : a \leq n \leq b\}$. M sei die Teilmenge der Kanten von T, die keine Inputs sind. Eine *T-Kollektion* $f = \{f_e\}_{e \in M}$ ist eine Kollektion von Intervallen in $I\!N$, für die gilt:

$$f_e \subset \begin{cases} [a, b], & \text{falls e Wurzel,} \\ [a, b+1], & \text{falls e innere Kante,} \end{cases}$$

dabei ist a die Zahl am Anfang und b die Zahl am Ende der Kante e.



Es sei $f_e^- := min f_e$ und $f_e^+ := max f_e$. $\#f_e$ sei die Anzahl der Menge f_e.

Beispiel 4.8 *Es werden einige wichtige Beispiele für T-Kollektionen gegeben.*

· *Ist T ein Baum, so sei $\phi_T = \{(\phi_T)_e\}$ die T-Kollektion mit*

$$(\phi_T)_e = \begin{cases} [a, b], & \textit{falls e Wurzel,} \\ [a, b+1], & \textit{sonst,} \end{cases}$$

dabei ist a die Zahl am Anfang und b die Zahl am Ende der Kante e. Es wird auch oft einfach ϕ statt ϕ_T geschrieben.

e sei eine Kante des Baumes T. e sei kein Input. a sei die Zahl am Anfang und b die Zahl am Ende der Kante e.

· *Ist $a \leq c \leq b$, so bezeichne (c, e) die T-Kollektion*

$$(c, e)_{e'} = \begin{cases} [c, b+1], & \textit{falls } e' = e \textit{ und e innere Kante,} \\ [c, b], & \textit{falls } e' = e \textit{ und e Wurzel,} \\ \phi_{e'}, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

· *Ist $a \leq c' \leq c \leq b$, so bezeichne mit (c', e, c) die T-Kollektion*

$$(c', e, c)_{e'} = \begin{cases} [c', c], & \textit{falls } e' = e, \\ \phi_{e'}, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Ist $c' = a$, so wird auch (e, c) statt (a, e, c) geschrieben.

· *$(e, \mathcal{L}_0)$ bezeichne die T-Kollektion*

$$(e, \mathcal{L}_0)_{e'} = \begin{cases} [b+1, b+1], & \textit{falls } e = e', \\ \phi_{e'}, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

· *Sind f und g T-Kollektionen und ist $f_e \cap g_e \neq \emptyset$ für alle $e \in M$, so bezeichne f,g die T-Kollektion, die durch*

$$f, g_e = f_e \cap g_e$$

gegeben ist.

Definition 4.9 *Die ∞-Kategorie X_T^f ist definiert als*

$$X_T^f := (X_T^f)_{e(0)} \otimes \cdots \otimes (X_T^f)_{e(deg_T)},$$

wobei

$$(X_T^f)_e := \begin{cases} \mathcal{L}_{\# f_e - 1}, & \textit{falls e kein Input,} \\ X_a, & \textit{falls e Input und a Inputfarbe von e.} \end{cases}$$

Ist e kein Input, so ist $(X_T)_e = \mathcal{L}_n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Ist a die Farbe am Anfang und b die am Ende der Kante e, so ist $(X_T)_e$ isomorph zu der Kategorie

$$b + 1 \to b \to \cdots \to a - 1 \to a.$$

Man hat die Vorstellung, daß f_e eine Teilkategorie auswählt. Ist $f_e = [c, b+1] \subset [a, b+1]$, so wird die der Teilkategorie

$$b + 1 \to b \to \cdots \to c - 1 \to c$$

entsprechende Teilkategorie in $(X_T)_e$ ausgewählt.

Sind (e, c), (c, e), $(e, \mathcal{L}_0)$ die oben eingeführten T-Kollektionen, so stimmen $X_T^{(e,c)}$, $X_T^{(c,e)}$, $X_T^{(e,\mathcal{L}_0)}$ mit den in Kapitel 3 eingeführten namensgleichen ∞-Kategorien überein.

Die Definition läßt sich auf zusammengesetzte Bäume erweitern. Ist $T = T_2 \circ_e T_1$ und sind $X_{T_1}^{f_1}$ und $X_{T_2}^{f_2}$ bereits definiert, so ist

$$X_T^f = (X_{T_2}^{f_2})^{(e, X_{T_1}^{f_1})},$$

dabei ist

$$f_e = \begin{cases} (f_1)_e, & \text{falls e einer inneren Kante oder der Wurzel von } T_1 \text{ entspricht,} \\ (f_2)_e, & \text{falls e einer inneren Kante oder der Wurzel von } T_2 \text{ entspricht.} \end{cases}$$

Ist T aus den Bäumen $T_1, \ldots, T_n$ zusammengesetzt, so ist eine T-Kollektion aus einer T_1-Kollektion, einer T_2-Kollektion, ..., einer T_n-Kollektion zusammengesetzt.

Der zusammengesetzte Baum T_f. T sei ein Baum. $f = \{f_e\}$ sei eine T-Kollektion, jedoch sei $f_e^- \neq b + 1$, dabei ist b die Zahl am Ende der Kante e. Der Baum T_f entsteht aus dem Baum T in zwei Schritten:

1. Ist $e \in M$, so wird die Zahl am Anfang der Kante e durch f_e^- ersetzt.

2. Ist $e \in M$ und ist $f_e^+ \neq b + 1$, so wird die Kante e mit der Zahl f_e^+ versehen.

T_f ist ein zusammengesetzter Baum. Sind (e, c) und (c, e) die oben eingeführten T-Kollektionen, so stimmen $T_{(e,c)}$ und $T_{(c,e)}$ mit den in Kapitel 3 eingeführten namensgleichen Bäumen überein. Die Definition läßt sich analog wie auf Seite 45 auf zusammengesetzte Bäume verallgemeinern.

Der ∞-Funktor $\iota_T^{f,g,h} : X_T^f \to X_{T_g}^h$. Es werden ∞-Funktoren zwischen ∞-Kategorien der Form X_T^f definiert. Damit der ∞-Funktor

$$\iota_T^{f,g,h} : X_T^f \longrightarrow X_{T_g}^h$$

definiert werden kann, muß das Tripel (f, g, h) gewissen Anforderungen genügen.

Definition 4.10 *Sind f und g T-Kollektionen, $g_e^- \neq b+1$ für $e \in M$ und ist h eine T_g-Kollektion, so heißt das Tripel (f, g, h) T-zulässig, falls gilt*

- *$f_e \subset h_e$ für $e \in M$.*
- *Ist b die Zahl am Ende der Kante $e \in M$ im Baum T und b' die Zahl am Ende der entsprechenden Kante im Baum T_g, so gelte:*

$$f_e^+ = b+1 \quad \Rightarrow \quad h_e^+ = b' + 1.$$

Es sei

$$\begin{array}{rrcl} \iota_T^{f,g,h}: & (X_T^f)_{e(0)} \otimes \cdots \otimes (X_T^f)_{e(deg_T)} & \longrightarrow & (X_{T_g}^h)_{e(0)} \otimes \cdots \otimes (X_{T_g}^h)_{e(deg_{T_g})} \\ & x_{e(0)} \otimes \cdots \otimes x_{e(deg_T)} & \longmapsto & y_{e(0)} \otimes \cdots \otimes y_{e(deg_{T_g})} \end{array}$$

mit

$$y_e := \begin{cases} x_e, & \text{falls e Input,} \\ i_{h_e^+ - f_e^+, \ldots, h_e^+ - f_e^-}(x_e), & \text{falls e kein Input und } f_e^+ \neq b+1, \\ i_{0, h_e^+ - f_e^+ + 1, \ldots, h_e^+ - f_e^-}(x_e), & \text{falls e kein Input und } f_e^+ = b+1, \end{cases}$$

dabei ist b die Zahl am Ende der Kante e. $i_{a_1,\ldots,a_n}$ ist auf Seite 45 definiert. Ist klar, wie T, f, g und h aussehen, so wird statt $\iota_T^{f,g,h}$ auch einfach ι geschrieben.
Der ∞-Funktor $\iota_T^{f,g,h}$ läßt sich auch für zusammengesetzte Bäume definieren. Ist $T = T_2 \circ_{e'} T_1$, $T_1 \in \mathcal{T}_k'$, $T_2 \in \mathcal{T}_k$ und ist $\iota_{T_1}^{f_1,g_1,h_1}$ bereits definiert, so ist

$$\iota_T^{f,g,h} := (\iota_{T_2}^{f_2,g_2,h_2})^{(e,\iota_{T_1}^{f_1,g_1,h_1})} := (\iota_T^{f,g,h})_{e(0)} \otimes \cdots \otimes (\iota_T^{f,g,h})_{e(deg_{T_2})}$$

mit

$$(\iota_T^{f,g,h})_e = \begin{cases} (\iota_{T_2}^{f_2,g_2,h_2})_e, & \text{falls } e \neq e', \\ \iota_{T_1}^{f_1,g_1,h_1}, & \text{falls } e = e', \end{cases}$$

dabei sind f, g und h analog wie oben definiert.

Beispiel 4.11 *Es ist*

$$i_T^{(c,e)} = \iota_T^{((c,e),\phi,\phi)}, \qquad i_T^{(e,c)} = \iota_T^{((e,c),\phi,\phi)}, \qquad i_T^{(e,\mathcal{L}_0)} = \iota_T^{((e,\mathcal{L}_0),\phi,\phi)},$$

$$j_T^{(c,e)} = \iota_T^{((c,e),(c,e),\phi)}, \qquad j_T^{(e,c)} = \iota_T^{((e,c),(e,c),\phi)}.$$

Lemma 4.12 *Ist (f_1, g, f_2) T-zulässig, (f_2, h, f_3) T_g-zulässig und ist $(T_g)_h = T_h$, so ist (f_1, h, f_3) T-zulässig, und das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{tikzcd} X_T^{f_1} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\iota"'] & X_{T_g}^{f_2} \arrow[d, "\iota"] \\ X_{T_h}^{f_3} \arrow[r, "Id"'] & X_{(T_g)_h}^{f_3} \end{tikzcd}$$

Beweis: Ist (f_1, g, f_2) T-zulässig und (f_2, h, f_3) T_g-zulässig, so gilt für $e \in M$

- $f_{1_e} \subset f_{2_e} \subset f_{3_e}$,
- $f_1^+ = b + 1 \Rightarrow f_2^+ = b' + 1 \Rightarrow f_3^+ = b'' + 1$,

dabei sei b die Zahl am Ende der Kante e im Baum T, b' die Zahl am Ende der Kante e im Baum T_g und b" die Zahl am Ende der Kante e im Baum $(T_g)_h = T_h$. Das bedeutet, (f_1, h, f_3) ist T-zulässig.
Nun wird die Kommutativität des Diagramms gezeigt. Da es kanonische Klammerisomorphismen gibt, dürfen die Klammern vernachlässigt werden. Für

$$x_{e(0)} \otimes \cdots \otimes x_{e(deg_T)} \in (X_T^f)_{e(0)} \otimes \cdots \otimes (X_T^f)_{e(deg_T)} = X_T^f$$

ist

$$\begin{aligned}(j_{T_g}^{f_2,h,f_3} \circ j_T^{f_1,g,f_2})(x_{e(0)} \otimes \cdots \otimes x_{e(deg_T)}) &= z_{e(0)} \otimes \cdots \otimes z_{e(deg_{T_h})} \\ &\in (X_{T_h}^{f_3})_{e(0)} \otimes \cdots \otimes (X_{T_h}^{f_3})_{e(deg_{T_h})} = X_{T_h}^{f_3},\end{aligned}$$

dabei gilt mit den oben eingeführten Bezeichnungen

- Ist e ein Input, so ist
$$z_e = x_e.$$
- Ist e eine Kante des Baumes T_h, die kein Input ist, und sind b und b' wie oben gewählt, so gilt:
  1. Ist ${f_1}_e^+ = b + 1$, so ist ${f_2}_e^+ = b' + 1$.
  2. Ist ${f_1}_e^+ < b + 1$ und ${f_2}_e^+ = b' + 1$, so folgt ${f_1}_e^+ < {f_2}_e^+$.

Damit ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}
z_e &= (j_{T_g}^{f_2,h,f_3})_e((j_T^{(f_1,g,f_2}})_e)(x_e)) \\
&= \begin{cases} (j_{T_g}^{f_2,h,f_3})_e(0), & \text{falls } f_{1e}^+ = b+1 \text{ und } x_e = 0, \\ (j_{T_g}^{f_2,h,f_3})_e(f_{2e}^+ - f_{1e}^+ + x_e), & \text{sonst,} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls } f_{1e}^+ = b+1 \text{ und } x_e = 0, \\ f_{3e}^+ - f_{2e}^+ + (f_{2e}^+ - f_{1e}^+ + x_e), & \text{sosnt,} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls } f_{1e}^+ = b+1 \text{ und } x_e = 0, \\ f_{3e}^+ - f_{1e}^+ + x_e, & \text{sonst,} \end{cases} \\
&= (j_T^{f_1,h,f_3})_e(x_e),
\end{aligned}$$

daraus folgt: $j_{T_g}^{f_2,h,f_3} \circ j_T^{f_1,g,f_2} = j_T^{f_1,h,f_3}$. □

Es werden noch weitere ∞-Funktoren und Resultate benötigt. Die Beweise der folgenden Lemmatas befinden sich am Ende des Abschnitts.

Für die drei folgenden Lemmatas liege folgende Situation vor.

<u>Situation:</u> T sei ein farbiger Baum. e sei eine einfarbige innere Kante von T und e' eine Kante, die kein Input ist und mindestens die Farben 1 und 2 besitzt.

Es ist

$$(T_{(2,e')})_{/e} = \begin{cases} T_{/e}, & e' \text{ Nachfolger von e, und beim Schrumpfen der Kante e} \\ & \text{entsteht eine Ecke, in der nur eine Kante endet,} \\ (T_{/e})_{(2,e')}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der ∞-Funktor $\iota : X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(e',2)} \to X_{T_{/e}}^{(e',2)}$. Der ∞-Funktor

$$\iota : X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(e',2)} \longrightarrow X_{T_{/e}}^{(e',2)}$$

sei als Komposition

$$X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(e',2)} \overset{\iota}{\cong} X_{T_{(e',2)}}^{(e,\mathcal{L}_0)} \overset{\iota}{\longrightarrow} X_{(T_{(e',2)})_{/e}} = X_{(T_{/e})_{(e',2)}} \overset{\iota}{\cong} X_{T_{/e}}^{(e',2)}$$

definiert.

Lemma 4.13 *T sei ein farbiger Baum. e sei eine einfarbige innere Kante von T und e' eine Kante, die kein Input ist und mindestens die Farben 1 und 2 besitzt. Es ist dann $(T_{(2,e')})_{/e} = (T_{/e})_{(2,e')}$ und die folgenden Diagramme kommutieren.*

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,\mathcal{L}_0)(e',2)} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\iota"'] & X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[d, "\iota"] \\
X_{T_{/e}}^{(e',2)} \arrow[r, "\iota"'] & X_{T_{/e}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_T^{(e,\mathcal{L}_0)(e',2)} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\iota"'] & X_{T_{(e',2)}}^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[d, "\iota"] \\
X_{T_{/e}}^{(e',2)} \arrow[r, "\iota"'] & X_{(T_{/e})_{(e',2)}} = X_{(T_{(e',2)})_{/e}}
\end{tikzcd}$$

Der ∞-Funktor $\iota : X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(2,e')} \to X_{T_{/e}}^{(2,e')}$**.** Es wird vorausgesetzt, daß $T_{/e}$ aus T durch Schrumpfen der Kante e entsteht oder daß e' nicht der Nachfolger von e. Entsteht $T_{/e}$ aus T durch Schrumpfen der Kante e, so unterscheide sich der ∞-Funktor

$$\iota : X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(2,e')} \to X_{T_{/e}}^{(2,e')}$$

nur in der e'-Komponente von $\iota_T^{/e}$, es ist $(\iota)_{e'} = Id$. Entsteht $T_{/e}$ nicht aus T durch Schrumpfen der Kante e, so ist e' nicht der Nachfolger von e und der ∞-Funktor

$$\iota : X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(2,e')} \to X_{T_{/e}}^{(2,e')}$$

ist durch den ∞-Funktor μ (siehe Seite 45) unter Ausnutzung des kanonischen Isomorphismus $A \otimes \mathcal{L}_0 \otimes B \cong A \otimes B$ induziert.

Lemma 4.14 *T sei ein farbiger Baum. e sei eine einfarbige innere Kante von T und e' eine Kante, die kein Input ist und mindestens die Farben 1 und 2 besitzt. Entsteht beim Schrumpfen der Kante e eine Ecke, in der nur eine Kante endet, so sei der Nachfolger von e von e' verschieden. Es ist dann $(T_{(2,e')})_{/e} = (T_{/e})_{(2,e')}$, und die folgenden Diagramme kommutieren.*

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,\mathcal{L}_0)(2,e')} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\iota"'] & X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[d, "\iota"] \\
X_{T_{/e}}^{(2,e')} \arrow[r, "\iota"'] & X_{T_{/e}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_T^{(e,\mathcal{L}_0)(2,e')} \arrow[rr, "\iota"] \arrow[d, "\iota"'] & & X_{T_{(2,e')}}^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[d, "\iota"] \\
X_{T_{/e}}^{(2,e')} \arrow[r, "\iota"'] & X_{(T_{/e})_{(2,e')}} \arrow[r, phantom, "="] & X_{(T_{(2,e')})_{/e}}
\end{tikzcd}$$

Lemma 4.15 *T sei ein farbiger Baum. e sei eine einfarbige innere Kante von T und e' eine Kante, die kein Input ist und mindestens die Farben 1 und 2 besitzt. e' sei der Nachfolger von e und beim Schrumpfen der Kante e entsteht eine Ecke, in der eine Kante endet. Es ist dann $(T_{(2,e')})_{/e} = T_{/e}$, und das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,\mathcal{L}_0)(2,e')} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\iota"'] & X_{T_{(2,e')}}^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[d, "\iota"] \\
X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "\iota"'] & X_{T_{/e}} = X_{(T_{(2,e')})_{/e}}
\end{tikzcd}$$

Nun wird der zentrale Satz dieses Abschnitts bewiesen.

Satz 4.16 *Ist ein kohärentes 2-System $((X_1, X_2), F_1)$ und ein kohärentes k-System $((X_2, \ldots, X_{k+1}), F_2)$ mit $F_1^{[2]} = F_2^{[1]}$ gegeben, so existiert genau ein kohärentes (k+1)-System $((X_1, \ldots, X_{k+1}), F)$ mit $F^{[1,2]} = F_1$ und $F^{[2,k+1]} = F_2$.*

Beweis: Es werden zuerst die ∞-Funktoren F_T, $T \in \mathcal{T}_{k+1}$, definiert, anschließend wird gezeigt, daß diese ∞-Funktoren die Kohärenzbedingungen erfüllen.

Konstruktion des ∞-Funktors F_T

Es sei $X = (X_1, \ldots, X_{k+1})$ und $T \in \mathcal{T}_{k+1}$. Ist die Wurzelfarbe von T kleiner oder gleich 2, so sei

$$F_T = F_{1T} : X_T \longrightarrow X_{wT}.$$

Besitzt T die Farbe 1 nicht, so sei

$$F_T = F_{2T'} : X_T \longrightarrow X_{wT},$$

dabei ist T' so gewählt, daß $T'^{[2,k+1]} = T$ ist (dh. T' entsteht aus T, indem jede Zahl c durch c-1 ersetzt wird). Diese ∞-Funktoren erfüllen die Kohärenzbedingungen.
T sei also ein Baum mit Wurzelfarbe größer 2, der die Farbe 1 besitzt. Es darf angenommen werden, daß die ∞-Funktoren $F_{T'}$ mit $T' < T$ bereits definiert sind und die Kohärenzbedingungen erfüllen.
e' sei eine Kante von T mit Anfangsfarbe 1 und Endfarbe größer gleich 2.

$$\text{Kante e} \quad \overset{1}{\diagdown}_{\,d} \qquad \text{mit } d \geq 2$$

<u>**Fall 1:**</u> e' ist ein Input.
Es sei

$$F_T = F_{T_{(e',2)}} : X_T \longrightarrow X_{wT}.$$

(Da $T_{(e',2)}$ aus Bäumen zusammengesetzt ist, deren Filtrierung kleiner als die von T ist, darf davon ausgegangen werden, daß $F_{T_{(e',2)}}$ bereits definiert ist.)
<u>**Fall 2:**</u> e' ist kein Input.
$T_{(2,e')}$, $T_{(2,e',2)}$ und $T_{(e',2)}$ sind Bäume kleinerer Filtrierung als T bzw sind aus Bäumen kleinerer Filtrierung als T zusammengesetzt.
Aus der Kohärenz dieser ∞-Funktoren und (4.12) ergibt sich die Kommutativität des folgenden Diagramms.

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e',2)} \arrow[dd, "\iota"'] & & X_T^{(2,e',2)} \arrow[ll, "\iota"'] \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[dr, "\iota"] \arrow[dd, "\iota"] & & X_T^{(2,e')} \arrow[dd, "\iota"] \\
& X^{(2,e',2)}_{T_{(e',2)}} \arrow[dl, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & & X^{(2,e',2)}_{T_{(2,e')}} \arrow[dl, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & \\
X_{T_{(e',2)}} \arrow[drr, "F_{T_{(e',2)}}"'] & & X_{T_{(2,e',2)}} \arrow[d, "F_{T_{(2,e',2)}}"] & & X_{T_{(2,e')}} \arrow[dll, "F_{T_{(2,e')}}"] \\
& & X_{wT} & &
\end{tikzcd}$$

Da

$$X_T = \operatorname{colim}\left(X_T^{(e',2)} \xleftarrow{\iota} X_T^{(2,e',2)} \xrightarrow{\iota} X_T^{(2,e')}\right)$$

ist, folgt die Existenz eines ∞-Funktors

$$F_T : X_T \longrightarrow X_{wT}.$$

Nachrechnen der Kohärenz

Es wird nun gezeigt, daß der so konstruierte ∞-Funktor F_T die Kohärenzbedingungen erfüllt. Daraus ergibt sich dann auch, daß die Konstruktion des ∞-Funktors F_T unabhängig von Wahlen ist. Ohne Einschränkung darf angenommen werden, daß Fall 2 zugrunde liegt, da im Fall 1 die Kohärenz von F_T aus der von $F_{T_{(e',2)}}$ folgt.

Behauptung: e ist eine Kante des Baumes T, die kein Input ist. a sei die Zahl am Anfang der Kante e, b die am Ende. Ist $a \leq c \leq b$, so kommutiert das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,c)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_T \arrow[d, "F"] \\
X_{T_{(e,c)}} \arrow[r, "F"'] & X_{wT}
\end{tikzcd}$$

Beweis: Fall 1: $e \neq e'$.
Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & X_T^{(2,e')} \arrow[rr, "\iota"] & & X_{T_{(2,e')}} \arrow[ddr, "F"] & \\
 & & X^{(e,c)}_{T_{(2,e')}} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"] & & \\
X_T^{(2,e'),(e,c)} \arrow[uur, "\iota"] \arrow[urr, "\iota"] \arrow[drr, "\iota"] \arrow[ddr, "\iota"] & & & X_{T_{(2,e'),(e,c)}} \arrow[r, "F"] & X_{wT} \\
 & & X^{(2,e')}_{T_{(e,c)}} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"] & & \\
 & X_T^{(e,c)} \arrow[rr, "\iota"'] & & X_{T_{(e,c)}} \arrow[uur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert wegen (4.12) und der Kohärenz der ∞-Funktoren $F_{T'}$ mit $T' < T$. Mit (4.12) und der Definition von F_T folgt daraus, daß

$$\begin{tikzcd}
 & X_T^{(e,c)} \arrow[r, "\iota"] & X_T \arrow[dr, "F"] & \\
X_T^{(2,e'),(e,c)} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & X_T^{(2,e')} \arrow[ur] \arrow[r, "\iota"] & X_{T_{(2,e')}} \arrow[r, "F"] & X_{wT} \\
 & X_T^{(e,c)} \arrow[r, "\iota"'] & X_{T_{(e,c)}} \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Analog ergibt sich die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
& X_T^{(e,c)} \arrow[r, "\iota"] & X_T \arrow[dr, "F"] & \\
X_T^{(e',2),(e,c)} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & & & X_{wT} \\
& X_T^{(e,c)} \arrow[r, "\iota"'] & X_{T_{(e,c)}} \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

Da

$$X_T^{(e,c)} = \operatorname{colim}\left(X_T^{(e,c),(e',2)} \xleftarrow{\iota} X_T^{(e,c),(2,e',2)} \xrightarrow{\iota} X_T^{(e,c),(2,e')}\right)$$

ist, folgt die Behauptung.
<u>Fall 2:</u> $e = e'$.
Es wird zuerst der Fall $c = 1$ betrachtet. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& X_T^{(e,2)} \arrow[r, "\iota"] & X_{T_{(e,2)}} \arrow[dr, "F"] & \\
X_T^{(e,1)} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r, "\iota"] \arrow[drr, "\iota"'] & X_{T_{(e,2)}}^{(e,1)} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"] & & X_{wT} \\
& & X_{T_{(e,1)}} \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert aufgrund der Kohärenz und (4.12). Mit der Definition von F_T und (4.12) folgt daraus die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
& & X_T \arrow[dr, "F"] & \\
X_T^{(e,1)} \arrow[urr, "\iota"] \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & X_T^{(e,2)} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r, "\iota"] & X_{T_{(e,2)}} \arrow[r, "F"] & X_{wT} \\
& X_{T_{(e,1)}} \arrow[urr, "F"'] & &
\end{tikzcd}$$

Im Fall von $c = 2$ ist die Behauptung klar.
Ist $c > 2$, so ergibt sich mit (4.12) und der Kohärenz die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
 & X_T^{(e,c)} \arrow[r, "\iota"] & X_{T_{(e,c)}} \arrow[dr, "F"] & \\
X_T^{(e,2)} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r, "\iota"] \arrow[drr, "\iota"'] & X_{T_{(e,c)}}^{(e,2)} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"] & & X_{wT} \\
 & & X_{T_{(e,2)}} \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

Daraus folgt mit Hilfe der Definition von F_T und (4.12), daß

$$\begin{tikzcd}
 & X_T^{(e,c)} \arrow[r, "\iota"] & X_{T_{(e,c)}} \arrow[dr, "F"] & \\
X_T^{(e,2)} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[rr, "\iota"] \arrow[drr, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & & X_{T_{(e,2)}} \arrow[r, "F"] & X_{wT} \\
 & X_T^{(e,c)} \arrow[r, "\iota"'] & X_T \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Analog läßt sich die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
 & X_T^{(e,2)} \arrow[r, "\iota"] & X_T \arrow[dr, "F"] & \\
X_T^{(2,e,c)} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & & & X_{wT} \\
 & X_T^{(e,2)} \arrow[r, "\iota"'] & X_{T_{(e,2)}} \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

zeigen. Da

$$X_T^{(e,c)} = \operatorname{colim}\left(X_T^{(e,2)} \xleftarrow{\iota} X_T^{(2,e,2)} \xrightarrow{\iota} X_T^{(2,e,c)}\right)$$

ist, folgt die Behauptung.

Behauptung: e ist eine Kante des Baumes T, die kein Input ist. a sei die Zahl am Anfang der Kante e, b die am Ende. Ist $a < c \leq b$, so kommutiert das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(c,e)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_T \arrow[d, "F"] \\
X_{T_{(c,e)}} \arrow[r, "F"'] & X_{wT}
\end{tikzcd}$$

Beweis: Diese Kohärenzbedingung folgt analog wie oben.

Behauptung: Für jede einfarbige innere Kante von T kommutiert das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_T \arrow[d, "F"] \\
X_{T_{/e}} \arrow[r, "F"'] & X_{wT}
\end{tikzcd}$$

Beweis: Die Kommutativtät von

$$\begin{tikzcd}
 & X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "\iota"] & X_T \arrow[dr, "F"] & \\
X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(e',2)} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & & & X_{wT} \\
 & X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "\iota"'] & X_{T_{(e,\mathcal{L}_0)}} \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

folgt mit Hilfe von (4.12) und (4.13) analog wie oben.
Entsteht $T_{/e}$ aus T durch Schrumpfen der Kante e oder ist e' nicht der Nachfolger von e, so ergibt sich die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
 & X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "\iota"] & X_T \arrow[dr, "F"] & \\
X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(2,e')} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & & & X_{wT} \\
 & X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "\iota"'] & X_{T_{(e,\mathcal{L}_0)}} \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

mit (4.12) und (4.14) ebenfalls wie oben.
Entsteht beim Schrumpfen der Kante e eine Ecke, in der nur eine Kante endet, und ist e' der Nachfolger von e, so folgt die Kommutativtät von

$$\begin{tikzcd}
 & X_T^{(2,e')} \arrow[r, "\iota"] & X_{T_{(2,e')}} \arrow[ddr, "F"] & \\
 & X_{T_{(2,e')}}^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[ur] \arrow[dr, "\iota"] & & \\
X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(2,e')} \arrow[uur, "\iota"] \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & & X_{T_{(e,\mathcal{L}_0)}} \arrow[r, "F"] & X_{wT} \\
 & X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[ur, "\iota"] & &
\end{tikzcd}$$

mit (4.12) und (4.15). Daraus folgt dann ebenfalls analog wie oben die Kommutativtät von

$$\begin{tikzcd}
 & X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "\iota"] & X_T \arrow[dr, "F"] & \\
X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(2,e')} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & & & X_{wT} \\
 & X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "\iota"'] & X_{T_{(e,\mathcal{L}_0)}} \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

Da

$$X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} = \operatorname{colim}\left(X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(e',2)} \xleftarrow{\iota} X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(2,e',2)} \xrightarrow{\iota} X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(2,e')}\right)$$

ist, folgt die Gültigkeit der Kohärenzbedingung für F_T.

□

<u>Behauptung:</u> Ist e eine zweifarbige Kante und ein Input von T, so kommutiert das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[d, "="'] \arrow[dr, "F"] & \\
X_{T_{(e,2)}} \arrow[r, "F"'] & X_{wT}
\end{tikzcd}$$

<u>Beweis:</u> Da $T_{(2,e')} < T$ ist, darf angenommen werden, daß $F_{T_{(2,e')}}$ die Kohärenzbedingungen erfüllt. Folglich ergibt sich die Kommutativität des rechten Teils von

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(2,e')} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "="'] & X_{T_{(2,e')}} \arrow[d, "="'] \arrow[dr, "F"] & \\
X_{T_{(e,2)}}^{(2,e')} \arrow[r, "j"'] & X_{T_{(2,e'),(e,c)}} \arrow[r, "F"'] & X_{wT}
\end{tikzcd}$$

Es ist klar, daß der linke Teil auch kommutiert. Aufgrund der Definiton von F_T und da $T_{(e,2)}$ aus Bäumen, deren Filtrierung kleiner als die von T ist, zusammengesetzt ist, folgt die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(2,e')} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "="'] & X_T \arrow[dr, "F"] & \\
X_{T_{(e,2)}}^{(2,e')} \arrow[r, "i"'] & X_{T_{(e,2)}} \arrow[r, "F"'] & X_{wT}
\end{tikzcd}$$

Somit kommutiert auch

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(2,e')} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & X_T \arrow[dr, "F"] & \\
X_T \arrow[r, "="'] & X_{T_{(e,2)}} \arrow[r, "F"'] & X_{wT}
\end{tikzcd}$$

Analog läßt sich die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} X_T^{(e',2)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & X_T \arrow[dr, "F"] & \\ X_T \arrow[r, "="'] & X_{T_{(e,2)}} \arrow[r, "F"'] & X_{wT} \end{tikzcd}$$

zeigen. Da

$$X_T = \operatorname{colim}\left(X_T^{(e',2)} \xleftarrow{\iota} X_T^{(2,e',2)} \xrightarrow{\iota} X_T^{(e',2)}\right)$$

ist, folgt die Behauptung. □

Ist $((X_1, \ldots, X_k), F)$ ein kohärentes k-System, so heißen die $((X_i, X_{i+1}), F^{[i,i+1]})$ mit $1 \leq i < k$ die *zweifarbigen Komponenten* von $((X_1, \ldots, X_k), F)$.
Aus dem Satz folgt, daß ein kohärentes System durch seine 2-farbigen Komponenten eindeutig bestimmt ist. Daraus ergibt sich unmittelbar das folgende Korollar.

Korollar 4.17 *Es sei ein kohärentes l-System* $((X_1, \ldots, X_l), F_1)$ *und ein kohärentes m-System* $((X_l, \cdots, X_{l+m-1}), F_2)$ *gegeben, dann existiert genau ein kohärentes (l+m-1)-System* $((X_1, \ldots, X_{l+m-1}), F)$ *mit* $F^{[1,l]} = F_1$ *und* $F^{[l,l+m-1]} = F_2$.

Ist das kohärente (l+m-1)-System F aus dem kohärenten l-System F_1 und dem kohärenten m-System F_2 (gem. Kor. 4.17) zusammengesetzt, so wird

$$F = F_1 + F_2$$

geschrieben. + ist assoziativ.

Lemma 4.18 *Ist* $((X_1, \ldots, X_k), F_1)$ *ein kohärentes k-System,* $((X_k, \ldots, X_{k+l-1}), F_2)$ *ein kohärentes l-System,* $N_1 = \{j_1, \ldots, j_r\} \subset \underline{k}$, $N_2 = \{k_1, \ldots, k_s\} \subset \underline{l}$, $j_r = k$ *und* $k_1 = 1$, *so ist*

$$F_1^{N_1} + F_2^{N_2} = (F_1 + F_2)^N$$

mit $N = \{j_1, \ldots, j_r, k_2 + k - 1, \ldots, k_s + k - 1\}$.

Beweis: Ein Vergleich der 2-farbigen Komponenten liefert die Behauptung. □

Es folgen die Beweise der Lemmatas (4.13), (4.14) und (4.15).

Beweis von (4.13): Rechtes Diagramm: Die Kommutativität ist aufgrund der Definition des ∞-Funktor $\iota : X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(e',2)} \to X_{T_{/e}}^{(e',2)}$ klar.
Linkes Diagramm: Entsteht $T_{/e}$ aus T durch Schrumpfen der Kante e, so ist die Behauptung klar. Ohne Einschränkung darf angenommen werden, daß die Situation $(*)$ von 45 vorliegt, es werden die gleichen Bezeichungen wie auf Seite 45

verwendet. Es ist die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
(X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(e',2)})_{e_1} \otimes (X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(e',2)})_{e_2} \arrow[r, "(\iota)_{e_1} \otimes (\iota)_{e_2}"] \arrow[d, "\mu"'] & (X_T^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_1} \otimes (X_T^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_2} \arrow[d, "\mu"] \\
(X_{T_{/e}}^{(e',2)})_{\bar{e}} \arrow[r, "(\iota)_{\bar{e}}"'] & (X_{T_{/e}})_{\bar{e}}
\end{tikzcd}$$

zu überprüfen.
Ohne Einschränkung darf davon ausgegangen werden, daß e_2 kein Input ist und $e' \in \{e_1, e_2\}$ ist. In allen anderen Fällen ist die Behauptung klar.
<u>Fall 1:</u> $e' = e_1$. Mit $(X_T)_{e_1} = \mathcal{L}_n$ ergibt sich folgendes Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_1 \arrow[r, "i_{n-1,n} \otimes id"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_1 \arrow[d, "\mu"] \\
\mathcal{L}_1 \arrow[r, "i_{n-1,n}"'] & \mathcal{L}_n
\end{tikzcd}$$

Für $t_1, t_2 \in ob\mathcal{L}_1$ gilt

$$(\mu \circ (i_{n,n-1} \otimes id))(t_1, t_2) = \mu(t_1 + n - 1, t_2) = \begin{cases} t_1 + n - 1, & \text{falls } t_2 = 0, \\ t_2 + n - 1, & \text{falls } t_2 > 0. \end{cases}$$

$$(i_{n-1,n} \circ \mu)(t_1, t_2) = \mu(t_1, t_2) + n - 1 = \begin{cases} t_1 + n - 1, & \text{falls } t_2 = 0, \\ t_2 + n - 1, & \text{falls } t_2 > 0. \end{cases}$$

<u>Fall 2:</u> $e' = e_2$. Mit $(X_T)_{e_1} = \mathcal{L}_n$ und $(X_T)_{e_2} = \mathcal{L}_m$ erbigt sich das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_1 \arrow[r, "id \otimes i_{m-1,m}"] \arrow[d, "pr_2"'] & \mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_m \arrow[d, "\mu"] \\
\mathcal{L}_1 \arrow[r, "i_{m+n-2,m+n-1}"'] & \mathcal{L}_{n+m-1}
\end{tikzcd}$$

(Aus der Konstruktion des ∞-Funktors $\iota : X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(e',2)} \to X_{T_{/e}}^{(e',2)}$ folgt, daß der ∞-Funktor links pr_2 ist.)
Da e' mindestens die Farben 1 und 2 besitzt, ist $m > 1$. Für $t_1 \in \mathcal{L}_n$ und $t_2 \in \mathcal{L}_1$ gilt somit

$$(\mu \circ (id \otimes i_{m-1,m}))(t_1, t_2) = \mu(t_1, t_2 + m - 1) = t_2 + m - 1 + n - 1,$$

$$(i_{m+n-2,m+n-1} \circ pr_2)(t_1, t_2) = i_{m+n-2,m+n-1}(t_2) = t_2 + m + n - 2.$$

$\square$

Beweis von (4.14): Entsteht $T_{/e}$ aus T durch Schrumpfen der Kante e, so ist die Behauptung erfüllt. Ohne Einschränkung entstehe beim Schrumpfen der Kante e eine Ecke, in der nur eine Kante endet. Es liegt also die Situation (*) vor, es werden die gleichen Bezeichnungen wie auf Seite 45 verwendet. Nach Voraussetzung ist dann e' nicht der Nachfolger von e.
<u>Linkes Diagramm:</u> Es ist die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
(X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(2,e')})_{e_1} \otimes (X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(2,e')})_{e_2} \arrow[r, "(\iota)_{e_1} \otimes (\iota)_{e_2}"] \arrow[d, "\mu"'] & (X_T^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_1} \otimes (X_T^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_2} \arrow[d, "\mu"] \\
(X_{T_{/e}}^{(2,e')})_{\bar{e}} \arrow[r, "(\iota)_{\bar{e}}"'] & (X_{T_{/e}})_{\bar{e}}
\end{tikzcd}$$

zu überprüfen. Der einzig interessante Fall ist $e' = e_2$. Die anderen Fälle sind klar. Mit $(X_T)_{e_1} = \mathcal{L}_n$ und $(X_T)_{e_2} = \mathcal{L}_m$ ergibt sich das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_{m-1} \arrow[r, "id \otimes i_{0,\dots,m-1}"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_m \arrow[d, "\mu"] \\
\mathcal{L}_{n+m-2} \arrow[r, "i_{0,\dots,n+m-2}"'] & \mathcal{L}_{n+m-1}
\end{tikzcd}$$

Für $t_1 \in ob\mathcal{L}_n$ und $t_2 \in ob\mathcal{L}_{m-1}$ gilt

$$(\mu \circ (id \otimes i_{0,\dots,m-1}))(t_1, t_2) = \mu(t_1, t_2) = \begin{cases} t_1, & \text{falls } t_2 = 0, \\ t_2 + n - 1, & \text{falls } t_2 > 0, \end{cases}$$

$$(i_{0,\dots,n+m-2} \circ \mu)(t_1, t_2) = \mu(t_1, t_2) = \begin{cases} t_1, & \text{falls } t_2 = 0, \\ t_2 + n - 1, & \text{falls } t_2 > 0, \end{cases}$$

<u>Rechtes Diagramm:</u> Es ist die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
(X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(2,e')})_{e_1} \otimes (X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(2,e')})_{e_2} \arrow[r, "(\iota)_{e_1} \otimes (\iota)_{e_2}"] \arrow[d, "\mu"'] & (X_{T_{(2,e')}}^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_1} \otimes (X_{T_{(2,e')}}^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_2} \arrow[d, "\mu"] \\
(X_{T_{/e}}^{(2,e')})_{\bar{e}} \arrow[r, "(\iota)_{\bar{e}}"'] & (X_{(T_{/e})(2,e')})_{\bar{e}}
\end{tikzcd}$$

zu überprüfen. Ist e_2 ein Input, so ist die Behauptung klar. Ohne Einschränkung sei also e_2 eine innere Kante. Die einzig interessanten Fälle sind ist $e' = e_2$ bzw e' Nachfolger von e_1. Die anderen Fälle sind klar.
<u>Fall 1:</u> $e' = e_2$.

Mit $(X_T)_{e_1} = \mathcal{L}_n$ und $(X_T)_{e_2} = \mathcal{L}_d$ ergibt sich das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_d \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_d \arrow[d, "\mu"] \\
\mathcal{L}_{n+d-1} \arrow[r, "id"'] & \mathcal{L}_{n+d-1}
\end{tikzcd}$$

Da die horizontalen Funktoren Identitäten sind, kommutiert das Diagramm.
<u>Fall 2:</u> e' Nachfolger von e_1.
Es ergibt sich das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_1 \arrow[r, "i_{0,2} \otimes id"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{L}_1 \arrow[d, "\mu"] \\
\mathcal{L}_1 \arrow[r, "i_{0,2}"'] & \mathcal{L}_2
\end{tikzcd}$$

Für $t_1 \in ob\mathcal{L}_n$ und $t_2 \in ob\mathcal{L}_m$ gilt

$$(\mu \circ (i_{0,2} \otimes id))(t_1, t_2) = \left\{ \begin{array}{ll} i_{0,2}(t_1), & \text{falls } t_2 = 0, \\ 2, & \text{falls } t_2 = 1, \end{array} \right\} = (i_{0,2} \circ \mu)(t_1, t_2)$$

$\square$

Beweis von (4.15): e_2 bezeichne die von e verschiedene Kante mit Nachfolger e'. $\bar{e}$ sei die den Kanten e' und e_2 entsprechende Kante in $T_{/e}$. Es ist die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
(X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(2,e')})_{e'} \otimes (X_T^{(e,\mathcal{L}_0),(2,e')})_{e_2} \arrow[r, "(\iota)_{e'} \otimes (\iota)_{e_2}"] \arrow[d, "(\iota)_{e'} \otimes id"'] & (X_{T_{(2,e')}}^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e'} \otimes (X_{T_{(2,e')}}^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_2} \arrow[d, "\mu"] \\
(X_T^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e'} \otimes (X_T^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_2} \arrow[r, "\mu"'] & (X_{T_{/e}})_{\bar{e}}
\end{tikzcd}$$

zu überprüfen. Ist e_2 ein Input, so ist die Behauptung richtig. Ohne Einschränkung darf also angenommen werden, daß e_2 eine innere Kante ist. Mit $(X_T)_{e'} = \mathcal{L}_n$ ergibt sich das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_{n-1} \otimes \mathcal{L}_1 \arrow[r, "id \otimes i_{0,2}"] \arrow[d, "i_{0,\ldots,n-1} \otimes id"'] & \mathcal{L}_{n-1} \otimes \mathcal{L}_2 \arrow[d, "\mu"] \\
\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_1 \arrow[r, "\mu"'] & \mathcal{L}_n
\end{tikzcd}$$

Für $t_1 \in ob\mathcal{L}_{n-1}$ und $t_2 \in ob\mathcal{L}_1$ gilt

$$(\mu \circ (id \otimes i_{0,2}))(t_1, t_2) = \begin{cases} \mu(t_1, 0), & \text{falls } t_2 = 0, \\ \mu(t_1, t_2 + 1), & \text{falls } t_2 > 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} t_1, & \text{falls } t_2 = 0, \\ t_2 + n - 1, & \text{falls } t_2 > 0, \end{cases}$$

$$(\mu \circ (i_{0,\ldots,n-1} \otimes id))(t_1, t_2) = \mu(t_1, t_2)$$

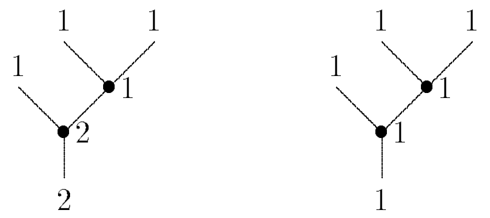
$$= \begin{cases} t_1, & \text{falls } t_2 = 0, \\ t_2 + n - 1, & \text{falls } t_2 > 0. \end{cases}$$

□

4.4 Strikt monoidale ∞-Funktoren und monoidale ∞-Funktoren

Es wird gezeigt, daß sich die strikt monoidalen ∞-Funktoren als Teilmenge der monoidalen ∞-Funktoren auffassen lassen.

Der (zusammengesetzte) Baum $\hat{T}$. T sei ein zusammengesetzter 2-farbiger Baum. $\hat{T}$ entsteht aus T, indem jede 2 durch eine 1 ersetzt wird. Es ist $\hat{T} \in \mathcal{T}_1'$. Ist $T \in \mathcal{T}_2$, so ist $\hat{T} \in \mathcal{T}_1$.



Der ∞-Funktor $\tau_T : X_T \to X_{2\hat{T}}$. $X = (X_1, X_2)$ sei ein 2-Tupel von ∞-Kategorien. Für $T \in \mathcal{T}_2$ sei

$$\tau_T := (\tau_T)_{e(0)} \otimes \cdots \otimes (\tau_T)_{e(deg_T)}$$

mit

$$(\tau_T)_e = \begin{cases} i_{011} : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1, & \text{falls } (X_T)_e = \mathcal{L}_2, \\ i_{00} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0, & \text{falls e Wurzel und } (X_T)_e = \mathcal{L}_1, \\ F : X_1 \to X_2, & \text{falls } (X_T)_e = X_1, \\ id, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$(\tau_T)_e$ heißt *e-Komponente* von τ_T.

τ läßt sich auch für zusammengesetzte Bäume definieren. Ist $T = T_2 \circ_e T_1$ mit $T_1 \in \mathcal{T}_2'$ und $T_2 \in \mathcal{T}_2$ und ist τ_{T_1} bereits definiert, so sei

$$\tau_T := \tau_{T_2}^{(e,\tau_{T_1})} := (\tau_T)_{e(0)} \otimes \cdots \otimes (\tau_T)_{e(deg_{T_2})}$$

mit

$$(\tau_T)_{e'} := \begin{cases} (\tau_{T_2})_{e'}, & \text{falls } e' \neq e, \\ \tau_{T_1}, & \text{falls } e' = e. \end{cases}$$

Satz 4.19 *$F : X_1 \to X_2$ sei ein strikt monoidaler ∞-Funktor zwischen monoidalen ∞-Kategorien (X_1, F_1) und (X_2, F_2). $((X_1, X_2), \{\underline{F}_T\}_{T \in \mathcal{T}_2})$ mit*

$$\underline{F}_T = \begin{cases} F_{1T}, & \textit{falls } wT = 1, \\ F_{2\hat{T}} \circ \tau_T, & \textit{falls } wT = 2, \end{cases}$$

ist dann ein monoidaler ∞-Funktor mit Quelle (X_1, F_1) und Ziel (X_2, F_2).

Beweis: Es ist nur zu zeigen, daß es sich um einen monoidalen ∞-Funktor handelt. Der Rest ist klar. Beim Nachrechnen der Kohärenzbedingungen darf ohne Einschränkung $wT = 2$ angenommen werden. Ist $T = |_2^2$, so ist

$$\underline{F}_{|_2^2} = F_{2|_1^1} \circ \tau_T = Id_{X_2}.$$

<u>Behauptung:</u> Ist e eine zweifarbige Kante des Baumes $T \in \mathcal{T}_2$, die kein Input ist, so kommutiert das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd} X_T^{(2,e)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_T \arrow[d, "\underline{F}"] \\ X_{T_{(2,e)}} \arrow[r, "\underline{F}"'] & X_2 \end{tikzcd}$$

<u>Beweis:</u> Es ist $\widehat{T_{(2,e)}} = \hat{T}$ und

$$\begin{tikzcd} X_T^{(2,e)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_T \arrow[d, "\tau"] \\ X_{T_{(2,e)}} \arrow[r, "\tau"'] & X_{2\widehat{T_{(2,e)}}} = X_{2\hat{T}} \end{tikzcd}$$

kommutiert, da

$$(\tau_T)_e \circ (i_T^{(2,e)})_e = i_{0,1,1} \circ i_{0,1} = id = (\tau_{T_{(2,e)}})_e \circ (j_T^{(2,e)})_e$$

und

$$(\tau_T)_{e'} \circ (i_T^{(2,e)})_{e'} = id = i_{0,1,1} \circ i_{0,2} = (\tau_{T_{(2,e)}})_{e'} \circ (j_T^{(2,e)})_{e'}$$

für jede innere Kante e' mit Nachfolger e. Es ist dann

$$\underline{F}_T \circ i_T^{(2,e)} = F_{2\hat{T}} \circ \tau_T \circ i_T^{(2,e)} = F_{2\widehat{T_{(2,e)}}} \circ \tau_{T_{(2,e)}} \circ j_T^{(2,e)} = \underline{F}_{T_{(2,e)}} \circ j_T^{(2,e)}.$$

Behauptung: e sei eine Kante des Baumes T, die kein Input ist. a sei die Zahl am Anfang und b die am Ende der Kante e. Ist $a \leq c \leq b$, so kommutiert das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,c)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_T \arrow[d, "\underline{F}"] \\
X_{T_{(e,c)}} \arrow[r, "\underline{F}"'] & X_2
\end{tikzcd}$$

Beweis: Der ∞-Funktor

$$\tau_T^{(e,c)} : X_T^{(e,c)} \longrightarrow X_{2\hat{T}}^{(e,1)}$$

unterscheide sich von dem ∞-Funktor $\tau_T : X_T \to X_{\hat{T}}$ nur in der e-Komponente. Es sei

$$\begin{array}{rrcl} (\tau_T^{(e,c)})_e : & \mathcal{L}_{c-a} & \longrightarrow & \mathcal{L}_0 \\ & t & \longmapsto & 0. \end{array}$$

Es ist $\widehat{T_{(e,c)}} = \hat{T}_{(e,1)}$. Es wird die Kommutatvität von

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,c)} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\tau"] \arrow[dd, "j"'] & & X_T \arrow[d, "\tau"] \\
& X_{2\hat{T}}^{(e,1)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_{2\hat{T}} \arrow[d, "F_2"] \\
X_{T_{(e,c)}} \arrow[r, "\tau"'] & X_{2\widehat{T_{(e,c)}}} = X_{2\hat{T}_{(e,1)}} \arrow[r, "F_2"'] & X_2
\end{tikzcd}$$

gezeigt. Für $t \in ob\mathcal{L}_{c-a}$ ist

$$\begin{aligned}
((\tau_T)_e \circ (i_T^{(e,c)})_e)(t) &= \begin{cases} (\tau_T)_e(t+b-c), & \text{falls e Wurzel,} \\ (\tau_T)_e(t+b-c+1), & \text{falls e innere Kante,} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls e Wurzel,} \\ 1, & \text{falls e innere Kante.} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(i_{\hat{T}}^{(e,1)})_e \circ (\tau_T^{(e,c)})_e)(t) &= (i_{\hat{T}}^{(e,1)})_e(0) = \begin{cases} b-c, & \text{falls e Wurzel,} \\ b-c+1, & \text{falls e innere Kante,} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls e Wurzel,} \\ 1, & \text{falls e innere Kante.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\tau_T \circ i_T^{(e,c)} = i_{\hat{T}}^{(e,1)} \circ \tau_T^{(e,c)}.$$

Da $(\hat{T}_{(e,1)})_e = \mathcal{L}_0$ ist, folgt

$$(\tau_T)_e \circ (j_T^{(e,c)})_e = (j_{\hat{T}}^{(e,1)})_e \circ (\tau_T^{(e,c)})_e,$$

somit gilt

$$\tau_T \circ j_T^{(e,c)} = j_{\hat{T}}^{(e,1)} \circ \tau_T^{(e,c)}.$$

Aufgrund der Kohärenz von (X_2, F_2) gilt

$$F_{2\hat{T}} \circ i_{\hat{T}}^{(e,1)} = F_{2\hat{T}_{(e,1)}} \circ j_{\hat{T}}^{(e,1)}.$$

Damit ist die Kommutativität des Diagramms gezeigt. Ist $T_{(e,1)} = T_2 \circ_e T_1$, so ist $\hat{T}_{(e,1)} = \hat{T}_2 \circ \hat{T}_1$ und es ist

$$F_{2\hat{T}_{(e,1)}} \circ \tau_{T_{(e,c)}} = F_{2\widehat{T_2}} \circ Id_{X_{T_2}}^{(e,F_{\widehat{T_1}})} \circ \tau_{T_2}^{(e,\tau_{T_1})} = F_{2\widehat{T_2}} \circ \tau_{T_2}^{(e,F_{T_1})} = \underline{F}_T$$

ist, folgt die Behauptung. Dabei ist $Id_{X_{T_2}}^{(e,F_{\widehat{T_1}})}$ durch $F_{\widehat{T_1}}$ induziert, und $\tau_{T_2}^{(e,F_{T_1})}$ unterscheidet sich von τ_{T_2} nur in der e-Komponente, die neue e-Komponente ist F_{T_1}.

<u>Behauptung:</u> Ist e eine einfarbige Kante des Baumes T, so kommutiert das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_T \arrow[d, "\underline{F}"] \\
X_{T_{/e}} \arrow[r, "\underline{F}"'] & X_2
\end{tikzcd}$$

<u>Beweis:</u> Der ∞-Funktor

$$\tau_T^{(e,\mathcal{L}_0)} : X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \longrightarrow X_{\hat{T}}^{(e,\mathcal{L}_0)}$$

unterscheide sind von dem ∞-Funktor τ_T nur in der e-Komponente. Es sei

$$\begin{array}{rccc} (\tau_T^{(e,\mathcal{L}_0)})_e : & \mathcal{L}_0 & \longrightarrow & \mathcal{L}_0 \\ & 0 & \longmapsto & 0. \end{array}$$

Es wird die Kommutativtät von

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\tau"] \arrow[dd, "j"'] & & X_T \arrow[d, "\tau"] \\
& X_{2\hat{T}}^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_{2\hat{T}} \arrow[d, "F_2"] \\
X_{T_{/e}} \arrow[r, "\tau"'] & X_{2\widehat{T_{/e}}} = X_{2\hat{T}_{/e}} \arrow[r, "F_2"'] & X_2
\end{tikzcd}$$

gezeigt. Offensichtlich gilt

$$i_{\hat{T}}^{(e,\mathcal{L}_0)} \circ \tau_T^{(e,\mathcal{L}_0)} = \tau_T \circ i_T^{(e,\mathcal{L}_0)}.$$

Aufgrund der Kohärenz von (X_2, F_2) gilt

$$F_{2\hat{T}} \circ i_{\hat{T}}^{(e,\mathcal{L}_0)} = F_{2\hat{T}_{/e}} \circ j_{\hat{T}}^{(e,\mathcal{L}_0)}.$$

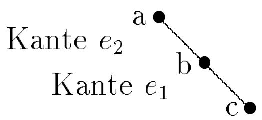
Zu zeigen bleibt

$$j_{\hat{T}} \circ \tau_T^{(e,\mathcal{L}_0)} = \tau_{T_{/e}} \circ j_T^{/e}.$$

Ohne Einschränkung darf davon ausgegangen werden, daß die Situation (*) von Seite 45 vorliegt, andernfalls ist die Gültigkeit der Gleichung klar. Es werden die Bezeichnungen von Seite 45 genommen.
Es ist nur zu zeigen, daß τ und μ miteinander verträglich sind, das heißt, es ist die Kommutativität des folgenden Diagramms zu zeigen.

$$\begin{tikzcd}
(X_T^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_1} \otimes (X_T^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_2} \arrow[r, "(\tau)_{e_1} \otimes (\tau)_{e_2}"] \arrow[d, "\mu"'] & (X_{\hat{T}}^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_1} \otimes (X_{\hat{T}}^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_2} \arrow[d, "\mu"] \\
(X_{T_{/e}})_{\bar{e}} \arrow[r, "(\tau)_{\bar{e}}"'] & (X_{\widehat{T_{/e}}})_{\bar{e}} = (X_{\hat{T}_{/e}})_{\bar{e}}
\end{tikzcd}$$

a sei die Farbe am Anfang der Kante e_2, b die am Ende. Dann ist b auch die Farbe am Anfang der Kante e_1, die Farbe am Ende der Kante e_1 sei c.



Ist e_1 die Wurzel von T, so ist nichts zu zeigen, da $(X_{\hat{T}_{/e}})_{\bar{e}} = \mathcal{L}_0$ ist. Ist e_2 ein Input, so ist die Kommutativtät des Diagramms offensichtlich. e_1 und e_2 seien also innere Kanten.
<u>Fall 1:</u> $(X_T)_{e_1} = \mathcal{L}_1$ und $(X_T)_{e_2} = \mathcal{L}_1$.
Für $t_1, t_2 \in ob\mathcal{L}_1$ gilt

$$(\mu \circ ((\tau_T)_{e_1} \otimes (\tau_T)_{e_2}))(t_1, t_2) = \mu(t_1, t_2) = ((\tau_{\widehat{T_{/e}}})_{\bar{e}} \circ \mu)(t_1, t_2),$$

da $(X_{T_{/e}})_{\bar{e}} = \mathcal{L}_1$ ist.
<u>Fall 2:</u> $(X_T)_{e_1} = \mathcal{L}_1$ und $(X_T)_{e_2} = \mathcal{L}_2$.
Für $t_1 \in ob\mathcal{L}_1$ und $t_2 \in ob\mathcal{L}_2$ ist

$$\begin{aligned}
(\mu \circ ((\tau_T)_{e_1} \otimes (\tau_T)_{e_2}))(t_1, t_2) &= \begin{cases} \mu(t_1, 0), & \text{falls } t_2 = 0, \\ \mu(t_1, 1), & \text{falls } t_2 > 0, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls } t_2 = 0 = t_1, \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases}
\end{aligned}$$

und

$$((\tau_{\widehat{T_{/e}}})_{\bar{e}} \circ \mu)(t_1, t_2) = \begin{cases} (\tau_{\widehat{T_{/e}}}(0)_{\bar{e}}, & \text{falls } t_2 = 0 = t_1, \\ (\tau_{\widehat{T_{/e}}}(2)_{\bar{e}}, & \text{falls } t_2 = 2 \text{ und } t_1 = 1, \\ (\tau_{\widehat{T_{/e}}}(1))_{\bar{e}}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{falls } t_2 = 0 = t_1, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

<u>Fall 3:</u> $(X_T)_{e_1} = \mathcal{L}_2$ und $(X_T)_{e_2} = \mathcal{L}_1$.
Für $t_1 \in ob\mathcal{L}_2$ und $t_2 \in ob\mathcal{L}_1$ ist

$$(\mu \circ ((\tau_T)_{e_1} \otimes (\tau_T)_{e_2}))(t_1, t_2) = \begin{cases} \mu(0, t_2), & \text{falls } t_1 = 0, \\ \mu(1, t_2), & \text{falls } t_1 > 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{falls } t_1 = 0 = t_2, \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$((\tau_{\widehat{T_{/e}}})_{\bar{e}} \circ \mu)(t_1, t_2) = \begin{cases} (\tau_{\widehat{T_{/e}}})_{\bar{e}}(t_1), & \text{falls } t_2 = 0, \\ (\tau_{\widehat{T_{/e}}})_{\bar{e}}(t_2 + 1), & \text{falls } t_2 > 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{falls } t_1 = 0 = t_2, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist die Kommutativität des Diagramms gezeigt.
<u>Behauptung:</u> Ist e eine zweifarbige Kante und ein Input des Baumes T, so kommutiert das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd} X_T \arrow[d, "="'] \arrow[dr, "\underline{F}"] & \\ X_{T_{(e,2)}} \arrow[r, "\underline{F}"'] & X_2 \end{tikzcd}$$

<u>Beweis:</u> Da $(\tau_T)_e = (\tau_{T_{(e,2)}})_e$ ist, gilt

$$\tau_T = \tau_{T_{(e,2)}}.$$

Aufgrund der Kohärenz von (X_2, F_2) gilt

$$F_{2\hat{T}} = F_{2\hat{T}_{(e,1)}},$$

daraus ergibt sich die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} X_T \arrow[rr, "\tau"] \arrow[d, "="'] & & X_{2\hat{T}} \arrow[d, "="'] \arrow[drr, "F_2"] & & \\ X_{T_{(e,2)}} \arrow[r, "\tau"'] & X_{2\widehat{T_{(e,2)}}} & = X_{2\hat{T}_{(e,1)}} \arrow[rr, "F_2"'] & & X_2 \end{tikzcd}.$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

4.5 Komposition monoidaler ∞-Funktoren

Mit Hilfe kohärenter 3-System wird die Komposition monoidaler ∞-Funktoren erklärt, mit Hilfe kohärenter 4-Systeme wird die Assoziativität der Komposition gezeigt.

Definition 4.20 *Sind monoidale ∞-Funktoren (also kohärente 2-Systeme)*

$$X_1 \xrightarrow{F_{1,2}} X_2 \xrightarrow{F_{2,3}} X_3$$

gegeben, so ist die Komposition der monoidalen ∞-Funktoren definiert als

$$F_{2,3} \circ F_{1,2} := (F_{1,2} + F_{2,3})^{\{1,3\}}.$$

Lemma 4.21 *Die Komposition monoidaler ∞-Funktoren ist assoziativ.*

Beweis: Es seien monoidale ∞-Funktoren

$$X_1 \xrightarrow{F_{1,2}} X_2 \xrightarrow{F_{2,3}} X_3 \xrightarrow{F_{3,4}} X_4$$

gegeben. Mit (4.7) und (4.18) folgt

$$\begin{aligned}
(F_{3,4} \circ F_{2,3}) \circ F_{1,2} &= (F_{2,3} + F_{3,4})^{\{1,3\}} \circ F_{1,2} \\
&= (F_{1,2} + (F_{2,3} + F_{3,4})^{\{1,3\}})^{\{1,3\}} \\
&= ((F_{1,2} + (F_{2,3} + F_{3,4}))^{\{1,2,4\}})^{\{1,3\}} \\
&= (F_{1,2} + F_{2,3} + F_{3,4})^{\{1,4\}} \\
&= ((F_{1,2} + F_{2,3}) + F_{3,4})^{\{1,3,4\}})^{\{1,3\}} \\
&= ((F_{1,2} + F_{2,3})^{1,3} + F_{3,4})^{\{1,3\}} \\
&= F_{3,4} \circ ((F_{1,2} + F_{2,3})^{\{1,3\}}) \\
&= F_{3,4} \circ (F_{2,3} \circ F_{1,2}).
\end{aligned}$$

Folglich ist die Komposition monoidaler ∞-Funktoren assoziativ. □

4.5.1 Komposition mit strikt monoidalen ∞-Funktoren

Situation: Es werden Kompositionen

$$X_1 \xrightarrow{F} X_2 \xrightarrow{G} X_3$$

untersucht, wobei F ein monoidaler ∞-Funktor und G ein strikt monoidaler ∞-Funktor ist. Als Anwendung wird $Id \circ F$ berechnet.

Satz 4.22 *$F : X_1 \to X_2$ sei ein monoidaler und $G : X_2 \to X_3$ ein strikt monoidaler ∞-Funktor. Für $T \in \mathcal{T}_2^0$ gilt*

$$(\underline{G} \circ F)_T = G \circ F_T.$$

Zum Beweis dieses Satzes werden noch einige Lemmatas benötigt.
Es sei $H := F + \underline{G}$.

Lemma 4.23 *Es sei $T \in \mathcal{T}_3$ mit $wT = 3$. Die Wurzel e_0 von T sei kein Input und die Zahl am Anfang der Wurzel sei 2. Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} X_T \arrow[d, "i^{e_0}_{1,1}"'] \arrow[dr, "H_T"] & \\ X_T \arrow[r, "H_T"'] & X_3 \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis: e sei eine Kante, die die Farben 1 und 2 annimmt, gibt es eine solche Kante nicht, so folgt die Behauptung, da G ein strikt monoidaler ∞-Funktor ist. Ist e ein Input, so ist $H_T = H_{T_{(e,2)}}$ und es folgt daraus sofort die Gültigkeit der Behauptung für T, da $T_{(e,2)}$ aus Bäumen kleinerer Filtrierung zusammengesetzt ist.
Ist e eine innere Kante, so ist $T_{(2,e)} < T$ und es darf angenommen werden, daß die Behauptung für $T_{(2,e)}$ erfüllt ist. Folglich kommutiert der rechte Teil des folgenden Diagramms. Die Kommutativität des linken Teils ist klar.

$$\begin{tikzcd} X_T^{(2,e)} \arrow[r, "j_T^{(2,e)}"] \arrow[d, "i^{e_0}_{1,1}"'] & X_{T_{(2,e)}} \arrow[d, "i^{e_0}_{1,1}"'] \arrow[dr, "H_{T_{(2,e)}}"] & \\ X_T^{(2,e)} \arrow[r, "j_T^{(2,e)}"'] & X_{T_{(2,e)}} \arrow[r, "H_{T_{(2,e)}}"'] & X_3 \end{tikzcd}$$

Aufgrund der Kohärenz kommutiert somit auch

$$\begin{tikzcd} X_T^{(2,e)} \arrow[r, "i_T^{(2,e)}"] \arrow[d, "i^{e_0}_{1,1}"'] & X_T \arrow[dr, "H_T"] & \\ X_T^{(2,e)} \arrow[r, "i_T^{(2,e)}"'] & X_T \arrow[r, "H_T"'] & X_3 \end{tikzcd}$$

Wegen $i_T^{(2,e)} \circ i^{e_0}_{1,1} = i^{e_0}_{1,1} \circ i_T^{(2,e)}$, folgt daraus die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(2,e)} \arrow[r, "i_T^{(2,e)}"] \arrow[d, "i_T^{(2,e)}"'] & X_T \arrow[dr, "H_T"] & \\
X_T \arrow[r, "i_{1,1}^{e_0}"'] & X_T \arrow[r, "H_T"'] & X_3
\end{tikzcd}$$

Analog läßt sich die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,2)} \arrow[r, "i_T^{(e,2)}"] \arrow[d, "i_T^{(e,2)}"'] & X_T \arrow[dr, "H_T"] & \\
X_T \arrow[r, "i_{1,1}^{e_0}"'] & X_T \arrow[r, "H_T"'] & X_3
\end{tikzcd}$$

zeigen. Da

$$X_T = \operatorname{colim}(X_T^{(e,2)} \xleftarrow{i} X_T^{(2,e,2)} \xrightarrow{i} X_T^{(2,e)})$$

ist, folgt die Behauptung. □

Lemma 4.24 *Es sei $T \in \mathcal{T}_3$ mit $wT = 3$. Die Wurzel e_0 von T sei kein Input und die Zahl am Anfang der Wurzel sei 1. Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[d, "i_{1,1,2}^{e_0}"'] \arrow[dr, "H_T"] & \\
X_T \arrow[r, "H_T"'] & X_3
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis: Am Wurzelanfang des Baumes $T_{(2,e_0)}$ steht die Farbe 2. Die Kommutativität des rechten Teils des folgenden Diagramms wurde in (4.23) gezeigt. Die Kommutativtät des linken Quadrats ist klar.

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(2,e_0)} \arrow[r, "j_T^{(2,e_0)}"] \arrow[d, "i_{1,1}^{e_0}"'] & X_{T_{(2,e_0)}} \arrow[d, "i_{1,1}^{e_0}"'] \arrow[dr, "H_T"] & \\
X_T^{(2,e_0)} \arrow[r, "j_T^{(2,e_0)}"'] & X_{T_{(2,e_0)}} \arrow[r, "H_T"'] & X_3
\end{tikzcd}$$

Aufgrund der Kohärenz kommutiert somit auch folgendes Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(2,e_0)} \arrow[r, "i_T^{(2,e_0)}"] \arrow[d, "i^{e_0}_{1,1}"'] & X_T \arrow[dr, "H_T"] & \\
X_T^{(2,e_0)} \arrow[r, "i_T^{(2,e_0)}"'] & X_T \arrow[r, "H_T"'] & X_3
\end{tikzcd}$$

Wegen $(i_T^{(2,e_0)})_{e_0} \circ (i^{e_0}_{1,1})_{e_0} = i_{0,1} \circ i_{1,1} = i_{1,1,2} \circ i_{0,1} = (i^{e_0}_{1,1,2})_{e_0} \circ (i_T^{(2,e_0)})_{e_0}$ kommutiert auch

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(2,e_0)} \arrow[r, "i_T^{(2,e_0)}"] \arrow[d, "i_T^{(2,e_0)}"'] & X_T \arrow[dr, "H_T"] & \\
X_T \arrow[r, "i^{e_0}_{1,1,2}"'] & X_T \arrow[r, "H_T"'] & X_3
\end{tikzcd}$$

Da

$$X_T = \operatorname{colim}(X_T^{(e_0,2)} \xleftarrow{i} X_T^{(2,e_0,2)} \xrightarrow{i} X_T^{(2,e_0)})$$

ist, folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 4.25 *Es sei $T \in \mathcal{T}_3$ mit $wT = 3$. Die Wurzel e_0 von T sei kein Input und die Zahl am Anfang der Wurzel sei 1. Dann kommutiert das folgende Diagramm.*

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[r, "H_T"] \arrow[d, "i^{e_0}_{0,0,1}"'] & X_3 \\
X_T^{(e_0,2)} \arrow[r, "j_T^{(e_0,2)}"'] & X_{T_{(e_0,2)}} \arrow[u, "H_{T_{(e_0,2)}}"']
\end{tikzcd}$$

Beweis: Die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[r, "H_T"] \arrow[d, "i^{e_0}_{0,0,1}"'] \arrow[dr, "i^{e_0}_{1,1,2}"] & X_3 \\
X_T^{(e_0,2)} \arrow[r, "i_T^{(e_0,2)}"'] & X_T \arrow[u, "H_T"']
\end{tikzcd}$$

folgt mit Lemma 4.24 und da $(i_T^{(e_0,2)})_{e_0} \circ (i^{e_0}_{0,0,1})_{e_0} = i_{1,2} \circ i_{0,0,1} = i_{1,1,2}$ ist. Da H_T die Kohärenzbedingungen erfüllt, folgt die Behauptung. $\square$

Beweis von Satz 4.22: Statt $F + \underline{G}$ wird H geschrieben. Ist $X = (X_1, X_2, X_3)$ und $N = \{1, 3\}$, so ist für $T \in \mathcal{T}_2^0$

$$NX_T = X_{{T^N}_{(e_0,2)}}.$$

Mit Lemma 4.25 folgt die Kommutativtät von

$$\begin{tikzcd}
NX_T \arrow[r, "I_{N,T}"] & X_{T^N} \arrow[r, "H_{T^N}"] \arrow[d, "i^{e_0}_{0,0,1}"'] & X_3 \\
& X^{(e_0,2)}_{T^N} \arrow[r, "j^{(e_0,2)}_{T^N}"'] & X_{{T^N}_{(e_0,2)}} \arrow[u, "H_{{T^N}_{(e_0,2)}}"']
\end{tikzcd}$$

Da

$$\begin{aligned}
(j^{(e_0,2)}_{T^N})_{e_0} \circ (i^{e_0}_{0,0,1})_{e_0} \circ (I_{N,T})_{e_0} &= (i^{e_0}_{0,0,1})_{e_0} \circ (I_{N,T})_{e_0} \\
&= \begin{cases} i_{0,0,1} \circ i_{0,2}, & \text{falls e Wurzel, jedoch kein Input,} \\ id \circ id, & \text{sonst,} \end{cases} \\
&= id
\end{aligned}$$

ist, gilt

$$j^{(e_0,2)}_{T^N} \circ i^{e_0}_{0,0,1} \circ I_{N,T} = Id.$$

Es ist ${T^N}_{(e_0,2)} = |^2_3 \circ_{e(0)} T$, somit ist

$$(Id \circ F)_T = H_{T^N} \circ I_{N,T} = H_{{T^N}_{(e_0,2)}} = H_{|^2_3} \circ H_T = G \circ F_T.$$

($H_T = F_T$ gilt, da T nur die Farben 1 und 2 besitzt.) □

Berechnung von $Id \circ F$

Lemma 4.26 *Ist $F : X_1 \to X_2$ ein monoidaler ∞-Funktor, so ist*

$$Id \circ F = F.$$

Beweis: Mit (4.22) folgt

$$(Id \circ F)_T = Id \circ F_T = F_T$$

für $T \in \mathcal{T}_2^0$. Mit (3.14) folgt daraus die Behauptung. □

Situation: Es werden Kompositionen

$$X_1 \xrightarrow{F} X_2 \xrightarrow{G} X_3$$

untersucht, wobei F ein strikt monoidaler ∞-Funktor und G ein monoidaler ∞-Funktor ist. Anschließend wird $G \circ Id$ berechnet.

Satz 4.27 *$F : X_1 \to X_2$ sei ein strikt monoidaler und $G : X_2 \to X_3$ ein monoidaler ∞-Funktor. Für $T \in \mathcal{T}_2^0$ gilt*

$$(G \circ F)_T = G_T \circ F_T^{X_1,X_2}.$$

($F_T^{X_1,X_2}$ ist auf Seite 36 definiert.)

Zum Beweis des Satzes werden noch einige Lemmatas benötigt.
Es sei $H := \underline{F} + G$.

Lemma 4.28 *Es sei $T \in \mathcal{T}_3$ mit $wT = 3$. Die Zahl am Anfang der Wurzel sei kleiner oder gleich 2. Ist e eine Kante, die kein Input ist und die Farben 1 und 2 enthält (dh. $(X_T)_e = \mathcal{L}_2$), so kommutiert das folgende Diagramm.*

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[d, "i^e_{0,1,1}"'] \arrow[dr, "H_T"] & \\
X_T \arrow[r, "H_T"'] & X_3
\end{tikzcd}$$

Beweis: Der rechte Teil von

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,2)} \arrow[r, "j_T^{(e,2)}"] \arrow[d, "i^e_{0,0}"'] & X_{T_{(e,2)}} \arrow[d, "i^e_{0,0}"'] \arrow[dr, "H_{T_{(e,2)}}"] & \\
X_T^{(e,2)} \arrow[r, "j_T^{(e,2)}"'] & X_{T_{(e,2)}} \arrow[r, "H_{T_{(e,2)}}"'] & X_3
\end{tikzcd}$$

kommutiert, da $T_{(e,2)} = T_2 \circ_e T_1$ ist, T_2 nur die Farben 1 und 2 besitzt und F ein strikt monoidaler ∞-Funktor ist. Der linke Teil kommutiert, da $j_T^{(e,2)}$ ein kanonischer Klammerisomorphismus ist. Aufgrund der Kohärenz von H kommutiert somit auch

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,2)} \arrow[r, "i_T^{(e,2)}"] \arrow[d, "i^e_{0,0}"'] & X_T \arrow[dr, "H_T"] & \\
X_T^{(e,2)} \arrow[r, "i_T^{(e,2)}"'] & X_T \arrow[r, "H_T"'] & X_3
\end{tikzcd}.$$

Da $i_T^{(e,2)} \circ i^e_{0,0} = i^e_{0,0,1} \circ i_T^{(e,2)}$ ist, ergibt sich die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,2)} \arrow[r, "i_T^{(e,2)}"] \arrow[d, "i_T^{(e,2)}"'] & X_T \arrow[dr, "H_T"] & \\
X_T \arrow[r, "i^e_{0,0,1}"'] & X_T \arrow[r, "H_T"'] & X_3
\end{tikzcd}.$$

Da

$$X_T = \operatorname{colim}(X_T^{(e,2)} \xleftarrow{\iota} X_T^{(2,e,2)} \xrightarrow{\iota} X_T^{(2,e)})$$

ist, folgt die Behauptung. □

Korollar 4.29 *Es sei $T \in \mathcal{T}_3$ mit $wT = 3$. Die Zahl am Anfang der Wurzel sei kleiner oder gleich 2. Ist e eine Kante, die kein Input ist und die Farben 1 und 2 enthält (dh. $(X_T)_e = \mathcal{L}_2$), so kommutiert*

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[r, "H_T"] \arrow[d, "i^e_{0,1,1}"'] & X_3 \\
X_T^{(2,e)} \arrow[r, "j_T^{(2,e)}"'] & X_{T_{(2,e)}} \arrow[u, "H_{T_{(2,e)}}"']
\end{tikzcd}.$$

Beweis: Aufgrund der Kohärenz von H ergibt sich die Kommutativität von

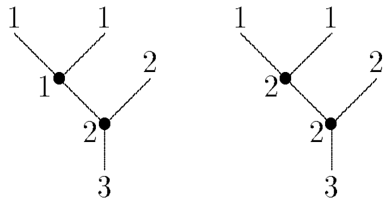
$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[r, "i^e_{0,1,1}"] \arrow[dr, "i^e_{0,1,1}"'] & X_T^{(2,e)} \arrow[r, "j_T^{(2,e)}"] \arrow[d, "i_T^{(2,e)}"] & X_{T_{(2,e)}} \arrow[d, "H_{T_{(2,e)}}"] \\
& X_T \arrow[r, "H_T"'] & X_3
\end{tikzcd}$$

Mit (4.28) folgt die Behauptung. □

Der Baum $\overline{T}$. T sei ein 3-farbiger Baum mit Wurzelfarbe 3, bei dem die Zahl am Anfang der Wurzel kleiner gleich 2 ist.

$$\text{Wurzel} \quad \begin{array}{c} a \\ | \\ 3 \end{array} \qquad \text{Dabei ist } a \leq 2.$$

$\overline{T}$ entsteht aus T, indem alle Ecken mit einer 2 versehen werden.



Der ∞-Funktor $\eta_T : X_T \to X_{\overline{T}}$. Der ∞-Funktor

$$\eta_T : X_T \longrightarrow X_{\overline{T}}$$

sei durch den Funktor $i_{0,1,1} : \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_1$ induziert.

Lemma 4.30 *Es sei $T \in \mathcal{T}_3$ mit $wT = 3$. Die Zahl am Anfang der Wurzel sei kleiner oder gleich 2. Das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[r, "H_T"] \arrow[d, "\eta_T"'] & X_3 \\
X_{\overline{T}} \arrow[ur, "H_{\overline{T}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis: e sei eine Kante mit $(X_T)_e = \mathcal{L}_2$. Gibt es eine solche Kante nicht, so ist $\overline{T} = T$ und die Behauptung ist erfüllt. Da nun $T_{(2,e)} < T$ ist, darf davon ausgegangen werden, daß die Behauptung für den Baum $T_{(2,e)}$ richtig ist. Somit kommutiert der rechte Teil des folgenden Diagramms.

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[r, "i^e_{0,1,1}"] \arrow[d, "\eta_T"'] & X_T^{(2,e)} \arrow[r, "j_T^{(2,e)}"] & X_{T_{(2,e)}} \arrow[r, "H_{T_{(2,e)}}"] \arrow[d, "\eta_{T_{(2,e)}}"'] & X_3 \\
X_{\overline{T}} \arrow[rr, "Id"'] & & X_{\overline{T_{(2,e)}}} \arrow[ur, "H_{\overline{T_{(2,e)}}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Der linke Teil kommutiert, da

$$(\eta_{T_{(2,e)}})_e \circ (j_T^{(2,e)})_e \circ (i^e_{0,1,1})_e = i_{0,1,1} = (\eta_T)_e$$

und

$$(\eta_{T_{(2,e)}})_{e'} \circ (j_T^{(2,e)})_{e'} \circ (i^e_{0,1,1})_{e'} = i_{0,1,1} \circ i_{0,2} = id = (\eta_T)_{e'}$$

für eine innere Kante e' mit Nachfolger e. Mit $\overline{T_{(2,e)}} = \overline{T}$ und (4.29) folgt nun die Behauptung. □

Beweis von Satz 4.27: Statt $\underline{F} + G$ wird H geschrieben. Ist $X = (X_1, X_2, X_3)$ und $N = \{1, 3\}$, so ist für $T \in \mathcal{T}_2^0$

$$X_{\overline{T^N}} = NX_T,$$

denn

$$(X_{\overline{T^N}})_e = \left\{ \begin{array}{ll} X_1, & \text{falls e Input,} \\ \mathcal{L}_1, & \text{sonst,} \end{array} \right\} = (NX_T)_e.$$

Der rechte Teil des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
NX_T \arrow[r, "I_{N,T}"] \arrow[dr, "Id"'] & X_{T^N} \arrow[r, "H_{T^N}"] \arrow[d, "\eta_{T^N}"] & X_3 \\
& X_{\overline{T^N}} \arrow[ur, "H_{\overline{T^N}}"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert wegen (4.30). Die Kommutativität des linken Teils ergibt sich aus folgender Betrachtung. Es ist

$$\begin{aligned}
(\eta_{T^N})_e \circ (I_{N,T})_e &= \left\{ \begin{array}{ll} i_{0,1,1} \circ i_{0,2}, & \text{falls e Wurzel, jedoch kein Input,} \\ & \\ id \circ id, & \text{sonst,} \end{array} \right. \\
&= id.
\end{aligned}$$

Jeder Input des Baumes $\overline{T^N}$ besitzt die Farben 1 und 2. Wegen der Kohärenz von H folgt somit

$$H_{\overline{T^N}} = H_{T\{2,3\}} \circ F_T^{X_1,X_2} = G_T \circ F_T^{X_1,X_2},$$

und somit

$$(F \circ Id)_T = H_{T^N} \circ I_{N,T} = H_{\overline{T^N}} = G_T \circ F_T^{X_1,X_2}.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

Berechnung von $F \circ Id$

Lemma 4.31 *Ist $F : X_1 \to X_2$ ein monoidaler ∞-Funktor, so ist*

$$F \circ Id = F.$$

Beweis: Mit (4.27) folgt

$$(F \circ Id)_T = F_T \circ Id_T^{X_1,X_1} = F_T$$

für $T \in \mathcal{T}_2^0$. Mit (3.14) folgt daraus die Behauptung. $\square$

4.5.2 Die Kategorie der monoidalen ∞-Kategorien

Aus dem (in den letzten Abschnitten) Bewiesenen folgt, daß die monoidalen ∞-Kategorien zusammen mit den monoidalen ∞-Funktoren eine Kategorie bilden.

Bezeichnung 4.32 *Die Kategorien der monoidalen ∞-Kategorien und monoidalen ∞-Funktoren wird mit*

$$mon\ \infty - cat$$

bezeichnet.

Lemma 4.33 *Die Kategorie der monoidalen ∞-Kategorien und strikt monoidalen ∞-Funktoren ist eine Unterkategorie der Kategorie der monoidalen ∞-Kategorien und monoidalen ∞-Funktoren.*

$$mon'\ \infty - cat \subset mon\ \infty - cat$$

Beweis: Sind

$$(X_1, F_1) \xrightarrow{F} (X_2, F_2) \xrightarrow{G} (X_3, F_3)$$

strikt monoidale ∞-Funktoren und bezeichnen $\underline{F}$, $\underline{G}$, $\underline{G \circ F}$ die zugehörigen monoidalen ∞-Funktoren (gem. 4.19), so ist nur

$$\underline{G \circ F} = \underline{G} \circ \underline{F}$$

zu zeigen. Wegen (3.14) reicht es

$$\underline{G \circ F}_T = (\underline{G} \circ \underline{F})_T$$

für $T \in \mathcal{T}_2^0$ zu zeigen. Der rechte Teile des folgenden Diagramms kommutiert, da G ein strikt monoidaler ∞-Funktor ist. Die Kommutativität des linken Teils ist klar.

$$\begin{tikzcd}
(X_1, X_2)_T \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "Id"'] & X_{2\hat{T}} \arrow[r, "F_{2\hat{T}}"] \arrow[d, "G_{\hat{T}}^{X_2,X_3}"] & X_2 \arrow[d, "G"] \\
(X_1, X_3)_T \arrow[r, "\tau"'] & X_{3\hat{T}} \arrow[r, "F_{3\hat{T}}"'] & X_3
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $(X_1, X_2)_T = (X_1, X_3)_T$, da am Anfang aller Inputs von T die Farbe 1 steht. Folglich ist für $T \in \mathcal{T}_2^0$

$$\begin{aligned}
\underline{G \circ F}_T &= F_{3\hat{T}} \circ \tau_T && (4.19) \\
&= G \circ F_{2\hat{T}} \circ \tau_T && \\
&= G \circ \underline{F}_T && (4.19) \\
&= (\underline{G} \circ \underline{F})_T. && (4.22)
\end{aligned}$$

$\square$

Kapitel 5

Rektifizierung monoidaler ∞-Kategorien

In diesem Kapitel wird das folgende Rektifizierungstheorem bewiesen.

Satz 5.1 *Ist X eine monoidale ∞-Kategorie, so existiert eine strikt monoidale ∞-Kategorie RX und ein monoidaler ∞-Funktor $\nu : X \to RX$ mit folgender universellen Eigenschaft:*
Ist Y eine strikt monoidale ∞-Kategorie und $G : X \to Y$ ein monoidaler ∞-Funktor, so existiert genau ein strikt monoidaler ∞-Funktor $\dot{G} : RX \to Y$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\nu"'] & Y \\ RX \arrow[ur, "\dot{G}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Weiter wird gezeigt, daß eine monoidale ∞-Kategorien in einem gewissen Sinne 'äquivalent' zu einer strikt monoidalen ∞-Kategorie ist.
Der Beweis von (5.1) gliedert sich wie folgt.

1. Konstruktion der strikt monoidalen ∞-Kategorie RX und des monoidalen ∞-Funktors $\nu : X \to RX$
   (a) Definition der ∞-Kategorie RX
   (b) Definition des monoidalen ∞-Funktors $\nu : X \to RX$ (insbesondere wird RX dadurch mit einer monoidalen Struktur versehen)
   (c) Nachweis der Striktheit der monoidalen ∞-Kategorie RX
2. Nachweis der universellen Eigenschaft
   (a) Konstruktion des ∞-Funktors $\dot{G} : RX \to Y$

(b) Nachweis der strikt monoidalen Struktur des ∞-Funktors $\dot{G}$

(c) Berechnung der Komposition $\dot{G} \circ \nu$

5.1 Konstruktion der strikt monoidalen ∞-Kategorie RX und des monoidalen ∞-Funktors $\nu : X \to RX$

$\mathcal{T}_2^0 \subset \mathcal{T}_2$ sei die Teilmenge der 2-farbigen Bäume, die genau einen Farbwechsel in der Wurzel haben. In diesem Abschnitt ist (X, F) stets eine monoidale ∞-Kategorie.

Konstruktion der ∞-Kategorie RX

Es wird ein Diagramm DX in $\infty - cat$ definiert, die ∞-Kategorie RX wird als Colimes des Diagrammes DX definiert.

Definition des Diagrammes DX. Da die Inputs eines Baumes $T \in \mathcal{T}_2^0$ die Farbe 1 haben, genügt es, der Farbe 1 eine ∞-Kategorie zuzuordnen, um ∞-Kategorien der Form X_T wie auf Seite 39 bilden zu können.

Ecken: Das Diagramm DX hat folgende Ecken:

- X_T, $T \in \mathcal{T}_2^0$,
- $X_T^{(e,\mathcal{L}_0)}$, $T \in \mathcal{T}_2^0$, e innere Kante,
- $X_T^{(e,1)}$, $T \in \mathcal{T}_2^0$, e kein Input.

Kanten: Das Diagramm DX hat folgende Kanten:

- $$X_{T_{/e}} \xleftarrow{\iota} X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \xrightarrow{\iota} X_T$$

  Dabei ist e eine innere Kante, es ist dann $T_{/e} \in \mathcal{T}_2^0$.

- $$X_{T_2} \xleftarrow{F_{T,T_2}} X_T^{(e,1)} \xrightarrow{\iota} X_T$$

  Dabei sind T_2 und F_{T,T_2} wie folgt gegeben. Es existieren eindeutig bestimmte Bäume $T_1 \in \mathcal{T}_2$ und $T_2 \in \mathcal{T}_2^0$ mit $T_{(e,1)} = T_2 \circ_e T_1$. Der ∞-Funktor F_{T,T_2} sei durch
  $$F_{T,T_2} : X_T^{(e,1)} \cong X_{T_{(e,1)}} = X_{T_2}^{(e,X_{T_1})} \xrightarrow{Id^{(e,F_{T_1})}} X_{T_2}$$
  gegeben, der ∞-Funktor $Id^{(e,F_{T_1})}$ ist durch den F_{T_1} induziert.

Ist (X,F) eine monoidale ∞-Kategorie, so sei

$$RX := \operatorname{colim} DX.$$

RX ist eine ∞-Kategorie. $\chi_T : X_T \to RX$, $T \in \mathcal{T}_2^0$, seien die zum Colimes gehörenden ∞-Funktoren.

5.1.1 Definition des monoidalen ∞-Funktors $\nu : X \to RX$

Es wird ein kohärentes 2-System $((X, RX), \nu)$ definiert, dieses System definiert dann einen monoidalen ∞-Funktor $\nu : X \to RX$, insbesondere wird RX dadurch mit einer monoidalen Struktur versehen. Es wird gezeigt, daß die monoidale Struktur von RX strikt ist.

Definition des kohärenten 2-Systems

Es sei

$$Z := (Z_1, Z_2) := (X, RX).$$

Für jeden 2-farbigen Baum T ist ein ∞-Funktor

$$\nu_T : Z_T \to Z_{wT}$$

zu definieren.

<u>Fall 1:</u> $wT = 1$. Der zu konstruierende ∞-Funktor ν_T ist durch die Struktur von X definiert, dh. $\nu_T = F_T$.

$$\nu_T : Z_T = X_T \xrightarrow{F_T} X = Z_1.$$

<u>Fall 2:</u> $wT = 2$. Haben alle Inputs die Inputfarbe 1, so ist der ∞-Funktor ν_T als Komposition

$$X_T \xrightarrow{\nu'_T} X_{T'} \xrightarrow{\nu''_T} X_{T''} \xrightarrow{\chi} RX$$

definiert. Dabei entsteht T' aus T, indem alle inneren Kanten der Farbe 2 geschrumpft werden. Verbleiben Ecken, in denen nur eine Kante endet, werden diese eliminiert. Entsteht T' aus T durch Schrumpfen der inneren Kante der Farbe 2, so sei der ∞-Funktor

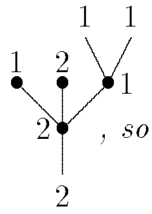
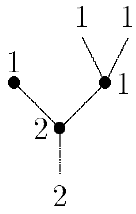
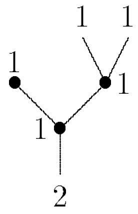
$$\nu'_T : X_T \longrightarrow X_{T'}$$

durch das Vergessen aller e-Komponenten gegeben, wobei e eine innere Kante der Farbe 2 ist. Andernfalls ist der ∞-Funktor zusätzlich durch den ∞-Funktor μ induziert. (μ ist auf Seite 45 definiert.)
T'' sei der Baum, der in $\mathcal{T}_2^0$ liegt und dieselbe Form wie T' hat. Der ∞-Funktor

$$\nu''_T : X_{T'} \longrightarrow X_{T''}$$

ist durch die ∞-Funktoren $i_{0,0,1} : \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_1$ und $i_0 : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{L}_1$ induziert.

Beispiel 5.2

Ist $T =$  , *so ist* $T' =$  *und* $T'' =$  .

Es ist dann

$$\begin{aligned} X_T &= \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2 \otimes X \otimes X, \\ X_{T'} &= \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{L}_2 \otimes X \otimes X, \\ X_{T''} &= \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes X \otimes X. \end{aligned}$$

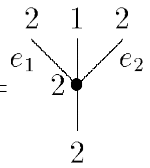
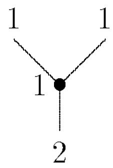
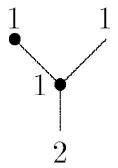
Der ∞-Funktor $\nu'_T : X_T \to X_{T'}$ ist hier durch das Vergessen der e(2)-Komponente gegeben. Der ∞-Funktor $\nu''_T : X_{T'} \to X_{T''}$ ist $i_0 \otimes i_{0,0,1} \otimes i_{0,0,1} \otimes id \otimes id$.

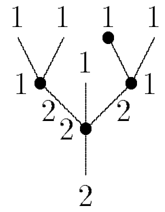
Ist $T \in \mathcal{T}_2^0$, so ist der ∞-Funktor ν_T der zum Colimes gehörenden ∞-Funktor χ_T. Ist $wT = 2$, so ist $Z_{wT} = RX$. Es sei

$$\{e_1, \ldots, e_n\} = \{e : \text{e Input von T mit Anfangsfarbe } 2\}.$$

Also ist $(Z_T)_{e_i} = RX$ für $i = 0, \ldots, n$. Der ∞-Funktor $\nu_T : Z_T \to RX$ wird auf Diagrammniveau definiert, das heißt: In der Definition von Z_T werden die RX-Einträge durch ∞-Kategorien der Form $X_{T'}$, $T' \in \mathcal{T}_2^0$ ersetzt. Es werden dann ∞-Funktoren nach RX konstruiert. Anschließend wird gecheckt, ob diese ∞-Funktoren einen ∞-Funktor aus dem Colimes liefern.
Es seien $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{T}_2^0$. Der Baum $(T; e_1, T_1; \ldots; e_n, T_n)$ entstehe aus dem Baum T, indem für $i = 1, \ldots, n$ die Wurzel von T_i mit dem Input e_i von T identifiziert wird und die der Kante e_i entsprechende Kante in $(T; e_1, T_1; \ldots; e_n, T_n)$ mit der Zahl wT_i versehen wird.

Beispiel 5.3

Sind $T =$  , $T_1 =$  *und* $T_2 =$  ,

so ist $(T; e_1, T_1; e_2, T_2) =$  .

Es sind also ∞-Funktoren

$$X_{(T;e_1,T_1;\ldots;e_n,T_n)} \longrightarrow RX$$

zu definieren. Statt $(T;e_1,T_1;\ldots;e_n,T_n)$ wird kurz (T) geschrieben.
Ist $(T)^*$ der Baum, der aus dem zusammengesetzten Baum (T) entsteht, indem die den Kanten zugeordneten Zahlen entfernt werden und

$$\nu^*_{(T)} : X_{(T)} \to X_{(T)^*},$$

der durch $i_{1,2} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ induziert ∞-Funktor, so sei $\nu_{(T)} : X_{(T)} \to RX$ als Komposition

$$X_{(T)} \xrightarrow{\nu^*_{(T)}} X_{(T)^*} \xrightarrow{\nu_{(T)^*}} RX$$

definiert.
T', T'', ν' und ν'' lassen sich genau wie oben auch für einen Baum (T) statt für T definieren. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X_{(T)} \arrow[r, "\nu'"] \arrow[dd, "\nu^*"'] & X_{(T)'} \arrow[r, "\nu''"] \arrow[d, "\nu^*"'] & X_{(T)''} \arrow[dd, "="] \\
& X_{(T)'^*} \arrow[d, "="'] & \\
X_{(T)^*} \arrow[r, "\nu'"'] & X_{(T)^{*\prime}} \arrow[r, "\nu''"'] & X_{(T)^{*\prime\prime}}
\end{tikzcd}$$

kommutiert, da $i_{0,0,1} \circ i_{1,2} = i_{0,1}$ ist. Folglich läßt sich $\nu_{(T)} : X_{(T)} \to RX$ auch als Komposition

$$X_{(T)} \xrightarrow{\nu'} X_{(T)'} \xrightarrow{\nu''} X_{(T)''} \xrightarrow{\chi} RX$$

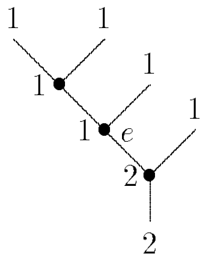
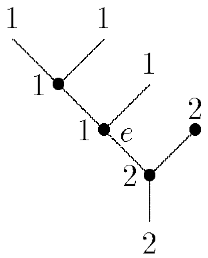
schreiben.

Nachrechnen der Kohärenzbedingungen

Lemma 5.4 *T sei ein zweifarbiger Baum ohne Inputs der Inputfarbe 2. e ist eine Kante des Baumes T, die kein Input ist . a sei die Zahl am Anfang der Kante e, b die am Ende. Ist $a \le c \le b$, so kommutiert das folgende Diagramm.*

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,c)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_T \arrow[d, "\nu"] \\
X_{T_{(e,c)}} \arrow[r, "\nu"'] & RX
\end{tikzcd}$$

Beweis: <u>Fall 1:</u> c=1.

z.B. $T =$  bzw. $T =$ 

Es existieren ∞-Funktoren

$$X_T^{(e,1)} \xrightarrow{\nu_1} X_{T'}^{(e,1)} \quad \text{bzw} \quad X_{T'}^{(e,1)} \xrightarrow{\nu_2} X_{T''}^{(e,1)},$$

so daß

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[r, "\nu'"] & X_{T'} \arrow[r, "\nu''"] & X_{T''} \\
X_T^{(e,1)} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\nu_1"'] & X_{T'}^{(e,1)} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\nu_2"'] & X_{T''}^{(e,1)} \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Der ∞-Funktor ν_1 bzw ν_2 unterscheidet sich von dem ∞-Funtkor ν' bzw ν'' nur in der e-Kompoente, die neue e-Komponente ist jeweils $id_{\mathcal{L}_0}$.
Es ist $T'_{(e,1)} = {T_{(e,1)}}'$ und $T''_{(e,1)} = {T_{(e,1)}}''$. Die Behauptung folgt aus der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[r, "\nu'"] & X_{T'} \arrow[r, "\nu''"] & X_{T''} \arrow[dr, "\chi"] & \\
X_T^{(e,1)} \arrow[u, "i"] \arrow[d, "j"'] \arrow[r, "\nu_1"] & X_{T'}^{(e,1)} \arrow[u, "i"] \arrow[d, "j"'] \arrow[r, "\nu_2"] & X_{T''}^{(e,1)} \arrow[u, "i"] \arrow[d, "j"'] & RX \\
X_{T_{(e,1)}} \arrow[r, "\nu'"'] & X_{T'_{(e,1)}} \arrow[r, "\nu''"'] & X_{T''_{(e,1)}} \arrow[ur, "\chi"'] &
\end{tikzcd}$$

(Dabei wurden die ∞-Funktoren ν' und ν'' auf zusammengesetzte Bäume analog wie auf Seite 59 fortgesetzt.) Das Diagramm kommutiert offensichtlich.
<u>Fall 2:</u> c=2.
Ist e zweifarbig, so gilt die Behauptung, da folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,2)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_T \arrow[d, "\nu"] \\
X_{T_{(e,2)}} \arrow[r, "\nu"'] \arrow[ur, "\nu^*"] & RX
\end{tikzcd}$$

Ohne Einschränkung besitze e nur die Farbe 2. Es sei $T_{(e,2)} = T_2 \circ_e T_1$ mit $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_2$ und $\tilde{T} := T_2 \circ_e {T_1}''$. Es sei

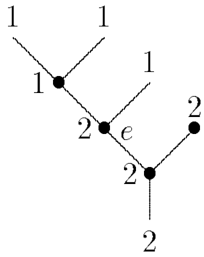
$$\tilde{\nu} : X_{T_{(e,2)}} = X_{T_2}^{(e,X_{T_1})} \overset{Id_{X_{T_2}}^{(e,\nu''\circ\nu')}}{\longrightarrow} X_{T_2}^{(e,X_{{T_1}''})} = X_{\tilde{T}}$$

der durch

$$\nu'' \circ \nu' : X_{T_1} \longrightarrow X_{{T_1}''}$$

induzierte ∞-Funktor.

<u>Fall 2a:</u> T_2 besitzt genau einen Input und hat nur die Farbe 2.

z.B. $T =$ 

Unter diesen Voraussetzungen ist ${T_2}' = |_2^2$ und $\tilde{T}'' = T'' = {T_1}''$. Es wird die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,2)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\cong"'] & X_T \arrow[r, "\nu''\circ\nu'"] & X_{T''} \arrow[d, "="] \\
X_{T_{(e,2)}} \arrow[r, "\tilde{\nu}"'] & X_{\tilde{T}} \arrow[r, "\nu''\circ\nu'"'] & X_{\tilde{T}''}
\end{tikzcd}$$

gezeigt. Es genügt die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
X_{T_{(e,2)}} \arrow[r, "\tilde{\nu}"] \arrow[d, "pr"'] & X_{\tilde{T}} \arrow[d, "\nu''\circ\nu'"] \\
X_{T_1} \arrow[r, "\nu''\circ\nu'"'] & X_{{T_1}''} = X_{\tilde{T}''}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_{T_{(e,2)}} = X_T^{(e,2)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "pr"'] & X_T \arrow[d, "\nu'"] \\
X_{T_1} \arrow[r, "\nu'"'] & X_{{T_1}'} = X_{T'}
\end{tikzcd}$$

zu zeigen, denn daraus folgt

$$\nu'' \circ \nu' \circ \tilde{\nu} = \nu'' \circ \nu' \circ pr = \nu'' \circ \nu' \circ i.$$

Das linke Diagramm kommutiert, da

$$\nu'' \circ \nu' : X_{\tilde{T}} \longrightarrow X_{\tilde{T}''} = X_{{T_1}''}$$

die Projektion

$$pr_{X_{{T_1}''}} : X_{\tilde{T}} = X_{T_2}^{(e,X_{{T_1}''})} \longrightarrow X_{{T_1}''}$$

ist. Entsteht $T_1{}'$ aus T_1 durch Schrumpfen der inneren Kanten, so kommutiert das rechte Diagramm, da $(X_{T'})_{e(0)} = (X_{T_1{}'})_{e(0)} = \mathcal{L}_0$ ist. Entsteht $T_1{}'$ nicht aus T_1 durch Schrumpfen der inneren Kanten, so sei e' die einzige zweifarbige Kante von T_1. Ist e die Wurzel von T, so ist die Behauptung erfüllt, andernfalls ist die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
(X_T^{(e,2)})_{e(0)} \otimes (X_T^{(e,2)})_e \otimes (X_T^{(e,2)})_{e'} \arrow[r, "pr_{1,3}"] \arrow[d, "pr_{2,3}"'] & (X_{T'})_{e(0)} \otimes (X_T)_{e'} \arrow[d, "\mu"] \\
(X_{T_1})_e \otimes (X_{T_1})_{e'} \arrow[r, "\mu"'] & (X_{T_1})_{e(0)} = (X_T)_{e(0)}
\end{tikzcd}$$

zu zeigen. Das ist gleichbedeutend mit

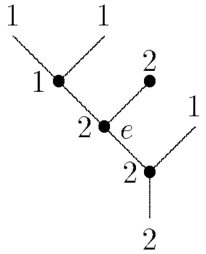
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_2 \arrow[r, "pr_{1,3}"] \arrow[d, "pr_{2,3}"'] & \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_2 \arrow[d, "\mu"] \\
\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_2 \arrow[r, "\mu"'] & \mathcal{L}_1
\end{tikzcd}$$

Für $t \in \mathcal{L}_2$ ist

$$(\mu \circ pr_{1,3})(0,0,t) = i_{0,0,1}(t) = (\mu \circ pr_{2,3})(0,0,t).$$

Folglich kommutieren die beiden Diagramme.

Fall 2b: $T_1{}'$ entsteht nicht aus T_1 durch Schrumpfen der inneren Kanten der Farbe 2 und T_2 hat mehr als einen Input oder besitzt nicht nur die Farbe 2.

z.B. $T =$ 

Es ist $\tilde{T}'' = T''$. Es wird wieder die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,2)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\cong"'] & X_T \arrow[r, "\nu'' \circ \nu'"] & X_{T''} \arrow[d, "="] \\
X_{T_{(e,2)}} \arrow[r, "\tilde{\nu}"'] & X_{\tilde{T}} \arrow[r, "\nu'' \circ \nu'"'] & X_{\tilde{T}''}
\end{tikzcd}$$

gezeigt. Aus den Voraussetzungen folgt, daß die Wurzel von $T_1{}'$ zweifarbig ist und T' aus T durch Schrumpfen der inneren Kanten der Farbe 2 entsteht. e' sei die einzige zweifarbige Kante von T_1. Es ist nur die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
(X_T)_e \otimes (X_T)_{e'} \arrow[r, "pr_2"] & (X_{T'})_{e'} \arrow[d, "i_{0,0,1}"] \\
(X_T^{(e,2)})_e \otimes (X_T^{(e,2)})_{e'} = (X_{T_{(e,2)}})_e \otimes (X_{T_{(e,2)}})_{e'} \arrow[u, "i_1 \otimes id"] \arrow[r, "\mu"'] & (X_{\tilde{T}})_e = (X_{\tilde{T}''})_e = (X_{T''})_{e'}
\end{tikzcd}$$

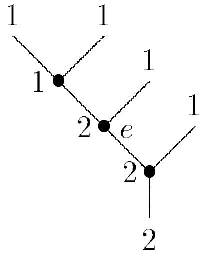
zu zeigen. Ist e' ein Input, so ist die Kommutativität klar. Ist e' eine inere Kante, so folgt sie aus der von

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2 \arrow[r, "pr_2"] & \mathcal{L}_2 \arrow[d, "i_{0,0,1}"] \\
\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_2 \arrow[u, "i_1 \otimes id"] \arrow[r, "\mu"'] & \mathcal{L}_1
\end{tikzcd}$$

Für $t \in \mathcal{L}_2$ gilt

$$(i_{0,0,1} \circ pr_2 \circ (i_1 \otimes id))(0,t) = (i_{0,0,1} \circ pr_2)(1,t) = i_{0,0,1}(t) = \mu(0,t).$$

<u>Fall 2c:</u> T_1' entsteht aus T_1 durch Schrumpfen der inneren Kanten der Farbe 2 und T_2 hat mehr als einen Input oder besitzt nicht nur die Farbe 2.

z.B. $T =$ 

Der ∞-Funktor

$$X_T^{(e,2)} \xrightarrow{j} X_{T_{(e,2)}} \xrightarrow{\tilde{\nu}} X_{\tilde{T}} \xrightarrow{\nu'' \circ \nu'} X_{\tilde{T}''} \xrightarrow{pr} (X_{\tilde{T}''})_e = \mathcal{L}_1$$

ist der konstante ∞-Funktor auf die $0 \in \mathcal{L}_1$. Folglich existiert ein ∞-Funktor

$$\bar{\nu} : X_T^{(e,2)} \longrightarrow X_{\tilde{T}''}^{(e,\mathcal{L}_0)},$$

so daß

$$\begin{tikzcd}
X_{T_{(e,2)}} \arrow[r, "\tilde{\nu}"] & X_{\tilde{T}} \arrow[r, "\nu'' \circ \nu'"] & X_{\tilde{T}''} \\
X_T^{(e,2)} \arrow[u, "j"] \arrow[rr, "\bar{\nu}"'] & & X_{\tilde{T}''}^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Es ist $\tilde{T}''_{/e} = T''$. Kann gezeigt werden, daß

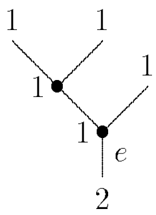
$$\begin{tikzcd}
X_{T_{(e,2)}} \arrow[r, "\tilde{\nu}"] & X_{T_2 \circ_e T_1''} \arrow[r, "\nu'' \circ \nu'"] & X_{\tilde{T}''} \arrow[dr, "\chi"] & \\
X_T^{(e,2)} \arrow[u, "j"] \arrow[d, "i"'] \arrow[rr, "\bar{\nu}"] & & X_{\tilde{T}''}^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[u, "i"'] \arrow[d, "j"] & RX \\
X_T \arrow[rr, "\nu'' \circ \nu'"'] & & X_{T''} = X_{\tilde{T}''_{/e}} \arrow[ur, "\chi"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert, so folgt die Behauptung. Es ist nur die Kommutativität des unteren Rechtecks zu zeigen. Entsteht $\tilde{T}''_{/e}$ aus $\tilde{T}''$ durch Schrumpfen der Kante e, so kommutiert das Diagramm. Entsteht $\tilde{T}''_{/e}$ nicht aus $\tilde{T}''$ durch Schrumpfen der Kante e, so sind der ∞-Funktor rechts und der unten durch μ induziert, die beiden Kompositionen sind gleich, folglich kommutiert das Diagramm. $\square$

Lemma 5.5 *T sei ein 2-farbiger Baum ohne Inputs der Inputfarbe 2. Ist e eine zweifarbige Kante von T, die kein Input ist, so kommutiert das folgende Diagramm.*

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(2,e)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_T \arrow[d, "\nu"] \\
X_{T_{(2,e)}} \arrow[r, "\nu"'] & RX
\end{tikzcd}$$

Beweis: <u>Fall 1:</u> e ist die Wurzel.

z.B. $T =$ 

Es ist $T'' = T' = T$, $T_{(2,e)}{}' = T_{(2,e)}$ und $T_{(2,e)}{}'' = T$. Es wird die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(2,e)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_T \arrow[d, "Id"] \\
X_{T_{(2,e)}} = X_{T_{(2,e)}{}'} \arrow[r, "\nu''"'] & X_{T_{(2,e)}{}''} = X_{T''}
\end{tikzcd}$$

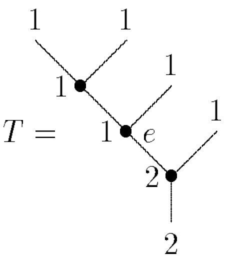
gezeigt. Für die Wurzelkomponente ergibt sich

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_0 \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "i_0"'] & \mathcal{L}_1 \arrow[d, "="] \\
\mathcal{L}_0 \arrow[r, "i_0"'] & \mathcal{L}_1
\end{tikzcd}$$

und für die e'-Komponenten mit e' innere Kante mit Nachfolger e

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_1 \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "i_{0,2}"'] & \mathcal{L}_1 \arrow[d, "="] \\
\mathcal{L}_2 \arrow[r, "i_{0,0,1}"'] & \mathcal{L}_1
\end{tikzcd}$$

Daraus folgt die Kommutativität des obigen Diagramms und somit auch die Behauptung.
Fall 2: e ist innere Kante.
Folgich ist e in $T_{(2,e)}$ eine innere Kante der Farbe 2.
Fall 2a: T' entsteht aus T durch Schrumpfen der inneren Kanten der Farbe 2.

z.B. $T =$ 

In diesem Fall wird e beim Übergang von T zu T' nicht zur Wurzel. Es ist ${T_{(2,e)}}' = {T'}_{/e}$ und ${T_{(2,e)}}'' = {T''}_{/e}$. Die ∞-Funktoren

$$X_T^{(2,e)} \xrightarrow{\nu_1} X_{T'}^{(2,e)} \quad \text{bzw} \quad X_{T'}^{(2,e)} \xrightarrow{\nu_2} X_{T''}^{(e,\mathcal{L}_0)}$$

unterscheiden sich von den ∞-Funktoren

$$X_T \xrightarrow{\nu'} X_{T'} \quad \text{bzw} \quad X_{T'} \xrightarrow{\nu''} X_{T''}$$

nur in der e-Komponente. Die e-Komponente der neuen ∞-Funktoren sei

$$id : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_1 \quad \text{bzw} \quad i_{0,0} : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_0.$$

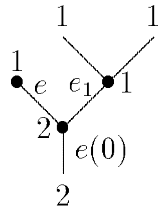
Es wird die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[r, "\nu'"] & X_{T'} \arrow[r, "\nu''"] & X_{T''} \arrow[dr, "\chi"] & \\
X_T^{(2,e)} \arrow[u, "i"] \arrow[d, "j"'] \arrow[r, "\nu_1"] & X_{T'}^{(2,e)} \arrow[r, "\nu_2"] & X_{T''}^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[u, "i"'] \arrow[d, "j"'] & RX \\
X_{T_{(2,e)}} \arrow[r, "\nu'"'] & X_{T_{(2,e)}{}'} \arrow[r, "\nu''"'] & X_{T_{(2,e)}{}''} = X_{T''{}_{/e}} \arrow[ur, "\chi"'] &
\end{tikzcd}$$

gezeigt. Die Kommutativtät des oberen Rechtecks, folgt aus der von

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_2 \arrow[r, "i_{0,0,1}"] & \mathcal{L}_1 \\
\mathcal{L}_1 \arrow[u, "i_{0,1}"] \arrow[r, "i_{0,0}"'] & \mathcal{L}_0 \arrow[u, "i_0"']
\end{tikzcd} \qquad \text{(e-Kompoente)}$$

Nun wird die Kommutativität des unteren Rechtecks gezeigt. Entsteht $T_{(2,e)}{}'$ aus $T_{(2,e)}$ durch Schrumpfen der inneren Kanten der Farbe 2, so sind nur die e'-Komponenten mit e' innere Kante mit Nachfolger e zu betrachten. Eingeschränkt auf eine solche Komponenten kommutiert das untere Rechteck, da $i_{0,0,1} \circ i_{0,2} = id$ ist.
Entsteht $T_{(2,e)}{}'$ nicht aus $T_{(2,e)}$ durch Schrumpfen der inneren Kanten der Farbe 2, so sei e_1 die von e verschiedene Kante von T, deren Nachfolger der Nachfolger von e ist. (In diesem Fall ist e ein Stumpf.)

z.B. $T =$ 

Es ist dann $T_{(2,e)}{}'' = T_{(2,e)}{}'$. Es ist die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
(X_T^{(2,e)})_{e(0)} \otimes (X_T^{(2,e)})_{e_1} \arrow[r, "(\nu_2 \circ \nu_1)_{e(0)} \otimes (\nu_2 \circ \nu_1)_{e_1}"] \arrow[d, "(j)_{e(0)} \otimes (j)_{e_1}"'] & (X_{T''}^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e(0)} \otimes (X_{T''}^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e_1} \arrow[d, "\mu"] \\
(X_{T_{(2,e)}})_{e(0)} \otimes (X_{T_{(2,e)}})_{e_1} \arrow[r, "\mu"'] & (X_{T_{(2,e)}{}'})_{e(0)} = (X_{T_{(2,e)}{}''})_{e(0)} = (X_{T''{}_{/e}})_{e(0)}
\end{tikzcd}$$

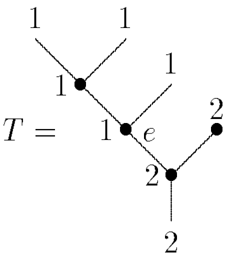
zu überprüfen. Ist e_1 ein Input, so ist die Kommutativität klar. Andernfalls ist die Kommutativität gleichbedeutend mit der von

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_2 \arrow[r, "i_0 \otimes i_{0,0,1}"] \arrow[d, "="'] & \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_1 \arrow[d, "\mu"] \\
\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_2 \arrow[r, "\mu"'] & \mathcal{L}_1
\end{tikzcd}$$

Für $t \in ob\mathcal{L}_1$ ist

$$(\mu \circ (id \otimes i_{0,0,1}))(0,t) = i_{0,0,1}(t) = \mu(0,t).$$

<u>Fall 2b:</u> T' entsteht nicht aus T durch Schrumpfen der inneren Kanten der Farbe 2.

z.B. $T =$ 

Es ist also $T'' = T'$. In diesem Fall entsteht ${T_{(2,e)}}'$ aus $T_{(2,e)}$ durch Schrumpfen der inneren Kanten der Farbe 2. Es wird die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(2,e)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_T \arrow[r, "\nu'"] & X_{T'} \arrow[d, "="] \\
X_{T_{(2,e)}} \arrow[r, "\nu'"'] & X_{{T_{(2,e)}}'} \arrow[r, "\nu''"'] & X_{{T_{(2,e)}}''} = X_{T''}
\end{tikzcd}$$

gezeigt. Diese ergibt sich aus der folgenden Betrachtung.

$$\begin{tikzcd}
(X_T^{(2,e)})_{e(0)} \otimes (X_T^{(2,e)})_e \arrow[r, "(i)_{e(0)} \otimes (i)_e"] \arrow[d, "(j)_{e(0)} \otimes (j)_e"'] & (X_T)_{e(0)} \otimes (X_T)_e \arrow[r, "\mu"] & (X_{T'})_{e(0)} \arrow[d, "="] \\
(X_{T_{(2,e)}})_{e(0)} \otimes (X_{T_{(2,e)}})_e \arrow[r, "pr_1"'] & (X_{{T_{(2,e)}}'})_{e(0)} \arrow[r, "(\nu'')_{e(0)}"'] & (X_{{T_{(2,e)}}''})_{e(0)} = (X_{T''})_{e(0)}
\end{tikzcd}$$

Das ist gleichbedeutend mit der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \arrow[r, "id \otimes i_{0,1}"] \arrow[d, "="'] & \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_2 \arrow[r, "\mu"] & \mathcal{L}_1 \arrow[d, "="] \\
\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \arrow[r, "pr_1"'] & \mathcal{L}_0 \arrow[r, "i_0"'] & \mathcal{L}_1
\end{tikzcd}$$

Für $t \in \mathcal{L}_1$ gilt

$$(\mu \circ (id \otimes i_{0,1}))(0,t) = 0 = (i_0 \circ pr_1)(0,t).$$

Ist e' eine innere Kante mit Nachfolger e, so kommutiert

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] (X_T^{(2,e)})_{e'} = (X_T)_{e'} = (X_{T'})_{e'} = (X_{T''})_{e'} \arrow[dr, "i_{0,2}"'] & = & (X_{T_{(2,e)}''})_{e'} \\ & (X_{T_{(2,e)}})_{e'} = (X_{T_{(2,e)}'})_{e'} \arrow[ur, "i_{0,0,1}"'] & \end{tikzcd}$$

□

Lemma 5.6 *T sei ein zweifarbiger Baum ohne Inputs mit Inputfarbe 2. Für jede einfarbige innere Kante e von T kommutiert das folgende Diagramm.*

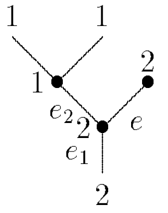
$$\begin{tikzcd} X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_T \arrow[d, "\nu"] \\ X_{T_{/e}} \arrow[r, "\nu"'] & RX \end{tikzcd}$$

Beweis: Es ist nur folgende Situation zu betrachten. Beim Schrumpfen der Kante e entsteht eine Ecke, in der nur eine Kante endet. Die anderen Fälle sind klar. e_2 sei die von e verschiedene Kante, die den gleichen Nachfolger wie e hat. Diese Kante wird mit e_2 bezeichnet, der Nachfolger mit e_1. $\bar{e}$ sei die e_1 und e_2 entsprechende Kante in $T_{/e}$.

<u>Fall 1:</u> e besitzt nur die Farbe 2.

Es darf davon ausgegangen werden, daß e_2 eine zweifarbige Kante ist. Ansonsten ist die Behauptung klar.

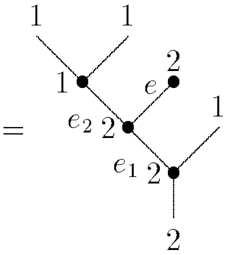
<u>Fall 1a:</u> e_1 ist die Wurzel.

z.B. $T =$ 

Es ist ${T_{/e}}' = T'$ und die Behauptung folgt aus der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X_T \arrow[d, "\nu'"] \\ X_{T_{/e}} \arrow[r, "\nu'"'] & X_{{T_{/e}}'} = X_{T'} \end{tikzcd}$$

Die beiden Komposition sind durch das Vergessen der e-Komponente und durch μ induziert, also gleich.
<u>Fall 1b:</u> e_1 ist innere Kante und T' entsteht aus T durch Schrumpfen der inneren Kanten der Farbe 2.

z.B. $T =$ 

Es ist die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
(X_T)_{e_1} \otimes (X_T)_{e_2} \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "\mu"'] & (X_{T'})_{e_2} \arrow[d, "(i'')_{e_2}"] \\
(X_{T_{/e}})_{\bar{e}} = (X_{T_{/e'}})_{\bar{e}} \arrow[r, "(i'')_{\bar{e}}"'] & (X_{T_{/e''}})_{\bar{e}} = (X_{T''})_{e_2}
\end{tikzcd}$$

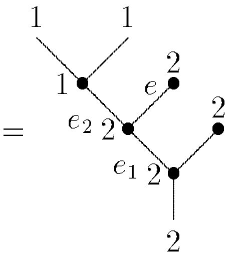
zu zeigen. Ist e_2 ein Input, so ist die Kommutativität klar. Ist e_2 eine innnere Kante, so ist das gleichbedeutet mit der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2 \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathcal{L}_2 \arrow[d, "i_{0,0,1}"] \\
\mathcal{L}_2 \arrow[r, "i_{0,0,1}"'] & \mathcal{L}_1
\end{tikzcd}$$

Für $t_1 \in ob\mathcal{L}_1$ und $t_2 \in ob\mathcal{L}_2$ ist

$$(i_{0,0,1} \circ \mu)(t_1, t_2) = \left\{ \begin{array}{ll} i_{0,0,1}(t_1), & \text{falls } t_2 = 0, \\ i_{0,0,1}(t_2), & \text{falls } t_2 > 0, \end{array} \right\} = i_{0,0,1}(t_2) = (i_{0,0,1} \circ pr_2)(t_1, t_2).$$

<u>Fall 1c:</u> e_1 ist eine innere Kante und T' entsteht nicht aus T durch Schrumpfen der inneren Kanten der Farbe 2.

z.B. $T =$ 

Es ist die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
(X_T)_{e(0)} \otimes (X_T)_{e_1} \otimes (X_T)_{e_2} \arrow[r, "pr_{1,3}"] \arrow[d, "id \otimes \mu"'] & (X_T)_{e(0)} \otimes (X_T)_{e_2} \arrow[d, "\mu"] \\
(X_{T_{/e}})_{e(0)} \otimes (X_{T_{/e}})_{\bar{e}} \arrow[r, "\mu"'] & (X_{T_{/e}'})_{e(0)} = (X_{T'})_{e(0)}
\end{tikzcd}$$

zu zeigen. Ist e_2 ein Input so ist die Kommutativität klar. Andernfalls ist die Kommutativität gleichbedeutend mit der von

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2 \arrow[r, "pr_{1,3}"] \arrow[d, "id \otimes \mu"'] & \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_2 \arrow[d, "\mu"] \\
\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_2 \arrow[r, "\mu"'] & \mathcal{L}_1
\end{tikzcd}$$

Für $t_1 \in ob\mathcal{L}_1$ und $t_2 \in ob\mathcal{L}_2$ gilt

$$\begin{aligned}
(\mu \circ (id \otimes \mu))(0, t_1, t_2) &= \begin{cases} \mu(0, t_1), & \text{falls } t_2 = 0, \\ \mu(0, t_2 - 1), & \text{falls } t_2 > 0, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls } t_2 = 0, \\ t_2 - 1, & \text{falls } t_2 > 0, \end{cases} \\
&= \mu(0, t_2) \\
&= (\mu \circ pr_{1,3})(0, t_1, t_2).
\end{aligned}$$

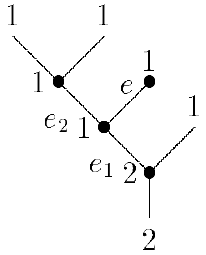
<u>Fall 2:</u> e besitzt nur die Farbe 1.
Es ist dann $T'_{/e} = T_{/e}'$ und $T''_{/e} = T_{/e}''$.

$$\bar{\nu} : X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \longrightarrow X_{T''}^{(e,\mathcal{L}_0)}$$

unterscheide sich vom ∞-Funktor $\nu'' \circ \nu' : X_T \to X_{T''}$ nur in der e-Komponente, die neue e-Komponente sei $id_{\mathcal{L}_0}$. Es wird die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[r, "\nu'' \circ \nu'"] & X_{T''} \arrow[dr, "\chi"] & \\
X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\bar{\nu}"] \arrow[d, "j"'] & X_{T''}^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[u, "i"'] \arrow[d, "j"'] & RX \\
X_{T_{/e}} \arrow[r, "\nu'' \circ \nu'"'] & X_{T_{/e}''} = X_{T''_{/e}} \arrow[ur, "\chi"'] &
\end{tikzcd}$$

gezeigt, daraus folgt dann die Behauptung. Es ist nur die Kommutativität des Qudrats links unten zu zeigen.
Ohne Einschränkung sei e_1 zweifarbig, ansonsten ist die Behauptung klar.
<u>Fall 2a:</u> T' entsteht aus T durch Schrumpfen der inneren Kanten der Farbe 2.

z.B. $T =$ 

Es ist die Kommutativtät von

$$\begin{tikzcd}
(X_T)_{e_1} \otimes (X_T)_{e_2} = (X_{T'})_{e_1} \otimes (X_{T'})_{e_2} \arrow[r, "(i'')_{e_1} \otimes (i'')_{e_2}"] \arrow[d, "\mu"'] & (X_{T''})_{e_1} \otimes (X_{T''})_{e_2} \arrow[d, "\mu"] \\
(X_{T_{/e}})_{\bar{e}} = (X_{T_{/e}'})_{\bar{e}} \arrow[r, "(i'')_{\bar{e}}"'] & (X_{T_{/e}''})_{\bar{e}} = (X_{T''_{/e}})_{\bar{e}}
\end{tikzcd}$$

zu zeigen. Ist e_2 ein Input oder $\bar{e}$ die Wurzel, so ist die Kommutativität klar. Andernfalls ist die Kommutativität gleichbedeutend mit der von

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{L}_1 \arrow[r, "i_{0,0,1} \otimes id"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_1 \arrow[d, "\mu"] \\
\mathcal{L}_2 \arrow[r, "i_{0,0,1}"'] & \mathcal{L}_1
\end{tikzcd}$$

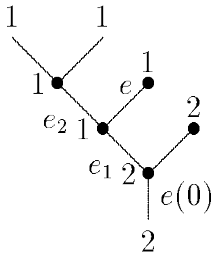
Für alle $t \in ob\mathcal{L}_2$ gilt

$$(i_{0,0,1} \circ \mu)(t_1, 0) = i_{0,0,1}(t_1) = (max \circ (i_{0,0,1} \otimes id))(t_1, 0)$$

und

$$(i_{0,0,1} \circ \mu)(t_1, 1) = i_{0,0,1}(2) = 1 = (max \circ (i_{0,0,1} \otimes id))(t_1, 1).$$

<u>Fall 2b:</u> T' entsteht nicht aus T durch Schrumpfen der inneren Kante der Farbe 2.

z.B. $T =$ 

Es ist die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
(X_T)_{e(0)} \otimes (X_{T'})_{e_1} \otimes (X_{T'})_{e_2} \arrow[r, "\mu \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes \mu"'] & (X_T)_{e(0)} \otimes (X_T)_{e_2} \arrow[d, "\mu"] \\
(X_{T_{/e}})_{e(0)} \otimes (X_{T_{/e}})_{\bar{e}} \arrow[r, "\mu"'] & (X_{T_{/e}{}'})_{e(0)} = (X_{T'_{/e}})_{e(0)}
\end{tikzcd}$$

zu zeigen. Die Kommutativität folgt aus der Assoziativität von μ. $\square$

Lemma 5.7 *T sei ein 2-farbiger Baum ohne Inputs der Inputfarbe 2. Ist e eine zweifarbige Kante und ein Input von T, so kommutiert das folgende Diagramm.*

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[d, "="'] \arrow[dr, "\nu"] & \\
X_{T_{(e,2)}} \arrow[r, "\nu"'] & RX
\end{tikzcd}$$

Beweis: Es ist $T_{(e,2)} = T_1 \circ_e |_2^1$ mit $T_1 \in \mathcal{T}_2$. Da $\nu_{|_2^1} = \chi_{|_2^1} : X \to RX$ der zum Colimes gehörende ∞-Funktor ist, folgt die Kommutativität. $\square$

Lemma 5.8 $((X, RX), \nu)$ *ist ein kohärentes 2-System.*

Beweis: Die Behauptung folgt aus (5.4) bis (5.7), da es genügt, die Kohärenzbedingungen für zweifarbige Bäume ohne Inputs der Inputfarbe 2 nachzuweisen. Die Kohärenzbedingungen für Bäume mit Inputs der Inputfarbe 2 folgen dann.
Ist $T \in \mathcal{T}_2$ und sind $e_1, \ldots, e_n$ die Inputs mit Inputfarbe 2, so seien $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{T}_2^0$ und (T) stehe für $(T; e_1, T_1, \cdots; e_n, T_n)$. Ist e eine innere Kante von T, so kommutiert

$$\begin{tikzcd}
X_{(T)} \arrow[d, "\nu^*"'] & X_{(T)}^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[l, "i"'] \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\nu^*"] & X_{(T)_{/e}} \arrow[d, "\nu^*"] \\
X_{(T)^*} & X_{(T)^*}^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[l, "i"] \arrow[r, "j"'] & X_{(T)^*{}_{/e}} = X_{(T)_{/e}{}^*},
\end{tikzcd}$$

dabei unterscheide sich

$$\nu^* : X_{(T)}^{(e,\mathcal{L}_0)} \longrightarrow X_{(T)^*}^{(e,\mathcal{L}_0)}$$

nur in der e-Komponente von $\nu^* : X_{(T)} \to X_{(T)^*}$, die neue e-Komponente sei $id_{\mathcal{L}_0}$. Daraus folgt dann sofort eine der Kohärenzbedingungen, die anderen folgen analog. $\square$

5.1.2 Striktheit der monoidalen Struktur auf RX

Im letzten Abschnitt wurde ein ∞-Funkor $\nu : X \to RX$ definiert. Damit ist insbesondere RX mit einer monoidalen Struktur versehen worden. Die monoidale Struktur von RX ist durch $(RX, \nu^{\{2\}})$ gegeben, also durch ν_T, wobei T ein Baum ist, der nur die Farbe 2 besitzt.

Lemma 5.9 *Mit der gegebenen monoidalen Struktur ist RX eine strikt monoidale ∞-Kategorie.*

Beweis: Das folgende Diagramm kommutiert, da der ∞-Funktor ν_T (auf Diagrammniveau) mit Hilfe des ∞-Funktors ν' definiert ist (siehe Seite 102).

$$\begin{tikzcd} RX_T \arrow[r, "\nu^{\{2\}}"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & RX \\ & RX_{\lambda_n} \arrow[u, "\nu^{\{2\}}"'] \end{tikzcd}$$

(Dabei ist ε auf Seite 33 definiert. ε vergißt die Komponenten von RX_T, die zu inneren Kanten gehören.)
Mit (2.16) folgt, daß RX mit der gegebenen monoidalen Struktur eine strikt monoidale ∞-Kategorie ist. $\square$
Es wird Λ_n^{RX} für den ∞-Funktor

$$RX^{\otimes n} \cong RX_{\lambda_n} \xrightarrow{\nu_{\lambda_n}^{\{2\}}} RX$$

geschrieben.

5.2 Universelle Eigenschaft der ∞-Kategorie RX

Ist Y eine strikt monoidale ∞-Kategorie und $G : X \to Y$ ein monoidaler ∞-Funktor, so wird ein strikt monoidaler ∞-Funktor $\dot{G} : RX \to Y$ konstruiert. Es wird gezeigt, daß die Komposition

$$X \xrightarrow{\nu} RX \xrightarrow{\dot{G}} Y$$

der monoidale ∞-Funktor $G : X \to Y$ ist und daß $\dot{G}$ durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt ist.

Eindeutigkeit des ∞-Funktors $\dot{G} : RX \to Y$. Angenommen es existiert ein strikt monoidaler ∞-Funktor $\dot{G}$ mit $G = \dot{G} \circ \nu$, so folgt mit (4.22)

$$G_T = (\dot{G} \circ \nu)_T = \dot{G} \circ \nu_T$$

für $T \in \mathcal{T}_2^0$. Da ν_T für $T \in \mathcal{T}_2^0$ der zum Colimes gehörende ∞-Funktor χ_T ist, muß $\dot{G}$ auf Diagrammniveau durch G definiert sein.

Konstruktion des ∞-Funktors $\dot{G}: RX \to Y$. Der ∞-Funktor $RX \to Y$ wird auf Diagrammniveau durch die ∞-Funktoren

$$X_T \xrightarrow{G_T} Y, \quad T \in \mathcal{T}_2^0,$$

definiert. Da G ein monoidaler ∞-Funktor ist, sind diese ∞-Funktoren mit den Relationen verträglich und liefern somit einen ∞-Funktor $\dot{G}: RX \to Y$.

Nachweis der strikt monoidalen Struktur des ∞-Funktors $\dot{G}: RX \to Y$.

Lemma 5.10 *Der oben definierte ∞-Funktor $\dot{G}: RX \to Y$ ist strikt monoidal.*

Für den Beweis dieses Satzes werden noch einige Lemmatas benötigt.

Lemma 5.11 *X_2 sei eine strikt monoidale ∞-Kategorie und $F: X_1 \to X_2$ ein monoidaler ∞-Funktor. Es sei $X = (X_1, X_2)$. Für jede innere Kante e der Farbe 2 von $T \in \mathcal{T}_2$ kommutiert*

$$\begin{tikzcd} X_T \arrow[r, "F_T"] \arrow[d, "i^e_{0,0}"'] & X_2 \\ X_T \arrow[ur, "F_T"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis: Besitzt T nur die Farbe 2, so gilt die Behauptung, da X_2 eine strikt monoidale ∞-Kategorie ist. Andernfalls gibt es eine zweifarbige Kante. Mit Hilfe der Kohärenzbedingungen läßt sich die Behauptung auf Bäume kleinerer Filtrierung zurückführen. Da davon ausgegangen werden darf, daß die Behauptung für Bäume kleinerer Filtrierung erfüllt ist, folgt die Gültigkeit der Behauptung. $\square$

Lemma 5.12 *X_2 sei eine strikt monoidale ∞-Kategorie und $F: X_1 \to X_2$ ein monoidaler ∞-Funktor. Es sei $X = (X_1, X_2)$. Für jede zweifarbige Kante e eines Baumes $T \in \mathcal{T}_2$ kommutiert*

$$\begin{tikzcd} X_T \arrow[r, "F_T"] \arrow[d, "i^e_{0,0,2}"'] & X_2 \\ X_T \arrow[ur, "F_T"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis: Die Kommutativität des linken Teils des folgenden Diagramms ist klar, da die horizontalen ∞-Funktoren die kanonischen Klammerisomorphismen sind. Die Kommutativität des rechten Teils folgt mit (5.11)

$$\begin{tikzcd} X_T^{(2,e)} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i^e_{0,0}"'] & X_{T_{(2,e)}} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "i^e_{0,0}"'] & X_2 \\ X_T^{(2,e)} \arrow[r, "j"'] & X_{T_{(2,e)}} \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Aufgrund der Kohärenz kommutiert somit auch

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(2,e)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i^e_{0,0}"'] & X_T \arrow[r, "F"] & X_2 \\
X_T^{(2,e)} \arrow[r, "i"'] & X_T \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

Wegen $i_T^{(2,e)} \circ i^e_{0,0} = i^e_{0,0,2} \circ i_T^{(2,e)}$ kommutiert auch

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(2,e)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & X_T \arrow[r, "F"] & X_2 \\
X_T \arrow[r, "i^e_{0,0,2}"'] & X_T \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

Da

$$X_T = \operatorname{colim}(X_T^{(e,2)} \xleftarrow{\iota} X_T^{(2,e,2)} \xrightarrow{\iota} X_T^{(2,e)}),$$

folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 5.13 *Es sei T ein zweifarbiger Baum. Ist X_2 eine strikt monoidale ∞-Kategorie und $F : X_1 \to X_2$ ein monoidaler ∞-Funktor, so kommutiert*

$$\begin{tikzcd}
X_{T'} \arrow[rr, "\nu''"] \arrow[dr, "F"'] & & X_{T''} \arrow[dl, "F"] \\
& X_2 &
\end{tikzcd}$$

dabei ist $X = (X_1, X_2)$. T', T'' und ν'' sind auf Seite 102 definiert.

Beweis: e_0 bezeichne die Wurzel. Für $T' \in \mathcal{T}_2^0$ ist die Behauptung klar, es sei also $T' \notin T_2^0$.

$$\nu_1 : X_{T'} \longrightarrow X_{T''}^{(2,e_0)}$$

unterscheide sich von $\nu'' : X_{T'} \to X_{T''}$ nur in der e_0-Komponente, die e_0-Komponente von ν_1 ist $id_{\mathcal{L}_0}$. Es ist $T''_{(2,e_0)} = T'$. Der untere Teil von

$$\begin{tikzcd}
X_{T'} \arrow[r, "\nu''"] \arrow[d, "\nu_1"'] & X_{T''} \arrow[dd, "F"] \\
X_{T''}^{(2,e_0)} \arrow[ur, "i"'] \arrow[d, "j"'] & \\
X_{T'} \arrow[r, "F"'] & Y
\end{tikzcd}$$

kommutiert, da F ein monoidaler ∞-Funktor ist. Die Kommutativität des oberen Teils ist klar. Die Komposition $j \circ \nu_1$ unterscheidet sich von der Identität nur auf den Komponenten, die zu zweifarbigen inneren Kanten gehören. Auf diesen Komponenten ist $j \circ \nu_1$ durch $i_{0,0,2}$ gegeben. Mit (5.12) folgt nun die Behauptung.
$\square$

Beweis von Satz 5.10: Es wird die Kommutativität des Diagrammes

$$\begin{tikzcd}
RX^{\otimes n} \arrow[r, "\Lambda_n^{RX}"] \arrow[d, "\dot{G}^{\otimes n}"'] & RX \arrow[d, "\dot{G}"] \\
Y^{\otimes n} \arrow[r, "\Lambda_n^Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

gezeigt. Der Nachweis der Kommutativität wird auf Diagrammniveau geführt. Es seien $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{T}_2^0$.

$$\begin{tikzcd}
X_{T_1} \otimes \cdots \otimes X_{T_n} \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "G_{T_1} \otimes \cdots \otimes G_{T_n}"'] & X_{(\lambda_n;1,T_1;\cdots;n,T_n)} \arrow[r, "\nu^*"] \arrow[dr, "G_{(\lambda_n)}"'] & X_{(\lambda_n)^*} \arrow[r, phantom, "="] & X_{(\lambda_n)^{*\prime}} \arrow[r, "\nu''"] \arrow[dl, "G_{(\lambda_n)^{*\prime}}"'] & X_{(\lambda_n)^{*\prime\prime}} \arrow[r, "\nu"] \arrow[dll, "G_{(\lambda_n)^{*\prime\prime}}"'] & RX \arrow[dlll, "\dot{G}"] \\
Y^{\otimes n} \arrow[rr, "\Lambda_n^Y"'] & & Y & & &
\end{tikzcd}$$

Die Kommutativität des Diagramms folgt aus der Definition von $G_{(\lambda_n;1,T_1;\cdots;n,T_n)}$ bzw $\dot{G}$ und mit (5.13). Aus der Kommutativität folgt die Behauptung. $\square$

Berechnung der Komposition $X \xrightarrow{\nu} RX \xrightarrow{\dot{G}} Y$.

Lemma 5.14 *Es ist* $\dot{G} \circ \nu = G$.

Beweis: Ist $T \in \mathcal{T}_2^0$, so folgt mit (4.22)

$$(\dot{G} \circ \nu)_T = \dot{G} \circ \nu_T = G_T.$$

Mit (3.14) folgt nun die Behauptung. $\square$

5.3 Folgerungen aus dem Rektifizierungstheorem.

Jetzt werden noch einige Folgerungen aus dem Rektifizierungstheorem gezogen.

Lemma 5.15 *Es existiert ein Funktor*

$$R : mon\ \infty - cat \longrightarrow str\ mon\ \infty - cat$$

und eine natürliche Bijektion

$$str\ mon\ \infty - cat(RX, Y) \cong mon\ \infty - cat(X, Y),$$

dabei ist X eine monoidale ∞-Kategorie und Y eine strikt monoidale ∞-Kategorie. Das heißt, $str\ mon\ \infty - cat$ ist eine reflektive Unterkategorie von $mon\ \infty - cat$.

Beweis: Ist $F : X_1 \to X_2$ ein monoidaler ∞-Funktor, so sei der strikt monoidale ∞-Funktor

$$RF : RX \longrightarrow RY$$

definiert als der nach Satz 5.1 eindeutig bestimmte ∞-Funktor, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\nu"'] & Y \arrow[r, "\nu"] & RY \\
& RX \arrow[ur, "RF"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Nach (5.1) ist

$$RId_X = Id_{RX},$$

da $Id_{RX} \circ \nu = \nu \circ Id_X$ ist. Sind $F : X_1 \to X_2$ und $G : X_2 \to X_3$ monoidale ∞-Funktoren, so ist nach (5.1)

$$R(G \circ F) = RG \circ RF,$$

denn es gilt

$$RG \circ RF \circ \nu = RG \circ \nu \circ F = \nu \circ G \circ F.$$

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "F"] \arrow[dd, "\nu"'] & X_2 \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\nu"'] & X_3 \arrow[r, "\nu"] & RX_3 \\
& RX_2 \arrow[urr, "RG"'] & & \\
RX_1 \arrow[ur, "RF"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Damit ist ein Funktor $R : mon\ \infty - cat \to str\ mon\ \infty - cat$ definiert. Aufgrund des Rektifizierungstheorems existiert eine Bijektion von Mengen

$$str\ mon\ \infty - cat(RX, Y) \cong mon\ \infty - cat(X, Y).$$

Es ist noch die Natürlichkeit zu zeigen. Sind monoidale ∞-Funktoren

$$X' \xrightarrow{F} X \xrightarrow{G} Y \xrightarrow{H} Y'$$

gegeben, so ist

$$H \circ \dot{G} \circ RF \circ \nu = H \circ \dot{G} \circ \nu \circ F = H \circ G \circ F.$$

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\nu"'] & X \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\nu"'] & Y \arrow[r, "H"] & Y' \\
RX' \arrow[r, "RF"'] & RX \arrow[ur, "\dot{G}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Also gilt

$$\dot{(H \circ G \circ F)} = H \circ \dot{G} \circ RF.$$

Das zeigt die Natürlichkeit. $\square$

5.4 Die ∞-Funktoren $\phi : X \to RX$ und $\Phi : \mathcal{L}_1 \otimes X \to RX$

Es wird gezeigt, daß eine ∞-Kategorie X in einem gewissen Sinne 'äquivalent' zu ihrer Rektifizierung RX ist.

Lemma 5.16 *Ist (X, F) eine monoidale ∞-Kategorie, so existiert ein ∞-Funktor*

$$\phi : RX \longrightarrow X,$$

mit $\phi \circ \nu_{|_2^1} = Id$, dh. folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\nu_{|_2^1}"] \arrow[dr, "Id"'] & RX \arrow[d, "\phi"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

Beweis: Definition des ∞-Funktors $\phi : RX \to X$: Der ∞-Funktor $\phi : RX \to X$ wird auf Diagrammniveau definiert. Für $T \in T_2^0$ sei der zu konstruierende ∞-Funktor $X_T \to X$ die Komposition

$$X_T \xrightarrow{\kappa_T} X_{\hat{T}} \xrightarrow{F_{\hat{T}}} X,$$

dabei entsteht $\hat{T}$ aus T, indem die Zahl 2 am Ende der Wurzel durch die Zahl 1 ersetzt wird. Ist $T = |^1_2$, so ist κ_T die Identität, andernfalls ist κ_T durch den Funktor $i_{0,0} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0$ (auf der Wurzelkomponente) induziert.
<u>Verträglichkeit mit der Colimesstruktur:</u> e sei kein Input. Der ∞-Funktor

$$\kappa_T^{(e,1)} : X_T^{(e,1)} \longrightarrow X_{\hat{T}}^{(e,1)}$$

sei durch den Funktor $i_{0,0} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0$ induziert, falls e eine innere Kante ist. Ist e die Wurzel, so sei $\kappa_T^{(e,1)}$ die Identität. Es sei $T_{(e,1)} = T_2 \circ_e T_1$, dann ist $\hat{T}_{(e,1)} = \widehat{T_2} \circ_e \widehat{T_1} = \widehat{T_2} \circ_e T_1$. Es wird die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
X_{T_2} \arrow[d, "\kappa"'] & X_T^{(e,1)} \arrow[l, "F_{T,T_2}"'] \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\kappa"'] & X_T \arrow[d, "\kappa"] \\
X_{\widehat{T_2}} \arrow[dr, "F"'] & X_{\hat{T}}^{(e,1)} \arrow[l, "F_{\hat{T},\widehat{T_2}}"'] \arrow[r, "i"] & X_{\hat{T}} \arrow[dl, "F"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

gezeigt. Das Quadrat rechts oben kommutiert. Das Quadrat links oben ist gleich

$$\begin{tikzcd}
X_T^{(e,1)} \cong X_{T_{(e,1)}} \arrow[r, "Id^{(e,F_{T_1})}"] \arrow[d, "\kappa"'] & X_{T_2} \arrow[d, "\kappa"] \\
X_{\hat{T}}^{(e,1)} \cong X_{\hat{T}_{(e,1)}} \arrow[r, "Id^{(e,F_{T_1})}"'] & X_{\widehat{T_2}}
\end{tikzcd} ,$$

auch dieses Diagramm kommutiert offensichtlich. Da X eine monoidale ∞-Kategorie ist, kommutiert der untere Teil des obigen Quadrats. Damit ist die Verträglichkeit mit einer der beiden Relationen gezeigt.
Ist e eine innere Kante, so ist $\widehat{T_{/e}} = \hat{T}_{/e}$ und der ∞-Funktor

$$\kappa_T^{(e,\mathcal{L}_0)} : X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \longrightarrow X_{\hat{T}}^{(e,\mathcal{L}_0)}$$

sei durch den Funktor $i_{0,0} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0$ (auf der Wurzelkomponente) induziert. Es wird die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
X_{T_{/e}} \arrow[d, "\kappa"'] & X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[l, "j"'] \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\kappa"'] & X_T \arrow[d, "\kappa"] \\
X_{\widehat{T_{/e}}} \arrow[dr, "F"'] & X_{\hat{T}}^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[l, "j"'] \arrow[r, "i"] & X_{\hat{T}} \arrow[dl, "F"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

gezeigt. Die Kommutativität des rechten Quadrats und des unteren Teils ist offensichtlich.
Es ist nur der Fall, daß die Wurzel der Nachfolger von e ist und beim Schrumpfen der Kante e entsteht eine Ecke, in der nur eine Kante endet, zu betrachten. In allen anderen Fällen ist die Kommutativität des linken Quadrats klar. Da die Wurzelkomponente von $X_{\widehat{T_{/e}}}$ gleich $\mathcal{L}_0$ ist, folgt auch in diesem Fall die Kommutativität des linken Quadrats.
Da $\nu_{|\frac{1}{2}} : X \to RX$ der zum Colimes gehörende ∞-Funktor ist, ist $\phi \circ \nu_{|\frac{1}{2}} = Id$ erfüllt. $\square$

Lemma 5.17 *Ist (X, F) eine monoidale ∞-Kategorie, so existiert ein ∞-Funktor*

$$\Phi : \mathcal{L}_1 \otimes RX \longrightarrow RX,$$

so daß folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_0 \otimes RX \cong RX \arrow[d, "i_1 \otimes id"'] \arrow[dr, "\nu_{|\frac{1}{2}} \circ \phi"] & \\
\mathcal{L}_1 \otimes RX \arrow[r, "\Phi"] & RX \\
\mathcal{L}_0 \otimes RX \cong RX \arrow[u, "i_0 \otimes id"] \arrow[ur, "Id"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis: Definition des ∞-Funktors $\Phi : \mathcal{L}_1 \otimes RX \to RX$: Der ∞-Funktor wird auf Diagrammniveau definiert. Für $T \in \mathcal{T}_2^0$ sei der ∞-Funktor

$$\mathcal{L}_1 \otimes X_T \longrightarrow RX$$

als Komposition

$$\mathcal{L}_1 \otimes X_T \xrightarrow{\tilde{\mu}_T} X_T \xrightarrow{\chi_T} RX$$

definiert, dabei ist der erste ∞-Funktor durch den ∞-Funktor

$$\mu : \mathcal{L}_1 \otimes (X_T)_{e(0)} \longrightarrow (X_T)_{e(0)}$$

induziert ($e(0)$ ist die Wurzel von T).
Verträglichkeit mit den Relationen: e sei kein Input. Der ∞-Funktor

$$\tilde{\mu}_T^{(e,1)} : \mathcal{L}_1 \otimes X_T^{(e,1)} \longrightarrow X_T^{(e,1)}$$

sei durch den ∞-Funktor

$$\mu : \mathcal{L}_1 \otimes (X_T^{(e,1)})_{e(0)} \longrightarrow (X_T^{(e,1)})_{e(0)}$$

induziert. Es wird die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_1 \otimes X_{T_2} \arrow[d, "\tilde{\mu}_{T_2}"'] & \mathcal{L}_1 \otimes X_T^{(e,1)} \arrow[l, "id \otimes F_{T,T_2}"'] \arrow[r, "id \otimes i"] \arrow[d, "\tilde{\mu}_T^{(e,1)}"] & \mathcal{L}_1 \otimes X_T \arrow[d, "\tilde{\mu}_T"] \\
X_{T_2} \arrow[dr, "\chi"'] & X_T^{(e,1)} \arrow[l, "F_{T,T_2}"'] \arrow[r, "i"] & X_T \arrow[dl, "\chi"] \\
 & RX &
\end{tikzcd}$$

gezeigt. Es ist nur der Fall, daß e die Wurzel jedoch kein Input ist, zu betrachten, die anderen Fälle sind klar. Die Kommutativität des rechten Quadrats, folgt dann aus der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_1 \otimes (X_T^{(e,1)})_{e(0)} \arrow[r, "id \otimes i_1"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathcal{L}_1 \otimes (X_T)_{e(0)} \arrow[d, "\mu"] \\
(X_T^{(e,1)})_{e(0)} \arrow[r, "i_1"'] & \mathcal{L}_1
\end{tikzcd}$$

Das ist gleichbedeutend mit der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_0 \arrow[r, "id \otimes i_1"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_1 \arrow[d, "\mu"] \\
\mathcal{L}_0 \arrow[r, "i_1"'] & \mathcal{L}_1
\end{tikzcd}$$

Für $t \in ob\mathcal{L}_1$ ist

$$\mu(id \otimes i_1(t,0)) = \mu(t,1) = 1 = i_1(0) = i_1(\mu(t,0)).$$

Damit ist gezeigt, daß das rechte Quadrat kommutiert.
Es sei $T_{(e,1)} = T_2 \circ_e T_1$. Die Kommutativität des linken Quadrats folgt aus der von

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_1 \otimes X_T^{(e,1)} \cong \mathcal{L}_1 \otimes X_{T_{(e,1)}} \arrow[r, "id \otimes Id^{(e,F_{T_1})}"] \arrow[d, "\tilde{\mu}"'] & \mathcal{L}_1 \otimes X_{T_2} \arrow[d, "\tilde{\mu}"] \\
X_T^{(e,1)} \cong X_{T_{(e,1)}} \arrow[r, "id^{(e,F_{T_1})}"'] & X_{T_2}
\end{tikzcd}$$

Da e die Wurzel ist, ist $T_2 = |_2^1$, somit handelt es sich bei den vertikalen ∞-Funktoren um Projektionen und das Quadrat kommutiert.

e sei eine innere Kante. Der ∞-Funktor

$$\tilde{\mu}_T^{(e,\mathcal{L}_0)} : \mathcal{L}_1 \otimes X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \longrightarrow X_T^{(e,\mathcal{L}_0)}$$

sei durch den ∞-Funktor

$$\mu : \mathcal{L}_1 \otimes (X_T^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e(0)} \longrightarrow (X_T^{(e,\mathcal{L}_0)})_{e(0)}$$

induziert. Es wird die Kommutativtiät von

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_1 \otimes X_{T_{/e}} \arrow[d, "\tilde{\mu}"'] & \mathcal{L}_1 \otimes X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[l, "id \otimes j"'] \arrow[r, "id \otimes i"] \arrow[d, "\tilde{\mu}"'] & \mathcal{L}_1 \otimes X_T \arrow[d, "\tilde{\mu}"] \\
X_{T_{/e}} \arrow[dr, "\chi"'] & X_T^{(e,\mathcal{L}_0)} \arrow[l, "j"'] \arrow[r, "i"] & X_T \arrow[dl, "\chi"] \\
& RX &
\end{tikzcd}$$

gezeigt. Die Kommutativität des rechten Quadrats ist klar. Um die Kommutativität des linken Diagramms zu zeigen, ist nur der Fall zu betrachten, daß der Nachfolger von e die Wurzel ist und daß beim Schrumpfen der Kante e eine Ecke entsteht, in der nur eine Kante endet. Alle anderen Fälle sind klar. Es sei e' die von e verschieden Kante, die den gleichen Nachfolger wie e hat. In diesem Fall ist die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_1 \otimes (X_T)_{e(0)} \otimes (X_T)_{e'} \arrow[r, "Id \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes Id"'] & \mathcal{L}_1 \otimes (X_{T_{/e}})_{e(0)} \arrow[d, "\mu"] \\
(X_T)_{e(0)} \otimes (X_T)_{e'} \arrow[r, "\mu"'] & (X_{T_{/e}})_{e(0)}
\end{tikzcd}$$

zu zeigen. Die Kommutativität folgt, da μ assoziativ ist. Es ist nämlich

$$\mu \circ (\mu \otimes id) = \mu \circ (id \circ \mu),$$

da für

$$max(max(t_1, t_2), t_3) = max(t_1, max(t_2, t_3))$$

bzw

$$pr_2(t_1, pr_2(t_2, x)) = x = pr_2(max(t_1, t_2), x).$$

<u>Berechnung von $\Phi \circ (i_0 \otimes Id)$</u>: Da

$$(X_T)_{e(0)} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}_0 \otimes (X_T)_{e(0)} \xrightarrow{i_0 \otimes Id} (X_T)_{e(0)} \otimes \mathcal{L}_1 \xrightarrow{\mu} (X_T)_{e(0)}$$

die Identität ist, folgt

$$\Phi \circ (i_0 \otimes Id) = Id.$$

<u>Berechnung von $\Phi \circ (i_1 \otimes Id)$</u>: Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\chi_{|^1_2}"'] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathcal{L}_0 \otimes X \arrow[r, "i_1 \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes \chi_{|^1_2}"] & \mathcal{L}_1 \otimes X \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "id \otimes \chi_{|^1_2}"] & X \arrow[d, "\nu_{|^1_2}"] \\
RX \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathcal{L}_0 \otimes RX \arrow[r, "i_1 \otimes id"'] & \mathcal{L}_1 \otimes RX \arrow[r, "\Phi"'] & RX
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Da die Komposition

$$X \cong \mathcal{L}_0 \otimes X \stackrel{i_1 \otimes id}{\longrightarrow} \mathcal{L}_0 \otimes X \stackrel{\mu}{\longrightarrow} X$$

die Identität ist, ist der ∞-Funktor

$$RX \cong \mathcal{L}_0 \otimes RX \stackrel{i_1 \otimes id}{\longrightarrow} \mathcal{L}_1 \otimes RX \stackrel{\Phi}{\longrightarrow} RX$$

'eingeschränkt' auf $X_{|^1_2} = X$ (dh. nach Voranschalten des ∞-Funktors $\chi_{|^1_2}$) durch $\nu_{|^1_2}$ gegeben. Da $\nu_{|^1_2} \circ \phi \circ \nu_{|^1_2} = \nu_{|^1_2}$ ist, ist der ∞-Funktor $\Phi \circ (i_1 \otimes id)$ 'eingeschränkt' auf $X_{|^1_2}$ durch $\nu_{|^1_2} \circ \phi$ gegeben.
Ist $T \neq |^1_2$, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_0 \otimes X_T \arrow[r, "i_1 \otimes Id"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{L}_1 \otimes X_T \arrow[d, "\tilde{\mu}"] \\
X_T \arrow[r, "i^{e(0)}_{1,1}"'] & X_T
\end{tikzcd}$$

Das heißt, der ∞-Funktor $\Phi \circ (i_1 \otimes Id)$ ist auf Diagrammniveau im wesentlichen durch

$$X_T \stackrel{i^{e(0)}_{1,1}}{\longrightarrow} X_T \longrightarrow RX$$

gegeben. Da $T_{(e(0),1)} = |^1_2 \circ_{e(0)} \hat{T}$ und $X_{|^1_2} = X$ ist, kommutiert

$$\begin{tikzcd}
 & X_T \arrow[r, "\chi"] & RX \\
X_T \arrow[ur, "i^{e(0)}_{1,1}"] \arrow[r, "i^{e(0)}_{0,0}"] \arrow[dr, "\kappa"'] & X_T^{(e(0),1)} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "F_{T,|^1_2}"] \arrow[d, "Id"'] & X \arrow[u, "\chi_{|^1_2} = \nu_{|^1_2}"'] \\
 & X_{\hat{T}} \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

Es folgt, daß $\Phi \circ (i_1 \otimes Id) = \nu_{|^1_2} \circ \phi$ ist, da ϕ auf Diagrammniveau durch $F_{\hat{T}} \circ \kappa_T$ gegeben ist. $\square$

Kapitel 6

Weitere Versionen monoidaler ∞-Kategorien

Es werden verschieden Arten monoidaler ∞-Kategorien definiert. Es werden schwach monoidale ∞-Kategorien, $\mathcal{I}s$-monoidale ∞-Kategorien und semimonoidale ∞-Kategorien definiert.

6.1 Schwach monoidale ∞-Kategorien und schwach monoidale ∞-Funktoren

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, eine noch schwächere Version monoidaler ∞-Kategorien einzuführen, die sogenannten schach monoidalen ∞-Kategorien.

Sind $f : A_1 \to A_2$, $g : A_2 \to A_3$ 1-Morphismen und B ein Objekt einer monoidalen ∞-Kategorie, so kommutiert das folgende Diagramm strikt.

$$\begin{tikzcd} A_1B \arrow[d, "fB"'] \arrow[dr, "(f \times_0 g)B"] & \\ A_2B \arrow[r, "gB"'] & A_3B \end{tikzcd}$$

In einer schwach monoidalen ∞-Kategorien soll das Diagramm im allgemeinen nicht strikt kommutieren, sondern nur bis auf einen 2-Morphismus. Es werden schwach kohärente Systeme eingeführt, anschließend werden schwach monoidale ∞-Kategorien und schwach monoidale ∞-Funktoren definiert.

6.1.1 Schwach kohärente Systeme

Definition 6.1 *Ein schwach kohärentes k-System* $\underline{X} = (X, (\tilde{X}, F), q, p)$ *besteht aus*

- *k-Tupeln* $X = (X_1, \ldots, X_k)$ *und* $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_k)$ *von* ∞*-Kategorien,*

· *einem kohärenten k-System* $(\tilde{X}, F)$.

· *einem k-Tupel* $q = (q_1, \ldots, q_k)$ *von* ∞*-Funktoren* $q_i : \tilde{X}_i \to X_i$ *und einem k-Tupel* $p = (p_1, \ldots, p_k)$ *von Abbildungen* $p_i : X_i \to \tilde{X}_i$ *mit* $q_i \circ p_i = id_{X_i}$.

Jedes kohärente k-System (X, F) kann in kanonischer Weise als schwach kohärentes k-System $(X, (X, F), id, id)$ aufgefaßt werden.

Für schwach kohärente Systeme gelten analoge Sätze wie für kohärente Systeme.

Marginale Systeme. Es sei $N = \{j_1, \ldots, j_l\} \subset \underline{k}$ mit $j_1 < \ldots < j_k$. Ist $q = (q_1, \ldots, q_k)$ eine Abbildung bzw ein ∞-Funktor von k-Systemen, so sei $Nq = (Nq_{j_1}, \ldots, Nq_{j_l})$.

Lemma 6.2 *Ist* $\underline{X} = (X, (\tilde{X}, F), q, p)$ *ein schwach kohärentes k-System, so ist* $N\underline{X} = (NX, (N\tilde{X}, F^N), Nq, Np)$ *ein schwach kohärentes l-System.*

Beweis: Die Behauptung folgt mit (4.6). □

Zusammenkleben schwach kohärenter System.

Satz 6.3 *Ist ein schwach kohärentes l-System* $\underline{X_1}$ *und ein schwach kohärentes m-System* $\underline{X_2}$ *mit* $\{l\}\underline{X_1} = \{1\}\underline{X_2}$ *gegeben, so existiert genau ein schwach kohärentes (l+m+1)-System* $\underline{X}$ *mit* $\{1, \ldots, l\}\underline{X} = \underline{X_1}$ *und* $\{l, \ldots, l+m-1\}\underline{X} = \underline{X_2}$.

Beweis: Die Behauptung folgt mit (4.17). □

6.1.2 Schwach monoidale ∞-Kategorien und schwach monoidale ∞-Funktoren

Definition 6.4 *Eine schwach monoidale* ∞*-Kategorie ist ein schwach kohärentes 1-System. Ein schwach monoidaler* ∞*-Funktor ist ein schwach kohärentes 2-System. Quelle und Ziel eines schwach monoidalen 2-Funktors sind analog wie in (3.12) definiert.*

Ist $((X_1, X_2), ((\tilde{X}_1, \tilde{X}_2), F), q, p)$ ein kohärentes 2-System, so wird auch kurz $F : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ geschrieben.

Lemma 6.5 *Die schwach kohärenten* ∞*-Kategorien und die schwach kohärenten* ∞*-Funktoren bilden eine Kategorie. Diese wird mit*

$$lax\ mon\ \infty - cat$$

bezeichnet. Es ist

$$mon\ \infty - cat \subset lax\ mon\ \infty - cat.$$

□

Rektifizierung schwach monoidaler ∞-Kategorien.

Satz 6.6 *Ist $\underline{X}$ eine schwach monoidale ∞-Kategorie, so existiert eine strikt monoidale ∞-Kategorie $R\underline{X}$ und ein schwach monoidaler ∞-Funktor $\nu : \underline{X} \to R\underline{X}$ mit folgender universellen Eigenschaft:*
Ist Y eine strikt monoidale ∞-Kategorie und $G : \underline{X} \to Y$ ein schwach monoidaler ∞-Funktor, so existiert genau ein strikt monoidaler ∞-Funktor $\dot{G} : R\underline{X} \to Y$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\nu"'] & Y \\
R\underline{X} \arrow[ur, "\dot{G}"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis: Ist $\underline{X} = (X, (\tilde{X}, F), q, p)$, so folgt die Behauptung aus dem Rektifizierungstheorem (5.1) angewandt auf die monoidale ∞-Kategorie $(\tilde{X}, F)$. Es ist $R\underline{X} = R\tilde{X}$. $\square$

Auch für schwach monoidale ∞-Kategorien existieren zu (5.16) und (5.17) analoge Aussagen.

Lemma 6.7 *Ist $\underline{X}$ eine schwach monoidale ∞-Kategorie, so existiert ein ∞-Funktor*

$$\underline{\phi} : R\underline{X} \longrightarrow \tilde{X},$$

mit $\underline{\phi} \circ \nu_{|\frac{1}{2}} = id_{\tilde{X}}$.

Beweis: Ist $\underline{X} = (X, (\tilde{X}, F), q, p)$, so folgt die Behauptung mit (5.16). Dabei ist ϕ der in (5.16) definierte ∞-Funktor für die monoidale ∞-Kategorie $(\tilde{X}, F)$. $\square$

Lemma 6.8 *Ist $\underline{X}$ eine schwach monoidale ∞-Kategorie, so existiert ein ∞-Funktor*

$$\underline{\Phi} : \mathcal{L}_1 \otimes R\underline{X} \longrightarrow R\underline{X},$$

so daß folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_0 \otimes R\underline{X} \cong R\underline{X} \arrow[d, "i_1 \otimes id"'] \arrow[dr, "\nu_{|\frac{1}{2}} \circ \underline{\phi}"] & \\
\mathcal{L}_1 \otimes R\underline{X} \arrow[r, "\underline{\Phi}"] & R\underline{X} \\
\mathcal{L}_0 \otimes R\underline{X} \cong R\underline{X} \arrow[u, "i_0 \otimes id"] \arrow[ur, "Id"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis: Ist $\underline{X} = (X, (\tilde{X}, F), q, p)$, so folgt die Behauptung mit (5.17). Es ist $\underline{\Phi} = \Phi$. Dabei ist Φ der in (5.17) definierte ∞-Funktor für die monoidale ∞-Kategorie $(\tilde{X}, F)$. $\square$

Sind $x_1, \ldots, x_n \in X$, so sei

$$x_1 \cdots x_n := q(F_{\lambda_n}(0 \otimes p(x_1) \otimes \cdots p(x_n))).$$

Ist

- $\tilde{X} = Hom(G(\Delta^n), X) \otimes_{\mathbf{\Delta}^{op}} \Delta^n$. $G(\Delta^n)$ ist in [1] definiert,
- q sei durch die Projektion $Hom(G(\Delta^n), X) \otimes_{\mathbf{\Delta}^{op}} G(\Delta^n) \to X$ gegeben,
- $p : X \to \tilde{X}$ sei durch $x \mapsto \begin{pmatrix} G(\Delta^m) & \to & F_m \to X \\ \Delta^m & \mapsto & u_m \end{pmatrix} \otimes \Delta^m$ gegeben,

so kommutiert

$$\begin{tikzcd} A_1B \arrow[d, "fB"'] \arrow[dr, "(f \times_0 g)B"] \arrow[dr, phantom, shift right=3ex, "\Swarrow"] & \\ A_2B \arrow[r, "gB"'] & A_3B \end{tikzcd}$$

nur bis auf einen 2-Morphismus.

6.2 Monoidale 2-Kategorien im Sinne von Kapranov/Voewodsky

In [7] definieren Kapranov und Voewodsky monoidale 2-Kategorien. Man erhält eine monoidale 2-Kategorie im Sinne von Kapranov/Voewodsky bis auf kleine Abweichungen, falls man an eine schwach monoidale ∞-Kategorie ein paar Zusatzforderungen stellt.

Definition 6.9 *Eine monoidale 2-Kategorie im Sinne von Kapranov/Voewodsky ist eine schwach monoidale ∞-Kategorie $\underline{X} = (X, (\tilde{X}, F), q, p)$, für die gilt:*

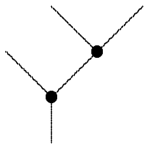
- *X ist eine 2-Kategorie.*
- *$\tilde{X} = Hom(G(\Delta^n), X) \otimes_{\mathbf{\Delta}^{op}} G(\Delta^n)$. Die ∞-Kategorie $G(\Delta^n)$ ist in [1] definiert.*
- *Der ∞-Funktor q sei durch die Projektion $Hom(G(\Delta^n), X) \otimes_{\mathbf{\Delta}^{op}} G(\Delta^n) \to X$ gegeben.*

$\cdot\ p : X \to \tilde{X}$ *sei durch* $x \mapsto \begin{pmatrix} G(\Delta^m) & \to & F_m \to X \\ \Delta^m & \mapsto & u_m \end{pmatrix} \otimes \Delta^m$ *gegeben. Es ist dann* $q \circ p = Id$.

Bei dieser Definition handelt es sich um eine unterteilte Version monoidaler 2-Kategorien. Für eine nichtunterteilte Version sind noch weitere Bedingungen zu stellen.
Zum Beispiel ist für Objekte A, B und C zu fordern, daß

$$a'_{A,B,C} := q(F_T(0 \otimes pA \otimes \to \otimes pB \otimes pC)) : ABC \to A(BC)$$

mit

T = 

die Identität ist.

6.3 $\mathcal{I}s$-monoidale ∞-Kategorien und $\mathcal{I}s$-monoidale ∞-Funktoren

$\mathcal{I}s_n$ sei die Kategorie mit den Objekten $0, 1, \ldots, n$, so daß jede Morphismenmenge $\mathcal{I}s_n(k,l)$ genau einen Isomorphismus enthält.
Es ist möglich die in der Arbeit bisher vorgestellte Theorie anstatt mit Hilfe der Kategorien $\mathcal{L}_n$ mit Hilfe der Kategorien $\mathcal{I}s_n$ zu definieren. Es gelten die entsprechenden Sätze. Die Beweise werden genau analog geführt.

Bezeichnung 6.10 *Die Kategorie der $\mathcal{I}s$-monoidalen ∞-Kategorien und $\mathcal{I}s$-monoidalen ∞-Funktoren wird mit*

$$\mathcal{I}s - mon \infty - cat$$

bezeichnet.

Lemma 6.11 *Jede $\mathcal{I}s$-monoidale ∞-Kategorie läßt sich als monoidale ∞-Kategorie und jeder $\mathcal{I}s$-monoidale ∞-Funktor läßt sich als monoidaler ∞-Funktor auffassen. Es ist*

$$\mathcal{I}s - mon \infty - cat \subset mon \infty - cat.$$

Beweis: Ist eine $\mathcal{I}s$-monoidale ∞-Kategorie bzw ein $\mathcal{I}s$-monoidaler ∞-Funktor gegeben, so läßt sich mit Hilfe des Funktors

$$\mathcal{L}_n \longrightarrow \mathcal{I}s_n : t \longmapsto t$$

eine monoidale ∞-Kategorie bzw ein monoidaler ∞-Funktor definieren. Durch diese Zuordnung kann $\mathcal{I}s - mon \infty - cat$ als Unterkategorie von $mon \infty - cat$ aufgefaßt werden. □

6.4 Semimonoidale ∞-Kategorien und semimonoidale ∞-Funktoren

Wird statt dem Tensorprodukt $\otimes$ von Steiner das kartesische Produkt $\times$ benutzt, so ergeben sich die semimonoidalen ∞-Kategorien und die semimonoidalen ∞-Funktoren. Es gelten analoge Sätze wie für monoidale ∞-Kategorien und monoidale ∞-Funktoren.

Bezeichnung 6.12 *Die Kategorie der semimonoidalen ∞-Kategorien und der semimonoidalen ∞-Funktoren wird mit*

$$semimon\ \infty - cat$$

bezeichnet.

Lemma 6.13 *Jede semimonoidale ∞-Kategorie läßt sich als monoidale ∞-Kategorie und jeder semimonoidale ∞-Funktor läßt sich als monoidaler ∞-Funktor auffassen. Es ist*

$$semimon\ \infty - cat \subset mon\ \infty - cat.$$

Beweis: Ist eine semimonoidale ∞-Kategorie bzw ein semimonoidaler ∞-Funktor gegeben, so läßt sich mit Hilfe des ∞-Funktors

$$\begin{array}{ccc} Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n & \longrightarrow & Y_1 \times \cdots \times Y_2 \\ y_1 \otimes \cdots \otimes y_n & \longmapsto & y_1 \times \cdots \times y_n \end{array},$$

mit $y_i \in Y_i$ für $1 \leq i \leq n$, eine monoidale ∞-Kategorie bzw ein monoidaler ∞-Funktor definieren. Durch diese Zuordnung kann $semimon\ \infty - cat$ als Unterkategorie von $mon\ \infty - cat$ aufgefaßt werden. $\Box$

Literaturverzeichnis

[1] A. Al-Agl, R. Steiner, Nerves of multiple categories, Proc. London Math. Soc. (3) 66 (1993), 92-128

[2] J.C. Baez, J. Dolan, Higher-dimensional algebra and topological quantum field theory, preprint

[3] J.M. Boardman, R.M. Vogt, Homotopy invariant structures on topological spaces, Lecture Notes in Mathematics 347

[4] R. Brown, P.J. Higgins, On the algebra of cubes, Journal of Pure and Applied Algebra 21 (1981), 233-269

[5] J. Hollender, R.M. Vogt, Modules of topological spaces, applications to homotopy limits and E_∞-structures, Arch. Math. Vol. 59, 115-129 (1992)

[6] M.M. Kapranov, V.A. Voevodsky, Braided monoidal 2-categories, 2-vector spaces and Zamolodchikov tetrahedra equations, preprint

[7] M.M. Kapranov, V.A. Voevodsky, 2-categories and Zamolodchikov tetrahedra equations, Proc. Sympos. Pure Math. Vol. 56 (1994), Part 2

[8] M.M. Kapranov, V.A. Voevodsky, ∞-groupoids and homotopy types, Cah. Top. Géom. Diff. Catégoriques 32, 29 - 46 (1991)

[9] G.M. Kelly, Basic concepts of enriched category theory, Londen Mathematical Society Lecture Note Series 64

[10] S. MacLane, Kategorien

[11] E.H. Spanier, Algebraic Topology

[12] R. Steiner, Tensor products of infinity-categories, University of Glasgow, Department of Mathematics, Preprent Series, Paper No. 91/77

[13] R. Steiner, The algebra of directed complexes, University of Glasgow, Department of Mathematics, Preprint Series, Paper No. 92/45

[14] R. Street, The algebra of oriented simplexes, Journal of Pure and Applied Algebra 49 (1987), 283-335

[15] R.W. Thomason, Homotopy colimits in the category of small categories, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 85 (1979), 91-109