PROPRIÉTÉS DE PROJECTION DES RELATIONS BINAIRES

CHRISTIAN DELHOMMÉ

RÉSUMÉ. Nous établissons des critères généraux de "projectivité" pour les relations binaires réflexives. Nous obtenons notamment, pour tout entier n, l'existence de graphes n-fortement projectifs.

1. Introduction

Etant donnés un entier n et une structure $\mathfrak{M}$ dont les applications constantes sont des endomorphismes, $\mathfrak{M}$ est dite n-fortement projective si les projections sont ses seules opérations n-aires régulières par rapport à chaque argument qui soient identiques sur la diagonale ; elle est n-faiblement projective si les projections sont les seules rétractions de $\mathfrak{M}^n$ sur sa diagonale. Ces propriétés étendent celle qu'E. Corominas a introduite pour les ensembles ordonnés dans le cadre de son étude de la propriété du point fixe [Cor].

On montre par des arguments d'algèbre universelle que, sauf cas exceptionnels, la 2-projectivité faible entraîne la n-projectivité faible pour tout entier n [P,R,S], [D,McK,N,P]. Il n'en va pas de même avec la projectivité forte : ainsi par exemple, un graphe fini (réflexif et symétrique) ne saurait être n-fortement projectif que pour un nombre fini de valeurs de l'entier n [Del1].

Les structures projectives, et notamment les structures relationnelles binaires projectives, interviennent dans divers domaines (cf. [Cor], [Pou], [P,R,S], [Weh]).

Dans cette note, nous nous intéressons aux relations binaires, pour lesquelles nous établissons des critères de projectivité basés sur des techniques de topologie algébrique élémentaire.

2. Préliminaires

2.1. **Relations binaires-réflexives.** Une *relation binaire-réflexive* de *base* V est tout couple $\mathfrak{R} = (V, \mathcal{E})$ tel que $\Delta_V \subset \mathcal{E} \subset V \times V$, où Δ_V désigne $\{(x,x) : x \in V\}$; nous noterons $x \sim_{\mathfrak{R}} y$ pour $(x,y) \in \mathcal{E}$. La relation $\mathfrak{R}$ est un *graphe* si elle est en outre *symétrique*, c'est-à-dire si $\mathcal{E}^{-1} = \mathcal{E}$, où $\mathcal{E}^{-1}$ désigne $\{(y,x) : (x,y) \in \mathcal{E}\}$; l'*enveloppe symétrique* de $\mathfrak{R}$ est le graphe $S\mathfrak{R} = (V, \mathcal{E} \cup \mathcal{E}^{-1})$. Pour toute partie W de V, désignons par $\mathfrak{R}(W) = \big(W, \mathcal{E} \cap (W \times W)\big)$ la *relation induite par* $\mathfrak{R}$ *sur* W. Etant donnés deux ensembles V et V', à toute application $f : V' \to V$, associons l'application $\vec{f} : V' \times V' \to V \times V$, qui image chaque couple (x,y) en le couple $\big(f(x), f(y)\big)$. Etant données deux relations $\mathfrak{R} = (V, \mathcal{E})$ et $\mathfrak{R}' = (V', \mathcal{E}')$, désignons par $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}]$ l'ensemble des morphismes de $\mathfrak{R}'$ dans $\mathfrak{R}$, c'est-à-dire des applications $f : V' \to V$ pour lesquelles $\vec{f}(\mathcal{E}') \subset \mathcal{E}$; l'application f est un *plongement* si elle est injective et si $\vec{f}(\mathcal{E}') = \mathcal{E} \cap \big(f(V') \times f(V')\big)$. Ainsi, $\mathfrak{R}$ *contient* (resp. *contient-faiblement*) $\mathfrak{R}'$ s'il existe un plongement (resp. un morphisme injectif) de $\mathfrak{R}'$ dans $\mathfrak{R}$.

Le *losange* est la relation $\mathfrak{L} = \big(\{0,1,2,3\}, \{(0,1),(0,2),(1,3),(2,3)\} \cup \Delta_{\{0,1,2,3\}}\big)$; étant donnés des entiers $h \geq 2$ et $\ell \geq 3$, la *h-transitivité* est la relation $\mathfrak{T}_h = \big(\{0, \cdots, h\}, \{(k,k+1) : 0 \leq k < h\} \cup \{(0,h)\} \cup \Delta_{\{0,\cdots,h\}}\big)$, le *cycle orienté* $\overrightarrow{\mathfrak{C}_\ell}$ est la relation $\big(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}, \{(\overline{k}, \overline{k+1}) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \Delta_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}\big)$, où pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, $\overline{k}$ désigne $k + \ell\mathbb{Z}$, enfin le *cycle* $\mathfrak{C}_\ell$ est le graphe $S\overrightarrow{\mathfrak{C}_\ell}$.

Un graphe $\mathfrak{G} = (V, \mathcal{E})$ est *connexe* si pour toute partition $V' \cup V''$ de V, $\mathcal{E} \cap (V' \times V'') \neq \varnothing$; il est *sans arbre pendant* si pour toute partition $V' \cup V''$ de V telle que $\mathcal{E} \cap (V' \times V'')$ soit un singleton, $\mathfrak{G}(V')$ et $\mathfrak{G}(V'')$ contiennent un cycle. Ainsi, lorsque V est fini, $\mathfrak{G}$ est sans arbre pendant si et seulement s'il est sans sommet pendant.

2.2. **Opérations n-aires.** L'application identique de V est notée id_V. Etant donnés un entier n, l'*injection diagonale* δ de V dans V^n associe $(x, \cdots, x)$ à chaque $x \in V$; pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, la *k-ième projection* π^k de V^n sur V associe x_k à chaque $(x_1, \cdots, x_n) \in V^n$; pour tout $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in V^n$, la *$k$-ième injection marginale* $\mu^{\mathbf{a},k}$ de V dans V^n *associée à* $\mathbf{a}$ image chaque $x \in V$ en $(a_1, \cdots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \cdots, a_n)$.

Note présentée à l'Académie des Sciences par Gustave Choquet

Etant donnée une application $F : V^n \to V$, la *k-ième application partielle* de F *associée à* $\mathbf{a}$ est la composée $F^{\mathbf{a},k} = F \circ \mu^{\mathbf{a},k}$; F est dite *idempotente* si $F \circ \delta = \mathrm{id}_V$. L'application F est une *opération n-aire* de $\mathfrak{R}$ si toutes ses applications partielles en sont des endomorphismes.

Désignons par $\mathfrak{R}^{(n)}$ la "plus petite relation" de base V^n pour laquelle les injections diagonale et marginales soient des morphismes : ainsi, pour tous n-uples $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n)$, $\mathbf{x} \sim_{\mathfrak{R}^{(n)}} \mathbf{y}$ si et seulement si, ou bien il existe $(x, y) \in \mathcal{E}$ tel que $\mathbf{x} = \delta(x)$ et $\mathbf{y} = \delta(y)$, ou bien il existe k_0 dans $\{1, \cdots, n\}$ tel que $x_{k_0} \sim_{\mathfrak{R}} y_{k_0}$ et $x_k = y_k$ pour tout $k \neq k_0$. Les opérations n-aires idempotentes de $\mathfrak{R}$ sont alors exactement les éléments idempotents de $[\mathfrak{R}^{(n)}, \mathfrak{R}]$.

Désignons par $\mathfrak{R}^n$ la *n-ième puissance catégorique* de $\mathfrak{R}$; c'est la "plus grande relation" de base V^n pour laquelle les projections soient des morphismes : $\mathbf{x} \sim_{\mathfrak{R}^n} \mathbf{y}$ si et seulement si pour tout k, $x_k \sim_{\mathfrak{R}} y_k$. Comme $\mathfrak{R}$ est réflexive, id_{V^n} est élément de $[\mathfrak{R}^{(n)}, \mathfrak{R}^n]$. Les *rétractions* de $\mathfrak{R}^n$ sur sa diagonales sont les éléments idempotents de $[\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}]$.

Definition 1. La relation $\mathfrak{R}$ est *n-fortement projective* (ou *vérifie PPH_n*) si les projections sont ses seules opérations n-aires idempotentes ; elle est *n-faiblement projective* (ou *vérifie PPC_n*) si les projections sont les seules rétractions de $\mathfrak{R}^n$ sur sa diagonale.

Noter que pour $q \leq p \leq n$, $PPH_n \Rightarrow PPH_p \Rightarrow PPC_p \Rightarrow PPC_q$. Par ailleurs, pour que $\mathfrak{R}$ vérifie PPC_2, $S\mathfrak{R}$ doit être connexe et sans arbre pendant.

2.3. **Les 2-complexes.** Pour tout ensemble X, notons $\langle\langle X \rangle\rangle$ le groupe abélien librement engendré par X ; pour toute partie B d'un groupe A, notons $\langle B \rangle$ le sous groupe de A engendré par B ; pour tous groupes A et A', notons $[[A, A']]$ l'ensemble des morphismes de A dans A'.

Etant donné un 2-*complexe* de groupes abéliens $\mathbf{\Sigma} = \Sigma_2 \xrightarrow{\partial_2} \Sigma_1 \xrightarrow{\partial_1} \Sigma_0$ ($\partial_2 \in [[\Sigma_2, \Sigma_1]]$, $\partial_1 \in [[\Sigma_1, \Sigma_0]]$ et $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$), désignons par $Z\Sigma$ le noyau de ∂_1, par $B\Sigma$ l'image de ∂_2, par Σ_* le quotient $\Sigma_1 / B\Sigma$, par $\pi : \Sigma_1 \to \Sigma_*$ la projection correspondante, et par $\Sigma_\sharp$ "le" groupe d'homologie $Z\Sigma / B\Sigma$ de $\mathbf{\Sigma}$. Pour tout $\sigma \in \Sigma_1$, nous désignerons également par $[\sigma]$ son image par π dans Σ_* ; ainsi $[\sigma] \in \Sigma_\sharp$ si et seulement si $\sigma \in Z\Sigma$.

Etant donnés deux complexes $\mathbf{\Sigma}$ et $\mathbf{\Sigma}'$, désignons par $[[[\mathbf{\Sigma}', \mathbf{\Sigma}]]]$ l'ensemble des morphismes de $\mathbf{\Sigma}'$ dans $\mathbf{\Sigma}$, c'est-à-dire des triplets $\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2) \in [[\Sigma'_0, \Sigma_0]] \times [[\Sigma'_1, \Sigma_1]] \times [[\Sigma'_2, \Sigma_2]]$ tels que $f_1 \circ \partial'_2 = \partial_2 \circ f_2$ et $f_0 \circ \partial'_1 = \partial_1 \circ f_1$. Tout élément $\mathbf{f}$ de $[[[\mathbf{\Sigma}', \mathbf{\Sigma}]]]$ donne lieu à un élément f_* de $[[\Sigma'_*, \Sigma_*]]$ de sorte que $f_* \circ \pi' = \pi \circ f_1$; la restriction de f_* à $\Sigma'_\sharp$ détermine un élément de $[[\Sigma'_\sharp, \Sigma_\sharp]]$ que nous désignerons par $f_\sharp$.

2.3.1. *"Adjonction de 2-cellules".* A toute partie C de $Z\Sigma$, associons le complexe $\mathbf{\Sigma}\langle C \rangle = \Sigma_2 \oplus \langle C \rangle \xrightarrow{\partial_2 \oplus i_{\langle C \rangle}} \Sigma_1 \xrightarrow{\partial_1} \Sigma_0$, où $i_{\langle C \rangle}$ désigne l'inclusion de $\langle C \rangle$ dans $Z\Sigma$; ainsi $B\Sigma\langle C \rangle = B\Sigma + \langle C \rangle$. Pour tout élément $\mathbf{f}$ de $[[[\mathbf{\Sigma}', \mathbf{\Sigma}]]]$ tel que $f_1(C') \subset \langle C \rangle$, $(f_0, f_1, f_2 \oplus f_1)$ est élément de $[[[\mathbf{\Sigma}'\langle C' \rangle, \mathbf{\Sigma}\langle C \rangle]]]$.

2.3.2. *L'espace des cycles de* $\mathfrak{R}$. Désignons par $\widehat{V}$ le complexe $\langle\langle V \times V \rangle\rangle \xrightarrow{\partial_2^V} \langle\langle V \times V \rangle\rangle \xrightarrow{\partial_1^V} \langle\langle V \rangle\rangle$, où $\partial_1^V(x, y) = y - x$, $\partial_2^V(x, y) = (x, y) - (y, x)$ si $x \neq y$ et $\partial_2^V(x, x) = (x, x)$. Toute application $f : V' \to V$ définit l'élément $\mathbf{f} = (f, \vec{f}, \vec{f})$ de $[[[\widehat{V'}, \widehat{V}]]]$. A chaque $\mathfrak{R}$, associons le sous complexe de $\widehat{V}$, $\widehat{\mathfrak{R}} = \langle\langle \mathcal{E} \cap \mathcal{E}^{-1} \rangle\rangle \xrightarrow{\partial_2^V} \langle\langle \mathcal{E} \rangle\rangle \xrightarrow{\partial_1^V} \langle\langle V \rangle\rangle$. Ainsi, pour tout $f \in [\mathfrak{R}', \mathfrak{R}]$, $\mathbf{f}$ est élément de $[[[\widehat{\mathfrak{R}'}, \widehat{\mathfrak{R}}]]]$; désignons par $Z_{\mathfrak{R}'}\mathfrak{R}$ l'ensemble $\{\vec{f} \cdot \sigma : f \in [\mathfrak{R}', \mathfrak{R}], \sigma \in Z\widehat{\mathfrak{R}'}\}$.

3. Réduction

Nous réduisons l'étude des opérations n-aires F de $\mathfrak{R}$ à celle des endomorphismes de $\widehat{\mathfrak{R}}_\sharp$ induits par leurs applications partielles. On perd particulièrement peu lors de cette réduction, puisque les conditions permettant de "remonter" à F sont "essentiellement" nécessaires à la projectivité (cf. lemme 3).

Dans toute la suite, $S\mathfrak{R}$ est supposé connexe, $\mathfrak{P}$ désigne une relation de base V^n telle que $\mathrm{id}_{V^n} \in [\mathfrak{R}^{(n)}, \mathfrak{P}]$, R est une partie de $Z\widehat{\mathfrak{R}}$, P est une partie de $Z\widehat{\mathfrak{P}}$ et F est un élément idempotent de $[\mathfrak{P}, \mathfrak{R}]$.

Soit $T_n = \{\vec{f} \cdot \sigma : \sigma \in Z\widehat{\mathfrak{T}_n}, f \in [\mathfrak{T}_n, \mathfrak{R}^{(n)}], \vec{f}(0, n) = \vec{\delta}(x, y), (x, y) \in \mathcal{E} \backslash \Delta_V\}$, puis $T'_n = \{\vec{f} \cdot \sigma : \sigma \in Z\widehat{\mathfrak{T}_n}, f \in [\mathfrak{T}_n, \mathfrak{R}], f(0) \neq f(n)\}$, de sorte que $\vec{F}(T_n) \subset T'_n$, puisque F "ne contracte aucune arête diagonale".

Soient $L = Z_{\mathfrak{L}}\mathfrak{R}^{(n)} \backslash \{\mu^{\vec{\mathbf{a}},k} \cdot \sigma : \sigma \in Z\widehat{\mathfrak{L}}, \mathbf{a} \in V^n, k \in \{1, \cdots, n\}\}$, $T = Z_{\mathfrak{T}_2}\mathfrak{P}$, puis $L' = Z_{\mathfrak{L}}\mathfrak{R}$ et $T' = Z_{\mathfrak{T}_2}\mathfrak{R}$; bien entendu, $\vec{F}(L) \subset L'$ et $\vec{F}(T) \subset T'$.

Lemme 1. *Si $L \subset \langle P \rangle$, alors chaque élément $\mu_\sharp^{\mathbf{x},k}$ de $[[\widehat{\mathfrak{R}}_\sharp, \widehat{\mathfrak{P}\langle P \rangle}_\sharp]]$ est indépendant de $\mathbf{x}$ (dans ce cas, noté $\mu_\sharp^k$). Si de plus $T_n \subset \langle P \rangle$, alors $\mu_\sharp^1 + \cdots + \mu_\sharp^n = \delta_\sharp$.* □

Nous omettons la preuve de ce lemme (comparer $\widehat{\mathfrak{P}\langle P \rangle}$ au 2-squelette de la n-ième puissance tensorielle et à la n-ième puissance de la réalisation topologique de $\widehat{\mathfrak{R}}$).

Corollaire 1. *Si $L' \cup T'_n \subset \langle R \rangle$, alors chaque élément $F_\sharp^{\mathbf{x},k}$ de $[[\widehat{\mathfrak{R}}_\sharp, \widehat{\mathfrak{R}\langle R \rangle}_\sharp]]$ est indépendant de $\mathbf{x}$ (dans ce cas, noté $F_{R\sharp}^k$), et $F_{R\sharp}^1 + \cdots + F_{R\sharp}^n = \mathrm{id}_{V\sharp}$.* □

4. Projectivités forte, simple et double

Proposition 1. *Si chaque endomorphisme $F_\sharp^{\mathbf{x},k}$ de $\widehat{\mathfrak{R}}_\sharp$ est indépendant de $\mathbf{x}$ (dans ce cas, noté $F_\sharp^k$) et si $F_\sharp^1 + \cdots + F_\sharp^n = \mathrm{id}_{\widehat{\mathfrak{R}}_\sharp}$, alors il existe k_0 tel que $F_\sharp^{k_0} = \mathrm{id}_{\widehat{\mathfrak{R}}_\sharp}$.*

Plan de preuve. Etant donné un cycle $c_0 \sim c_1 \sim \cdots \sim c_{\ell-1} \sim c_\ell = c_0$ de longueur minimale dans $S\mathfrak{R}$, soit $\gamma = (c_0, c_1) + (c_1, c_2) + \cdots + (c_{\ell-1}, c_\ell) \in Z\widehat{\mathfrak{R}}$. On montre dans un premier temps que pour tout k, $F_\sharp^k \cdot [\gamma] \in \{0, [\gamma], -[\gamma]\}$; cela entraîne l'existence d'un k_0 pour lequel $F_\sharp^{k_0} \cdot [\gamma] = [\gamma]$. Dans un second temps, on montre qu'étant donné $\sigma \in Z\widehat{\mathfrak{R}}$, pour chaque k différent de k_0, $F_\sharp^k \cdot [\sigma]$ est élément de $\mathbb{Z} \cdot [\gamma]$; de cela découle l'existence de $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $F_\sharp^k \cdot [\sigma] = [\sigma] + \lambda[\gamma]$; il s'agit alors de prouver que λ est nul. □

4.1. Les deux lemmes qui suivent ne présentent pas de difficulté spécifique.

Lemme 2. *Si $\mathfrak{R}$ ne contient-faiblement ni $\mathfrak{L}$ ni $\mathfrak{T}_2$, alors $L' = \{0\}$. Si $\mathfrak{R}$ ne contient-faiblement aucun $\mathfrak{T}_h$ $(h \leq n)$ ni aucun $\overrightarrow{\mathfrak{C}_\ell}$ $(\ell < n)$, alors $T'_n = \{0\}$.* □

Lemme 3. *Si le graphe $S\mathfrak{R}$ est connexe, sans arbre pendant et différent d'un cycle, alors id_V est le seul endomorphisme f de $\mathfrak{R}$ pour lequel $f_\sharp = \mathrm{id}_{\widehat{\mathfrak{R}}_\sharp}$.* □

4.2. **Projectivité forte.** Considérons ici $\mathfrak{P}$ égal à $\mathfrak{R}^{(n)}$.

Théorème 1. *Etant donné un entier $n \geq 2$, soit $\mathfrak{R}$ une relation binaire réflexive telle que $S\mathfrak{R}$ soit connexe, sans arbre pendant et ne soit pas un cycle. Si $\mathfrak{R}$ ne contient-faiblement ni $\mathfrak{L}$, ni aucun $\mathfrak{T}_h$ $(h \leq n)$, ni aucun $\overrightarrow{\mathfrak{C}_\ell}$ $(\ell < n)$, alors elle est n-fortement projective.*

En particulier, un graphe connexe, sans arbre pendant et différent d'un cycle est n-fortement projectif dès qu'il n'a pas de cycle de longueur inférieure ou égale ni à 4 ni à $n+1$.

Preuve. En considérant $R = L' \cup T'_n$, invoquer successivement le corollaire 1, le lemme 2, la proposition 1 puis le lemme 3. □

Noter que lorsque $\mathfrak{R}$ satisfait les hypothèses du théorème au fait près que $S\mathfrak{R}$ est un cycle, des énoncés ci-dessus on déduit facilement qu'étant donnée une opération binaire idempotente F, les $F^{(y,y),1}$ (par exemple) sont des rotations de $S\mathfrak{R}$ possédant chacune un point fixe (à savoir y) ; ainsi pour tout (x,y), $F(x,y) = F^{(y,y),1}(x) = x = \pi^1(x,y)$.

Notons également que, d'après ce théorème, le graphe correspondant à la réunion disjointe de deux cycles de longueur $n+1$ reliés par une unique arête vérifie PPH_{n-1} ; cependant il ne vérifie pas PPH_n.

4.3. **Projectivités simple et double.** Les résultats ci-dessus permettent d'associer des critères de projectivité à chaque complexe $\widehat{\mathfrak{P}}\langle P \rangle$ tel que $\langle P \rangle$ contienne $L \cup T_n$. Outre $\widehat{\mathfrak{R}^{(n)}}\langle T_n \cup L \rangle$, les complexes $\widehat{\mathfrak{R}^{[n]_1}}\langle T \cup L \rangle$ et $\widehat{\mathfrak{R}^{[n]_2}}\langle T \rangle$ ci-dessous s'imposent naturellement.

Definition 2. L'opération n-aire F *respecte les duels* si $x \sim_{\mathfrak{R}} F(\mathbf{z}) \sim_{\mathfrak{R}} y$ pour tous $(x,y) \in \mathcal{E}$ et $\mathbf{z} \in \{x,y\}$. Etant donné $p \in \{1, \cdots, n\}$, F est *p-serrée* si $F(\mathbf{x}) \sim_{\mathfrak{R}} F(\mathbf{y})$, lorsque $\mathbf{x} \sim_{\mathfrak{R}^n} \mathbf{y}$ et que $x_k = y_k$ pour au moins $n-p$ valeurs de k.

La relation $\mathfrak{R}$ *vérifie* PPS_n (resp. PPD_n) si les projections sont ses seules opérations n-aires idempotentes (resp. idempotentes et 2-serrées) qui respectent les duels.

On constate sans peine l'existence d'uniques relations $\mathfrak{R}^{[n]_1}$ et $\mathfrak{R}^{[n]_2}$ de base V^n telles que $\mathfrak{R}$ vérifie PPS_n (resp. PPD_n) si et seulement si les projections sont les seuls éléments idempotents de $[\mathfrak{R}^{[n]_1}, \mathfrak{R}]$ (resp. de $[\mathfrak{R}^{[n]_2}, \mathfrak{R}]$).

Théorème 2. *Etant donné un entier $n \geq 2$, soit $\mathfrak{R}$ une relation binaire réflexive telle que $S\mathfrak{R}$ soit connexe, sans arbre pendant et ne soit pas un cycle. Si $\mathfrak{R}$ ne contient pas faiblement $\mathfrak{T}_2$, alors elle vérifie PPD_n (donc elle est n-faiblement projective) ; si de plus, elle ne contient pas faiblement $\mathfrak{L}$, alors elle vérifie PPS_n (donc elle est n-affine projective —cf.* [P,R,S]*—).*

En particulier, soit $\mathfrak{G}$ un graphe connexe, sans arbre pendant et différent d'un cycle. Si $\mathfrak{G}$ ne contient pas de triangle, alors il vérifie PPD_n ; si de plus, il ne contient pas de carré, alors il vérifie PPS_n.

Preuve. Pour PPD_n, considérer $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}^{[n]_2}$, $P = T$ (en remarquant que $L \cup T_n \subset \langle T \rangle$), puis $R = T'$. Pour PPS_n, considérer $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}^{[n]_1}$, $P = L \cup T$ (en remarquant que $T_n \subset \langle T \rangle$), puis $R = L' \cup T'$. □

Pour "compléter" cet énoncé, on peut noter que les $\mathfrak{C}_\ell$ ne satisfont pas PPS_3, mais que lorsque $\ell \geq 4$, ils satisfont PPD_n pour tout entier n.

5. Extensions

On peut obtenir des conditions plus générales de projectivité en ne supposant plus R nul lors des preuves des théorèmes ci-dessus.

Disons qu'un élément de $\widehat{\mathfrak{R}}_\sharp$ est *R-principal* s'il n'appartient pas à $\langle \pi(R) \rangle$ et qu'il ne peut pas s'obtenir comme somme d'éléments tous strictements plus "courts" que lui-même. Soit $R^\perp$ le sous groupe de $Z\mathfrak{R}$ engendré par les cycles R-principaux. Disons que $\mathfrak{R}$ est *R-stable* si $R^\perp$ est canoniquement isomorphe à $Z\mathfrak{R}/\langle R \rangle$; disons que $\mathfrak{R}$ est *R-rigide* si id_V est le seul endomorphisme f de $\mathfrak{R}$ pour lequel l'endomorphisme $f_\sharp$ de $\widehat{\mathfrak{R}}_\sharp$ fixe tout élément de $R^\perp$.

La proposition 1 peut être renforcée : reprenant la conclusion du corollaire 1 sous l'hypothèse de R-stabilité (et non plus de nullité de R), on conclut à l'existence d'un indice k_0 pour lequel les endomorphismes $F_\sharp^{\mathbf{x},k_0}$ de $\widehat{\mathfrak{R}}_\sharp$ fixent tout élément de $R^\perp$.

Ainsi, les hypothèses des théorèmes peuvent être remplacées par celles de R-stabilité et de R-rigidité.

Notons qu'on peut énoncer des critères "concrets" de stabilité et de rigidité généralisant les lemmes 2 et 3. Par ailleurs, en pratique, on peut souvent "contourner" la condition de rigidité. Notons enfin que cela fournit, par exemple, l'existence de graphes qui sont n-fortement projectifs pour tout entier n.

Bibliographie

[A,P] H. Abels, M. Pouzet. *Buildings, Arrow's impossibility theorem and a projection property.* Preliminary version, January 1994.

[Chi] G. Chichilnisky. *Social Choice and the Topology of Preferences.* Advances in Mathematics 37 (1980), pp. 165-176.

[Cor] E. Corominas. *Sur les ensembles ordonnés projectifs et la propriété du point fixe.* C.R. Acad. Sci. Paris, t. 311, série I (1990) 199-204.

[D,McK,N,P] B.A. Davey, J.B. Nation, R.N. Mac Kenzie, P.P. Palfy. *Braids and their monotone clones.* Algerbra Universalis, 32 (1994), pp 153-176.

[Del1] C. Delhommé. *Propriétés de projection des graphes sans triangle ni carré.* Europ. J. Combinatorics (1996) 17, pp. 15-22.

[Del2] C. Delhommé. *Propriétés de projection.* Thèse, Université Claude Bernard, Lyon I, 1995.

[Fra] R. Fraissé. *Theory of Relations.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 118, 1986, North Holland.

[Haz] S. Hazan. *On triangle-free projective graphs.* Algerbra Universalis, 35 (1996), pp 185-196.

[Lef] S. Lefschetz. *Algebraic topology.* A.M.S. Colloquium Publications, Vol. XXVIII, 1942.

[Pou] M. Pouzet. *Small causes, big effects. A strenthening of Arrow theorem.* May 1990.

[P,R,S] M. Pouzet, I.G. Rosenberg, M.G. Stone. *A projection property.* Research paper n. 716, University of Calgary, April 1991, 44 pp.

[Weh] F. Wehrung. *Equational compactness of bi-frames and projection algebras.* Algerbra Universalis, 33 (1995), pp 478-515.

Christian Delhommé, Universität Bielefeld, SFB 343, Diskrete Strukturen in der Mathematik, Fakultät für Mathematik, Postfach 100131, 33501 Bielefeld, Germany

E-mail address: Delhomme@Mathematik.Uni-Bielefeld.de