Zweischritthomologie des Simplex und binäre Spinoren

Thomas Bier

3. Februar 1994

Zusammenfassung

Die Zweischritthomologiegruppen des Simplex $\Delta(n)$ mit binären Koeffizienten sind in kanonischer Weise F_2-modulare S_n-Darstellungen. Zunächst führen wir die Berechnung der Zweischritthomologiegruppen des Simplex durch, und betrachten das System der Untersimplizes. Dann zeigen wir, daß die Darstellung isomorph ist zu derjenigen Darstellung, die man erhält, wenn man eine gewisse Untergruppe S_n der symplektischen Gruppe einer nichtausgearteten Bilinearform über dem Körper mit zwei Elementen betrachtet. Über dem Körper mit zwei Elementen sind symplektische Gruppe und gewisse orthogonale Gruppen sowie Spingruppe und gewisse andere orthogonale Gruppen einander gleich. Falls zum Beispiel S_n bereits in einer orthogonalen Gruppe einer quadratischen Form von hyperbolischem Typ enthalten ist, so ist die Spingruppe gleich der orthogonalen Gruppe, und die betrachtete Darstellung ist nichts anderes als die Einschränkung der Spinordarstellung von Cartan-Chevalley [4] auf die Gruppe S_n.
Weiterhin erhalten wir durch den Vergleich der beiden Strukturen eine Dimensionsformel für Fixpunktmengen von Spiegelungen in der Spinordarstellung, und eine Additionsformel für gewisse Homologieklassen.

1 Die Zweischritthomologie des Simplex

1.1 Definition der Zweischritthomologie eines simplizialen Komplexes

Sei K ein simplizialer Komplex. Wir bezeichnen mit $C_q(K)$ die gewöhnlichen *mod* 2 Kettengruppen, also die Vektorräume über dem Körper F_2 mit zwei Elementen, deren Basis aus der Menge K_q aller q-punktigen Simplizes aus K besteht. Insbesondere setzen wir $C_0(K) = F_2$ mit einer Basis der leeren Menge $\emptyset$. Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß die übliche topologische Dimension von der hier gewählten Indizierung um eins verschieden ist.
Wir betrachten neben dem gewöhnlichen Einschrittrandoperator

$$\partial_q^1(\sigma) = \sum_{\theta \subset \sigma} \ (\theta \ : \ |\theta| = q-1)$$

auch ∂_q^2 als den Zweischrittoperator, der für $\sigma \in K_q$ durch

$$\partial_q^2(\sigma) = \sum_{\theta \subset \sigma} \ (\theta \ : \ |\theta| = q-2)$$

definiert ist. Offenbar sind ∂_q^i für $i = 1, 2$ lineare Abbildungen

$$\partial_q^i \ : \ C_q(K) \longrightarrow C_{q-i}(K).$$

Die Operatoren ∂_q^i erfüllen offenbar die Kongruenzen

$$\partial_q^i \circ \partial_{q+i}^i \equiv 0 \ \ mod\ 2$$

und entsprechend seien für $i = 2$ $\ {}^2SH_q(-)$ die Homologiegruppen mit Koeffizienten modulo 2 bezüglich dieses Zweischrittrandoperators. Die Homomorphismen, die wegen der Relation

$$\partial_{q-2}^1 \circ \partial_q^2 \ = \ \partial_{q-1} \circ \partial_q^1$$

durch die Abbildungen des Einschrittoperators definiert werden, seien mit

$$\partial_{q*}^1 = \partial_{q*}^1(K) : \ {}^2SH_q(K) \longrightarrow \ {}^2SH_{q-1}(K)$$

bezeichnet.

1.2 Simplizialer Join und seine Homologie

Seien K und L zwei simpliziale Komplexe. Wir bezeichnen mit $K \bullet L$ den simplizialen Join aus K und L. Es ist also

$$K \bullet L := \{(\sigma, \tau) \mid \sigma \in K; \tau \in L\} \tag{1}$$

Wir werden zunächst angeben, wie die Zweischritthomologie des Komplexes $K \bullet L$ von den ZSH-Gruppen ${}^2SH(-)$ von K und L und von deren (mod 2) Bettizahlen

$$h_p(K) = \dim\ {}^2SH_p(K) \quad \text{und} \quad h_q(L) = \dim\ {}^2SH_q(L) \tag{2}$$

sowie von den Bildern der induzierten Einschrittrandoperatoren und von deren Dimensionen

$$r_p(K) = \dim Bild\ \partial^1_{p*}(K) \text{ und } r_q(L) = \dim Bild\ \partial^1_{q*}(L) \tag{3}$$

abhängen. Die Antwort ist durch die Produkthomologie von

$$\partial^1_{p*} \otimes \partial^1_{q*}\ :\ {}^2SH_p(K) \otimes {}^2SH_q(L) \longrightarrow {}^2SH_{p-1}(K) \otimes {}^2SH_{q-1}(L) \tag{4}$$

die mit

$$H_{(p,q)}({}^2SH_*(K) \otimes {}^2SH_*(L);\ \partial^1_* \otimes \partial^1_*) = \frac{Ker\ (\partial^1_{p*} \otimes \partial^1_{q*})}{Bild\ (\partial^1_{p+1*} \otimes \partial^1_{q+1*})}$$

bezeichnet werden soll, wie folgt gegeben.

Satz 1 *(i) Es gibt einen Isomorphismus*

$$\bigoplus_{a+b=n} H_{(a,b)}({}^2SH_*(K) \otimes {}^2SH_*(L);\ \partial^1_* \otimes \partial^1_*) \cong {}^2SH_n(K \bullet L) \tag{5}$$

(ii) Es gibt einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p({}^2SH_*(K); \partial^1_*) \otimes Bild\ \partial^1_{q*} \oplus Bild\ \partial^1_{p*} \otimes H_q({}^2SH_*(L); \partial^1_*) \cong Bild\ \partial^1_{n*}(K \bullet L) \tag{6}$$

Dies wurde in [2] gezeigt.

Sei S derjenige simpliziale Komplex, der nur aus s diskreten Eckpunkten besteht. Wir bezeichnen mit $K \bullet S$ den simplizialen Join aus K und S. Insbesondere ist also für $s = 1$ $K \bullet S$ der Kegel über K und für $s = 2$ ist $K \bullet S$ die Einhängung von K. Für das Simplex gilt also insbesondere mit einem einpunktigen Komplex $S = \{p\}$ die Gleichung $\Delta(n+1) = \Delta(n) \bullet \{p\}$. In diesem Spezialfall vereinfachen sich die obigen Formeln, lassen sich auch aus elementarer homologischer Algebra herleiten und können mit einer lang exakten Sequenz beschrieben werden:

Die kurz-exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow C_q(K) \longrightarrow C_q(K \bullet S) \longrightarrow C_{q-1}(K) \oplus \ldots \oplus C_{q-1}(K) \longrightarrow 0 \tag{7}$$

(mit s Summanden) setzen sich nämlich wie üblich zu zwei lang-exakten Homologiesequenzen der Form

$$\ldots\, {}^2SH_{q+2}(K \bullet S) \longrightarrow {}^2SH_{q+1}(K) \oplus \ldots \oplus {}^2SH_{q+1}(K) \longrightarrow {}^2SH_q(K) \longrightarrow {}^2SH_q(K \bullet S) \ldots \tag{8}$$

zusammen, in welchen die Randhomomorphismen durch die Abbildungen

$$\partial^1_{q*}(K) : {}^2SH_q(K) \longrightarrow {}^2SH_{q-1}(K)$$

wie folgt induziert werden :

$$(\partial^1_*, \ldots, \partial^1_*) : {}^2SH_{q+1}(K) \oplus \ldots \oplus {}^2SH_{q+1}(K) \longrightarrow {}^2SH_q(K) \tag{9}$$

(s-fache direkte Summe). Dann ist die Zweischritthomologie des Komplexes $K \bullet S$ durch die Zweischritthomologie ${}^2SH(K)$ von K und durch die induzierten Abbildungen

$$\partial^1_{q*}(K) : {}^2SH_q(K) \longrightarrow {}^2SH_{q-1}(K)$$

in der Notation (2) (3) wie folgt gegeben.

Folgerung 1 *Als Vektorräume über dem Körper mit zwei Elementen gilt*

$$h_q(K \bullet S) = h_q(K) \; + \; s \cdot h_{q-1}(K) - r_{q+1}(K) - r_{q-1}(K) \tag{10}$$

Die induzierten Abbildungen haben die Ränge

$$r_q(K \bullet S) = h_{q-1}(K) - r_q(K) + (s-2) \cdot r_{q-1}(K) \tag{11}$$

1.3 Die Zweischritthomologie des Simplex

Hier wollen wir uns vor allem mit gewissen Symmetrieeigenschaften der Zweischritthomologiegruppen (ZSH-Gruppen) des Simplex $\Delta(n)$ beschäftigen. In [1] wurde Folgendes bereits gezeigt.

Lemma 1 *(i) Die ZSH-Gruppen des Simplex $\Delta(2m)$ sind gegeben durch*

$$ {}^2SH_q(\Delta(2m)) = \begin{cases} F_2^{2^m} & q = m \\ 0 & q \neq m \end{cases} \tag{12} $$

(ii) Die ZSH-Gruppen des Simplex $\Delta(2m+1)$ sind gegeben durch

$$ {}^2SH_q(\Delta(2m+1)) = \begin{cases} F_2^{2^m} & q = m, m+1 \\ 0 & q \neq m, m+1 \end{cases} \tag{13} $$

Der induzierte Einschrittoperator ∂^1_{m+1*} ist ein Isomorphismus von F_2- Vektorräumen.

Eine simpliziale Abbildung $f : K \longrightarrow L$ zwischen simplizialen Komplexen K und L definiert eine Kettenabbildung

$$ f_\sharp : C_q(K) \longrightarrow C_q(L) $$

welche mit dem Operator ∂^1_q kommutiert. Falls wir annehmen, daß die simpliziale Abbildung f injektiv ist, so kommutiert f auch mit dem Randoperator ∂^2_q.
Wir nehmen jetzt an, daß das Simplex $\Delta(n)$ mit der Eckpunktmenge N gegeben sei, und sei $\Delta(r)$ ein Teilsimplex mit der Eckpunktmenge R. Insbesondere definieren dann die Inklusionen

$$ i = j(R, N) : \Delta(R) \longrightarrow \Delta(N) $$

injektive simpliziale Abbildungen und induzieren somit Gruppenhomomorphismen

$$ i_* : \ {}^2SH_q(\Delta(r)) \longrightarrow \ {}^2SH_q(\Delta(n)) \tag{14} $$

Also erhalten wir die einzigen nichtverschwindenden ZSH-Inklusionsabbildungen wie folgt:

Folgerung 2 *Die induzierte Abbildung*

$$ i_* : \ {}^2SH_q(\Delta(n)) \longrightarrow \ {}^2SH_q(\Delta(n+1)) $$

ist stets die Nullabbildung außer in den Fällen

$$n = 2m \ , \ q = m \quad \textit{wo} \quad i_* \ \textit{ein Isomorphismus ist.} \tag{15}$$

$$n = 2m - 1 \ , \ q = m \quad \textit{wo} \quad i_* \ \textit{ein Monomorphismus ist.} \tag{16}$$

Beweis: Wegen Lemma 1 kann nur für $n = 2m, q = m$ oder $n = 2m-1, q = m$ die Abbildung $i_* \neq 0$ sein. Im Fall $n = 2m$ erhalten wir aus (8) mit $K = \Delta(2m)$ und $s = 1$ die lange exakte Sequenz

$$...\ {}^2SH_{m+1}(\Delta(2m)) \longrightarrow {}^2SH_m(\Delta(2m)) \longrightarrow {}^2SH_m(\Delta(2m+1))... \tag{17}$$

und somit folgt der Isomorphismus aus Lemma 1 . Im Fall $n = 2m - 1$ erhalten wir aus (8) mit $K = \Delta(2m-1)$ und $s = 1$ die lange exakte Sequenz

$${}^2SH_{m+1}(\Delta(2m-1)) \longrightarrow {}^2SH_m(\Delta(2m-1)) \longrightarrow {}^2SH_m(\Delta(2m)) \longrightarrow {}^2SH_{m-1}(\Delta(2m-1)) \tag{18}$$

und somit folgt der Monomorphismus aus Lemma 1 . □

1.4 Mayer-Vietoris Folge und relative ZSH-Gruppen

Für zwei simpliziale Komplexe K_1, K_2 auf derselben Eckpunktmenge gibt es die lange exakte Mayer-Vietoris Sequenz, welche die Homologie von K_1, K_2, $K_1 \cap K_2$ und $K_1 \cup K_2$ miteinander in Beziehung setzt:

$$...\ {}^2SH_q(K_1 \cap K_2) \longrightarrow {}^2SH_q(K_1) \oplus {}^2SH_q(K_2) \longrightarrow {}^2SH_q(K_1 \cup K_2) \xrightarrow{\beta} {}^2SH_{q-2}(K_1 \cap K_2)... \tag{19}$$

Hieraus folgt unter der Voraussetzung ${}^2SH_q(K_1 \cap K_2) = 0$, daß für die Bilder der induzierten Inklusionsabbildungen $i_k : K_k \longrightarrow K_1 \cup K_2$ in der Gruppe ${}^2SH_q(K_1 \cup K_2)$ gilt :

$$\text{Bild } i_{1*} \cap \text{Bild } i_{2*} = 0. \tag{20}$$

Wir nehmen andererseits an, der Unterkomplex $K \subset M$ sei gegeben. Dann gibt es die lang exakte Folge für die relativen Homologiegruppen des Paares (M, K) :

$$... \longrightarrow {}^2SH_q(K) \longrightarrow {}^2SH_q(M) \longrightarrow {}^2SH_q(M, K) \xrightarrow{\gamma} {}^2SH_{q-2}(K)... \tag{21}$$

1.5 Das Schnittverhalten von Teilsimplizes

Lemma 2 *Für zwei verschiedene Inklusionen* $i_1 \neq i_2$

$$i_1, i_2 : \Delta(2m-1) \longrightarrow \Delta(2m)$$

gilt auf dem ZSH-Niveau :

$$\begin{aligned} \mathit{Bild}(i_{1*}) \oplus \mathit{Bild}(i_{2*}) &= {}^2SH_m(\Delta(2m)) && (22) \\ \mathit{Bild}(i_{1*}) \cap \mathit{Bild}(i_{2*}) &= 0 && (23) \end{aligned}$$

Beweis: Wegen ${}^2SH_m(\Delta(2m-2)) = 0$ und ${}^2SH_{m-2}(\Delta(2m-2)) = 0$ reduziert sich die Sequenz (19) auf den Isomorphismus

$${}^2SH_m(\Delta(2m-1)) \oplus {}^2SH_m(\Delta(2m-1)) \cong {}^2SH_m(\Delta(2m-1) \cup \Delta(2m-1))$$

von Vektorräumen der Dimension 2^m. Weiterhin kann man für die Inklusionsabbildung $j : \Delta(2m-1) \cup \Delta(2m-1) \to \Delta(2m)$ die relative Homologiegruppe
${}^2SH_q(\Delta(2m), \Delta(2m-1) \cup \Delta(2m-1))$ leicht bestimmen:

$${}^2SH_q(\Delta(2m), \Delta(2m-1) \cup \Delta(2m-1)) \cong {}^2SH_{q-2}(\Delta(2m-2))$$

woraus man mit Lemma 1 und (21) findet, daß j_* ein Isomorphismus ist. Also folgen aus (20) die Formeln (23) und (22). □

Insbesondere gelten dieselbe Schlußfolgerung (23) auch für zwei Inklusionen $i_1, i_2 : \Delta(2m-1) \longrightarrow \Delta(2m+1)$ mit $i_1(\Delta(2m-1)) \cup i_2(\Delta(2m-1)) \neq \Delta(2m+1)$.

Der Fall von zwei verschiedenen Inklusionen $j_1, j_2 : \Delta(2m-1) \longrightarrow \Delta(2m+1)$ mit $j_1(\Delta(2m-1)) \cup j_2(\Delta(2m-1)) = \Delta(2m+1)$ ist komplizierter. Bezeichne mit $\Delta_k(2m-1)$ $k = 1, 2$ zwei Kopien des Simplex $\Delta(2m-1)$ und seien jetzt $i_k : \Delta_1 \cap \Delta_2 \longrightarrow \Delta_k(2m-1)$ die Inklusionen des Durchschnitts $\Delta(2m-3) = \Delta_1 \cap \Delta_2$. Dann hat man das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} {}^2SH_m(\Delta_1(2m-1)) & \xrightarrow{j_{1*}} & {}^2SH_m(\Delta(2m+1)) & \xleftarrow{j_{2*}} & {}^2SH_m(\Delta_2(2m-1)) \\ \partial^1_{m*} \downarrow\cong & & & & \cong\downarrow \partial^1_{m*} \\ {}^2SH_{m-1}(\Delta_1(2m-1)) & \xleftarrow{i_{1*}} & {}^2SH_{m-1}(\Delta(2m-3)) & \xrightarrow{i_{2*}} & {}^2SH_{m-1}(\Delta_2(2m-1)) \end{array} \qquad (24)$$

Lemma 3 *Mit diesen Notationen gilt die folgende Gleichheit:*

$$j_{1*}[(\partial^1_{m*})^{-1}(\text{Bild } i_{1*})] = j_{2*}[(\partial^1_{m*})^{-1}(\text{Bild } i_{2*})] \qquad (25)$$

Beweis: Sei $[x_{m-1}] \in {}^2SH_{m-1}(\Delta(2m-3))$ mit $\partial^2_{m-1}(x_{m-1}) = 0$. Wir wollen die Notation für $\Delta(2m+1) - \Delta(2m-3)$ so wählen, daß $\Delta_1(2m-1) = \Delta(2m-3) \cup \{a,b\}$ und $\Delta_2(2m-1) = \Delta(2m-3) \cup \{c,d\}$ ist. Dann gelten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \partial^2_{m+1}[x_{m-1}|ab] &= x_{m-1} + [\partial^1_{m-1}x_{m-1}|ab] && (26)\\ \partial^1_m[x_{m-1}|a+b] &= [\partial^1_{m-1}x_{m-1}|a+b] && (27)\\ \partial^2_m[x_{m-1}|a+b] &= 0 && (28) \end{aligned}$$

Also erhalten wir die ∂^2-Homologien

$$i_1x_{m-1} \sim \partial^1_m[x_{m-1}|a+b] \quad i_2x_{m-1} \sim \partial^1_m[x_{m-1}|c+d].$$

Also gilt $\partial^1_{m*}[x_{m-1}|a+b] = i_{1*}[x_{m-1}]$ und entsprechend für i_{2*}.
Man berechnet dann ebenfalls

$$\partial^2_{m+2}[x_{m-1}|abc+abd+acd+bcd] = [x_{m-1}|a+b+c+d]$$

und somit erhält man die ∂^2-Homologie

$$j_1[x_{m-1}|a+b] \sim j_2[x_{m-1}|c+d]$$

aus denen die Gleichung (25) unmittelbar folgt. □

Nun ist i_{1*}, j_{1*} injektiv, und aus (25) folgt

$$j_{1*}[(\partial^1_{m*})^{-1}(\text{Bild } i_{1*})] \subseteq \text{Bild } (j_{1*}) \cap \text{Bild } (j_{2*}) \tag{29}$$

woraus wegen (13) die Ungleichung

$$\dim(\text{Bild } j_{1*} \cap \text{Bild } j_{2*}) \geq 2^{m-2} \tag{30}$$

folgt.

Lemma 4 *Für $k = 1,2$ gilt die folgende Gleichheit:*

$$(\partial^1_{m*})(j_{k*})^{-1}(\text{Bild } j_{1*} \cap \text{Bild } j_{2*}) = \text{Bild } i_{k*} \tag{31}$$

Beweis: Die Inklusion $\supseteq$ folgt sofort aus (29). Die Inklusion $\subseteq$ folgt aus der Mayer-Vietoris Sequenz des Komplexes $\Delta_1(2m-1) \cup \Delta_2(2m-1)$. Falls nämlich $z_m(k) \in \text{Bild} j_{k*}$ $\partial^2_{m+2}-$homologe ∂^2_m-Zykeln sind, so sind auch

$\partial^1_m(z_m(k))$ mit $k = 1, 2$ $\partial^2_{m+1}-$homolog, und die Homologieklasse dieser Zykeln $[\partial^1_m(z_m(1))] = [\partial^1_m(z_m(2))]$ ist ein typisches Element der Gruppe

$$(\partial^1_{m*})(j_{k*})^{-1}(\text{Bild } j_{1*} \cap \text{Bild } j_{2*}).$$

In anderen Worten : $\partial^1_m(z_m(k))$ sind zwei Zykeln in ${}^2SH_{m-1}(\Delta_k(2m-1))$, welche unter Inklusion nach $\Delta_1(2m-1) \cup \Delta_2(2m-1)$ auf denselben Zykel abgebildet werden. Aus der Exaktheit der Mayer-Vietoris Folge (19) mit $K_k = \Delta_k(2m-1)$ und $K_1 \cap K_2 = \Delta(2m-3)$ folgt dann die Existenz eines Zykels $[y_{m-1}]$ in ${}^2SH_m(\Delta(2m-3))$ mit $i_{k*}([y_{m-1}]) = [\partial^1_m(z_m(k))]$ für $k = 1, 2$. Also ist $[\partial^1_m(z_m(k))] \in$ Bild i_{k*} . $\square$
Als Konsequenz erhalten wir sofort für $k = 1, 2$:

$$\dim(\text{Bild } j_{1*} \cap \text{Bild } j_{2*}) \;=\; \dim \text{Bild } i_{k*} = 2^{m-2} \tag{32}$$

Außerdem gilt in (29) die Gleichheit:

$$j_{1*}[(\partial^1_{m*})^{-1}(\text{Bild } i_{1*})] \;=\; \text{Bild } (j_{1*}) \cap \text{Bild } (j_{2*}) \tag{33}$$

Wir werden im Folgenden die Notation $\Delta(N)$ für ein Simplex auf der Eckpunktmenge N und für $M \subset N$ die Inklusionsabbildungen

$$j(M, N) : \Delta(M) \longrightarrow \Delta(N) \tag{34}$$

verwenden.
Sei N mit $|N| = 2m+1$ die Menge der Eckpunkte eines Simplex $\Delta(2m+1) = \Delta(N)$ und seien N_i mit $|N_i| = 2m-1$ für $i = 1, 2, ..., s$ Teilsimplizes $j(N_i, N) : \Delta(N_i) \to \Delta(N)$ mit der Eigenschaft

$$\mid N_1 \cap N_2 \cap ..... \cap N_s \mid = 2m + 1 - 2s \tag{35}$$

Setze $N_{ij} = N_i \cap N_j$. Dann gilt :

Lemma 5 *Unter diesen Voraussetzungen gilt :*

$$\text{Bild } j(N_1, N)_* \cap .... \cap \text{Bild } j(N_s, N)_* = \tag{36}$$

$$j(N_1, N)_*(\partial^1_{m*})^{-1}[\text{Bild } j(N_{12}, N_1)_* \cap .... \cap \text{Bild } j(N_{1s}, N_1)_*]$$

Beweis: Durch Induktion über $s \geq 2$ (bei beliebigem m). Wir verwenden dabei die folgenden elementaren Tatsachen: Wenn $f : V \to W$ eine injektive lineare Abbildung ist, und $A, B \subset V$ sowie $X, Y \subset \text{Bild} f$, so gilt :

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)\ ,\ f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)\ ,\ f(A) = X \Leftrightarrow A = f^{-1}(X) \tag{37}$$

Für $s = 2$ ist (36) gerade die Formel (33). Für $s > 2$ wenden wir die Induktionsvoraussetzung und (37) zweimal an :

$$\begin{aligned} \text{Bild } j(N_1, N)_* \cap .... \cap \text{Bild } j(N_{s-1}, N)_* \cap \text{Bild } j(N_s, N)_* &\subseteq \\ \text{Bild } j(N_1, N)_* \cap \text{Bild } j(N_1, N)_* \cap .... \cap \text{Bild } j(N_{s-1}, N)_* &= \\ j(N_1, N)_*(\partial^1_{m*})^{-1}[\text{Bild } j(N_{12}, N_1)_* \cap .... \cap \text{Bild } j(N_{1(s-1)}, N_1)_*] \end{aligned}$$

Genauso gilt

$$\begin{aligned} \text{Bild } j(N_1, N)_* \cap .... \cap \text{Bild } j(N_{s-1}, N)_* \cap \text{Bild } j(N_s, N)_* &\subseteq \\ \text{Bild } j(N_1, N)_* \cap \text{Bild } j(N_3, N)_* \cap .... \cap \text{Bild } j(N_s, N)_* &= \\ j(N_1, N)_*(\partial^1_{m*})^{-1}[\text{Bild } j(N_{13}, N_1)_* \cap .... \cap \text{Bild } j(N_{1s}, N_1)_*] \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich zusammen mit (37) die Inklusion $\subseteq$ in (36).
Umgekehrt argumentiert man ganz ähnlich. □

Lemma 6 *Sei N mit $|N| = 2m+1$ die Menge der Eckpunkte eines Simplex $\Delta(2m + 1) = \Delta(N)$ und seien N_i mit $|N_i| = 2m - 1$ für $i = 1, 2, ..., s$ Teilsimplizes $j(N_i, N) : \Delta(N_i) \to \Delta(N)$ mit der Eigenschaft*

$$| \ N_1 \cap N_2 \cap ..... \cap N_s \ | = 2m + 1 - 2s \tag{38}$$

Setze zur Abkürzung für $I \subset \{1, 2, ..., s\}$ $N_I = \bigcap_{i \in I} N_i$. Der Durchschnitt (36) ist auch darstellbar als

$$\text{Bild } j(N_1, N)_* \ \cap \ \text{Bild } j(N_2, N)_* \ \cap .... \cap \ \text{Bild } j(N_s, N)_* \ = \tag{39}$$

$$j(N_1, N)_*(\partial^1_{m*})^{-1} j(N_{12}, N_1)_*(\partial^1_{m-1*})^{-1} j(N_{123}, N_{12})_* ... (\partial^1_{m-s+2*})^{-1} \text{Bild } j(N_{12..s}, N_{12...s-1})_*$$

Der Beweis des Lemmas erfolgt durch vollständige Induktion über die Zahl s unter $(s - 1)$-maliger Benutzung von Lemma 5. □

Satz 2 *Die Voraussetzungen seien gegeben wie in Lemma 6 . Für den F_2-Unterraum*

$$\text{Bild } j(N_1, N)_* \cap \text{Bild } j(N_2, N)_* \cap .... \cap \text{Bild } j(N_s, N)_* \tag{40}$$

von ${}^2SH_m(\Delta(2m + 1))$ gilt die Dimensionsformel

$$\dim[\text{Bild } j(N_1, N)_* \cap \text{Bild } j(N_2, N)_* \cap .... \cap \text{Bild } j(N_s, N)_*] = 2^{m-s} \tag{41}$$

Insbesondere ist für $s = m$ der Durchschnitt in (40) durch ein eindeutig bestimmtes nichtverschwindendes Element gekennzeichnet.

Der Beweis ergibt sich aus den Lemmas 1 und 6 sowie Folgerung 2. □
Im Falle $s = m$ sind die Durchschnitte der Form (40) offenbar in eineindeutiger Beziehung mit den Partitionen $\mathcal{Q}$ der Menge $\{0, 1, 2, ..., 2m - 1\} = Q_1 \cup ... \cup Q_m$ in m disjunkte 2-Teilmengen. Jeder solchen Partition entspricht also ein eindeutig bestimmtes Element $s(\mathcal{Q}) \in {}^2SH_m(\Delta(2m + 1))$, welches den Durchschnitt

$$\{0, s(\mathcal{Q})\} = \text{Bild } j(N_1, N)_* \cap \text{Bild } j(N_2, N)_* \cap .... \cap \text{Bild } j(N_m, N)_* \quad (42)$$

erzeugt. Wir wollen das System aller Elemente der Form $s(\mathcal{Q})$ das *Cartan-Chevalley-System* von ${}^2SH_m(\Delta(2m + 1))$ nennen.

1.6 Elementare Zykeln

Die Menge aller Eckpunkte des Simplex $\Delta(2m)$ sei in zwei gleichmächtige disjunkte Teilmengen $\{i_1, i_2, ..., i_m\}$ und $\{j_1, j_2, ..., j_m\}$ eingeteilt. Dann ist die Kette

$$\sum a_1 a_2 ... a_m \text{ mit } a \in \{i, j\} \quad (43)$$

ein ∂_m^2-Zykel in $C_m(\Delta(2m))$. Wir wollen (43) einen *elementaren Zykel* nennen. Der von allen elementaren Zykeln von ${}^2SH_m(\Delta(2m))$ erzeugte F_2−Unterraum werde mit $EZ_m(2m)$ oder auch für $T = \{1, 2, ..., 2m\}$ mit $EZ_m(T)$ bezeichnet. Dann gilt

Satz 3 *Die Dimension des Raums der elementaren Zykel $EZ_m(2m)$ in ${}^2SH_m(\Delta(2m))$ ist gegeben als*

$$\dim EZ_m(2m) = 2^{m-1}$$

Der Raum der elementaren Zykeln ist ein S_{2m}-invarianter Unterraum von ${}^2SH_m(\Delta(2m))$. Er hat trivialen Durchschnitt mit jedem Unterraum der Form Bild $j(M, T)_*$ mit $T = \{1, 2, ..., 2m\}$ und $M \subset T$.

Betrachte jetzt die Mengen $T = \{1, 2, ..., 2m\}$ und $N = \{1, 2, ..., 2m, 2m+1\}$ sowie den mit der induzierten S_{2m}-Operation versehenen F_2-Raum

$$j(T, N)_*(EZ_m(T)) \subset {}^2SH_m(\Delta(N)).$$

Dann gilt für die Inklusionen $j(M, N)$ mit $|M| = 2m - 1$:

$$\dim j(T, N)_*(EZ_m(T)) \cap \text{Bild } j(M, N)_* = \begin{cases} 0 & \text{für } M \subset T \\ 2^{m-2} & \text{für } M \not\subset T \end{cases} \quad (44)$$

Das System

$$U(M\cap T)=j(T,N)_*^{-1}(\mathrm{Bild} j(M,N)_*)\cap EZ_m(T)$$

ist also eine Menge von $\binom{2m}{2}$ Unterräumen der Dimension 2^{m-2}, welche durch die Mengen $S=M\cap T$ indiziert sind und welche eine Dimensionsformel analog zu Satz 2 erfüllen. Für $S_1,...,S_r$ $(r<m)$ mit $|S_i|=2m-2$ und $|S_1\cap...\cap S_r|=2m-2r$ gilt also :

$$\dim(\ U(S_1)\cap U(S_2)\cap...\cap U(S_r)\ )=2^{m-r-1} \tag{45}$$

Dies ersieht man jetzt leicht aus den Sätzen 2 und 3 .
Es gilt weiterhin für jede Partition $\mathcal{P}$ von $\{1,2,...,2m\}$ in m 2-Teilmengen $P_1,P_2,...,P_m$ die Formel

$$U(S_1)\cap....\cap U(S_{m-1})=U(S_1)\cap...\cap U(S_{m-1})\cap U(S_m) \tag{46}$$

mit $S_i=T-P_i$.
Wegen (45) und (46) definiert jede solche Partition $\mathcal{P}$ ein eindeutig bestimmtes nichttriviales Element $s(\mathcal{P})$

$$\{0,s(\mathcal{P})\}=U(S_1)\cap...\cap U(S_{m-1})\cap U(S_m) \tag{47}$$

das den Durchschnitt in (46) erzeugt. Das System der Unterräume $U(S)$ von $EZ_m(2m)$ entspricht gerade dem System der $\binom{2m}{2}$ Unterräume Bild $j(M,N)_*$ und $j(R,N)_*(EZ_m(T))$ mit $|N|=2m-1$ und $|M|=|R|-1=2m-3$.

Aus der Natürlichkeit der Inklusionsabbildung ergibt sich :

Folgerung 3 *Die Operation der symmetrischen Gruppe S_{2m+1} auf dem F_2- Vektorraum $^2SH_m(\Delta(2m+1))$ ist in kanonischer Weise die Einschränkung einer Operation der Gruppe S_{2m+2}.*

1.7 Addierbare Partitionen

Seien $\mathcal{Q}=Q_1...Q_m$ und $\mathcal{R}=R_1...R_m$ zwei Partitionen von $\{0,1,2,...,2m-1\}$ in m disjunkte $2-$Teilmengen. Dann sollen $\mathcal{Q}\neq\mathcal{R}$ *addierbar* heißen falls es eine Bijektion

$$f:\{1,2,...,m\}\longrightarrow\{1,2,...,m\}$$

gibt mit $R_i = Q_{f(i)}$ für $1 \leq i \leq m-2$, aber $R_{m-1} \neq Q_{f(m-1)}$ und $R_m \neq Q_{f(m)}$. Seien A, B diejenigen $2-$Teilmengen, die zusammen mit R_{m-1}, R_m und $Q_{f(m-1)}, Q_{f(m)}$ die sechs $2-$Teilmengen der $4-$Menge $R_{m-1} \cup R_m$ ausmachen; also

$$(R_{m-1} \cup R_m)^{(2)} = \{A, B, R_{m-1}, R_m, Q_{f(m-1)}, Q_{f(m)}\}$$

Dann ist $\mathcal{S}$ die *Summe von* $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{R}$ definiert als die Partition

$$\mathcal{Q} + \mathcal{R} = \mathcal{S} = R_1 \cup ..... \cup R_{m-2} \cup A \cup B \tag{48}$$

Mit dieser Bezeichnung gilt dann

Satz 4 *Seien $\mathcal{Q}, \mathcal{R}$ zwei addierbare Partitionen mit Summe $\mathcal{S}$ und seien $s(\mathcal{Q}), s(\mathcal{R}), s(\mathcal{S}) \in {}^2SH_m(\Delta(2m+1))$ die zugehörigen Homologieklassen. Dann gilt in der Gruppe ${}^2SH_m(\Delta(2m+1))$ die Additionsformel*

$$s(\mathcal{S}) = s(\mathcal{Q}) + s(\mathcal{R}) \tag{49}$$

Insbesondere sind die Elemente $s(\mathcal{Q})$ und $s(\mathcal{R})$ voneinander verschieden, falls die Partitionen $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{R}$ verschieden sind.

Der Beweis kann wegen der Gleichung (39) auf den trivialen Fall von drei Inklusionen der Form

$$j(i, 123)_* : {}^2SH_1(\Delta(1)) \longrightarrow {}^2SH_1(\Delta(3))$$

zurückgespielt werden. Für diesen trivialen Fall ist die Formel wegen der mod 2-Homologie $\partial_3^2(123) = 1 + 2 + 3$ offensichtlich. $\Box$

Folgerung 4 *Das System $\{s(\mathcal{Q})\}$ in der Gruppe ${}^2SH_m(\Delta(2m+1))$ hat $3 \cdot 5... \cdot (2m+1)$ Elemente.*
Das System $\{s(\mathcal{P})\}$ in der Gruppe $EZ_m(2m)$ hat $3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2m-1)$ Elemente.

1.8 Das Cartan-Chevalley-System ist Erzeugendensystem

Sei $\mathcal{P}$ eine $2-$Partition von $M = \{0, 1, .., 2m-1\}$ und sei $\mathcal{Q}$ die $2-$Partition von $N = \{0, 1, ..., 2m, 2m+1\}$, welche aus $\mathcal{P}$ durch das Hinzufügen von $\{2m, 2m+1\}$ entsteht. Dann besteht zwischen den Elementen
$s(\mathcal{P}) \in {}^2SH_{m-1}(\Delta(2m-1))$ und $s(\mathcal{Q}) \in {}^2SH_m(\Delta(2m+1))$ folgende Beziehung :

$$j(M, N)_*(\partial^1_{m*})^{-1} s(\mathcal{P}) = s(\mathcal{Q}) \tag{50}$$

Das folgt sofort aus der Definition von $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ und Lemma 6 .

Satz 5 *Das Cartan-Chevalley-System $\{s(Q)\}$ aus (42) ist ein additives Erzeugendensystem der Homologiegruppe $^2SH_m(\Delta(2m+1))$.*

Beweis: Durch Induktion nach m. Für $m = 2$ besteht das C-C-System nach Folgerung 4 aus genau 15 verschiedenen und somit allen nichtverschwindenden Elementen der Gruppe $^2SH_2(\Delta(5))$. Nach Lemma 2 gibt es eine Zerlegung der Form

$$\text{Bild}(i_{1*}) \oplus \text{Bild}(i_{2*}) = \; ^2SH_m(\Delta(2m))$$

und die beiden direkten Summanden sind nach Induktionsvoraussetzung von den jeweiligen C-C-Systemen erzeugt. Durch weitere Inklusion nach $\Delta(2m+1)$ und anwenden der Gleichung (50) erhält man den Induktionsschritt. □

2 Binäre Spinoren

2.1 Quadratische Formen über F_2 und ihre Graphen und Gruppen

Sei Q eine nichtausgeartete quadratische Form über dem Körper F_2 mit zwei Elementen. Q vermittelt eine Abbildung $Q : V = F_2^{2m} \to F_2$. Sei $B(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ die zugehörige bilineare Form. Es ist bekannt [5] daß bis auf Isomorphie von quadratischen Räumen Q eine der beiden folgenden Formen hat :

$$Q^+ = Q^+(x_1, ..., x_{2m}) = x_1x_2 + x_3, x_4 + .. + x_{2m-1}x_{2m} \tag{51}$$
$$Q^- = Q^-(x_1, ..., x_{2m}) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_3x_4 + .. + x_{2m-1}x_{2m} \tag{52}$$

Die zugehörigen orthogonalen bzw. symplektischen Gruppen seien mit

$$O_{2m}^+(F_2), O_{2m}^-(F_2), Sp_{2m}(F_2) \cong O_{2m+1}(F_2)$$

bezeichnet. Diese Gruppen enthalten die folgenden speziellen Transvektionen: Für $v \in V = F_2^{2m} - \{0\}$ sei s_v definiert durch

$$s_v(x) = x + B(x,v)v \tag{53}$$

Dann ist $s_v \in Sp_{2m}(F_2)$ und falls $Q(v) = 1$ ist, dann ist $s_v \in O_{2m}^\pm(F_2)$. Die folgenden Rechenregeln sind dann leicht zu verifizieren :

$$s_v \circ s_w = s_w \circ s_v \quad \text{falls} \quad B(v,w) = 0 \tag{54}$$
$$s_w \circ s_v \circ s_w = s_v \circ s_w \circ s_v = s_{v+w} \quad \text{falls} \quad B(v,w) = 1 \tag{55}$$

Sei nun $V_0(2m)$ der Graph mit Eckpunktmenge $F_2^{2m} - \{0\}$ und den Kanten $\{x, y\}$, $B(x, y) = 0$, $x \neq y$. Es ist bekannt [9] daß die maximale Zahl von unabhängigen Punkten in dem Graphen $V_0(2m)$ gerade $2m + 1$ beträgt, und daß Cocliquen $v_1, v_2, ..., v_{2m+1}$ mit $B(v_i, v_j) = 1 \ \forall i \neq j$ auch wirklich existieren. Das zugehörige System von Transvektionen sei $s_i = s_{v_i}$ $(1 \leq i \leq 2m + 1)$. Setze $s_0 = 1$. Dann definiert das System $t_i = s_{i-1} \circ s_i \circ s_{i-1}$ $(1 \leq i \leq 2m + 1)$ welches die in [8] Seite 274 angegebenen Relationen erfüllt, wie man mit (54) (55) sofort verifiziert, eine symmetrische Untergruppe der Form

$$S_{2m+2} = \langle t_1, t_2, ..., t_{2m+1} \rangle \subset Sp_{2m}(F_2). \tag{56}$$

Genauso kann man die induzierten Untergraphen $Alt^{\pm}(2m)$ betrachten, deren Eckpunktmengen gerade $\{a \in F_2^{2m} \mid Q(a) = 1\}$ und deren Kanten wie oben definiert sind. Die maximale Anzahl $n \leq 2m+1$ der Elemente einer Coclique der Form $\{v_1, ..., v_n\}$ in $Alt^{\pm}(2m)$ ist bekannt [9], und man erhält insbesondere für ungerades $m \equiv 1 \bmod 2$ die Untergruppen

$$S_{2m+2} = \langle s_1, ..., s_{2m+1} \rangle \subset O_{2m}^{e}(F_2) \text{ mit } e = (-1)^{\frac{m+1}{2}} \tag{57}$$

Diese Untergruppen wurden bereits von Dickson [6] konstruiert. Es ist bekannt [7], daß diese Untergruppen in $O_{2m}^{\pm}(F_2)$ maximal und selbstnormalisierend sind.

2.2 Die Spinordarstellungen

Es ist bekannt [4] Abschnitte II.3 und II.4 , daß die orthogonalen Gruppen über dem Körper F_2 isomorph zu ihren Spinorgruppen sind. Diese Spinorgruppen besitzen genauso wie die sie enthaltende einfache Cliffordalgebra eine eindeutige irreduzible Darstellung über dem Grundkörper. Daher besitzen die orthogonalen Gruppen eine F_2-modulare Darstellung in einem F_2-Vektorraum S der Dimension $\dim S = 2^m$. Wir werden diese Darstellung im folgenden einfach die Spinordarstellung der orthogonalen Gruppen $O_{2m}^{\pm}(F_2)$ bzw. durch Einschränkung auch die Spinordarstellung der symmetrischen Untergruppen S_{n+1} dieser orthogonalen Gruppen nennen, und sie mit ρ bezeichnen.
Wir betrachten jetzt die Fixräume der Transvektionen s_a mit $Q(a) = 1$ in der Spinordarstellung, also die Räume

$$Fix(a) = \{x \in S \mid \rho(s_a)x = x\}. \tag{58}$$

Für diese Fixräume gelten analoge Formeln wie für die Zweischritthomologiegruppen von Teilsimplizes. Genauer haben wir:

Lemma 7 *Es gilt die Dimensionsformel* $\dim(Fix(a)) = 2^{m-1}$.
Die Dimensionen der Durchschnitte der Räume $Fix(a)$ *sind wie folgt gegeben:*

$$\dim Fix(a) \cap Fix(b) = 0 \quad \textit{für} \quad Q(a+b) = 1 \tag{59}$$
$$\dim Fix(a) \cap Fix(b) = 2^{m-2} \quad \textit{für} \quad Q(a+b) = 0 \tag{60}$$

Beweis: Wir zeigen dies hier nur für den Fall $Q = Q^+$. In diesem Fall ist der quadratische Raum V gegeben als $V = W \times W^*$, wobei W^* das kanonische F_2-Dual von W mit einer Basis $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ ist; und die quadratische Form ist durch $Q(w, \lambda) = \lambda(w)$ für $w \in W$ und $\lambda \in W^*$ gegeben. Dann findet man für den Fixraum von $a = (w, \lambda)$ mit $\lambda(w) = 1$ den Ausdruck

$$Fix(a) = (1 + w) \cdot \Lambda(Ker\lambda) \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_m \tag{61}$$

wo $\Lambda(Ker\lambda)$ die äußere Algebra auf $Ker(\lambda)$ ist und die Produkte in der Clifford-Algebra zu nehmen sind. Die Formel (61) kann man leicht verifizieren. Daraus folgt offenbar die erste Dimensionsformel.
Die Formel (59) kann man ebenfalls leicht einsehen. Es ist nähmlich in der Clifford-Algebra in Charakteristik 2 $ab + ba = 1$, also

$$ax = x \text{ und } bx = x \quad \Rightarrow x = abx + bax = x + x = 0.$$

Die Formel (60) folgt ähnlich wie die erste Formel. □
Nun ist im Falle der orthogonalen Gruppe $O^+_{2m}(F_2)$ die Darstellung ρ im Raum der Spinoren $S \cong F_2^{2^m}$ in [4] Kapitel III Abschnitte 1 und 2 ganz explizit beschrieben worden. Insbesondere zerfällt der Raum der Spinoren in zwei gleich große Teile, in die Räume der geraden und der ungeraden Spinoren, also $S = S_{ger} \oplus S_{ung}$. Dann ist offenbar auch

$$Fix(a) = \{x + ax \mid x \in S_{ger}\} \;=\; \{y + ay \mid y \in S_{ung}\}. \tag{62}$$

Durch die Festsetzung

$$O_{2m-1}(F_2) = \langle\, s_b \mid B(a,b) = 0\ ,\ a \neq b \rangle\ \subset O^+_{2m}(F_2) \tag{63}$$

wird eine Untergruppe definiert, von der bekannt ist, daß für sie die Isomorphie

$$Sp_{2m-2}(F_2) \cong O_{2m-1}(F_2)$$

besteht. Die Einschränkung der Darstellung ρ von $O^+_{2m}(F_2)$ auf diese Untergruppe ist keine einfache Darstellung, sondern sie hat den invarianten Teilmodul

$Fix(a)$ und einen entsprechenden Quotientenmodul $S/Fix(a)$. Die beiden so entstehenden Darstellungen sollen dann die irreduziblen *Spinordarstellungen* der Gruppe $Sp_{2m-2}(F_2)$ genannt werden. Die Darstellung von $Sp_{2m-2}(F_2)$ auf den Vektoren ist dabei gerade die auf dem Quotientenraum $a^{\perp}/a$ induzierte. Eine entsprechende Konstruktion ist auch für $O^{-}_{2m}(F_2)$ möglich, aber das soll hier nicht ausgeführt werden.

2.3 Spezielle Bahnen der Spinordarstellung und Isotrope Unterräume

Es folgt aus den Resultaten von [4] Abschnitt III.1 und III.2 , daß die Spinordarstellung der orthogonalen Gruppe $O^{+}_{2m}(F_2)$ einen Orbit enthält, dessen Elemente in Bijektion mit den maximalen isotropen Unterräumen von F_2^{2m} stehen. Man kann jedem maximalen isotropen Unterraum Z in F_2^{2m} einen Spinor $s(Z) \in S$ zuordnen derart, daß für jedes invertierbare Element $c \in Cliff(V)$ mit $\rho(c) \in O^{+}_{2m}(F_2)$ die folgende Äquivalenz gilt :

$$c \cdot W \cdot c^{-1} = Z \;\Leftrightarrow\; \rho(c) \cdot s(W) = s(Z) \tag{64}$$

Insbesondere ist die Zuordnung $Z \mapsto s(Z)$ injektiv. Mit den im vorigen Abschnitt eingeführten Bezeichnungen kann man die spezielle Darstellung $S = Cliff(V) \cdot \lambda_1 ... \lambda_m$ wählen. Dann ist speziell $s(W) = 1$.
Die Spinoren der Form $s(Z)$ werden nach [4] auch *reine Spinoren* genannt. Je nach der Parität der Zahl $\dim(Z \cap W)$ wird der Spinor $s(Z)$ ein gerader oder ungerader Spinor genannt; entsprechend wollen wir den maximalen isotropen Raum Z (bei fest gewähltem maximalen isotropen Raum W) auch gerade oder ungerade nennen. Dann gilt :

Lemma 8 *Zu jedem isotropen Unterraum $H \subset V$ der Dimension* $\dim H = m-1$ *gibt es genau einen geraden Z_1 und einen ungeraden Z_2 maximalen isotropen Unterraum mit $H \subset Z_i$. Die Zuordnung $s(H) := s(Z_1) + s(Z_2)$, die jedem isotropen Unterraum H der Dimension $m-1$ ein Element $s(H)$ zuordnet, ist injektiv.*

Wir wollen die Spinoren des Typs $s(H)$ gemischte Spinoren nennen. Durch Abzählen der Elemente des jeweiligen Typs finden wir

Folgerung 5 *Die Wirkung der endlichen Gruppe $O^{+}_{2m}(F_2)$ auf dem Raum der binären Spinoren $S \cong F_2^{2^m}$ hat eine Bahn mit $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (1 + 2^{m-1})$ Elementen von der Form $s(Z)$ und eine Bahn mit $3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (1+2^{m-1}) \cdot (2^m - 1)$ Elementen der Form $s(H)$.*

Bei festem $a \in F_2^{2m}$ mit $Q(a) = 1$ entspricht jedem maximalen $Q-$isotropen geraden Unterraum W von F_2^{2m} eineindeutig ein $(m-1)-$dimensionaler maximaler Unterraum $H = W \cap a^{\perp}$. In dem Unterraum $Fix(a)$ und in dem Quotientenraum $S/Fix(a)$, auf dem die Gruppe $Sp_{2m}(F_2)$ operiert, erhält man so je ein System von $3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (1 + 2^{m-1})$ Vektoren, die beide mit $s(H)$ bezeichnet werden sollen, wenn Verwechselung ausgeschlossen ist, und welche je eineindeutig den maximalen $B-$isotropen Unterräumen H/a in $a^{\perp}/a$ entsprechen. Diese Elemente $s(U)$ sollen *symplektische Spinoren* genannt werden. Das ergibt

Folgerung 6 *Die Wirkung der endlichen Gruppe $Spin_{2m}(F_2)$ auf den beiden Räumen der binären Spinoren $S \cong F_2^{2^m}$ hat je eine Bahn mit $3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (1 + 2^m)$ Elementen von der Form $s(U)$, wobei U die maximalen $B-$isotropen Unterräume von (F_2^{2m}, B) durchläuft.*

Wir wollen noch bemerken, daß die Menge der geraden reinen Spinoren der Form $s(W)$ kanonisch isomorph ist zur Menge der symplektischen Spinoren $s(W \cap a^{\perp})$. Insbesondere stimmt auch die additive Struktur dieser Mengen überein.

2.4 Die symmetrischen Untergruppen und ihre Bahnen

Um die bis jetzt angedeuteten analogen Entwicklungen in der Zweischritthomologie und der binären Spinorrechnung zu einer expliziten Korrespondenz auszubauen, muß man aus der in Folgerung 5 erwähnten Bahn von $3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (1 + 2^{m-1}) \cdot (2^m - 1)$ Elementen der Form $\{s(H)\}$ ein Teilsystem von nur $3 \cdot 5 \cdot 7 ... \cdot (2m + 1)$ Elementen auswählen. Dies kann man dadurch erreichen, daß die entsprechenden isotropen Räume H, die dem Teilsystem entsprechen sollen, aus einer Bahn der Untergruppe S_{2m+2} genommen werden.
Für einen isotropen Unterraum L sei $St_{2m}(L) \subset O^+_{2m}(F_2)$ die Untergruppe aller $g \in O^+_{2m}(F_2)$ mit $g \cdot L = L$. Für einen maximalen isotropen Unterraum W kann man den Stabilisator $St_{2m}(W)$ leicht angeben, siehe [3] Appendice; er ist ein semidirektes Produkt der Gruppe $Gl_m(F_2)$ mit einer elementar-abelschen Gruppe vom Rang $\binom{m}{2}$. Der elementarabelsche Teil besteht dabei gerade aus denjenigen Automorphismen, die W punktweise festlassen.
Der Stabilisator eines isotropen Unterraums H mit $\dim H = m - 1$ ist eine Erweiterung einer Untergruppe von $St_{2m}(W)$ mit einer symmetrischen Gruppe S_3, dessen genaue Struktur im Beweis des folgenden Satzes allerdings gar nicht benötigt wird.

Satz 6 *Bei gegebener Untergruppe* $S_{2m+2} \subset O^e_{2m}(F_2)$ *wie in Abschnitt 1 (wobei* $m \equiv 1 \mod 2$ *und* e *wie in (57) gegeben ist) kann man stets einen* $Q-$*isotropen Unterraum* H *mit* $\dim H = m-1$ *so finden, daß der Durchschnitt der symmetrischen Gruppe und des Stabilisators von* H *gerade ein semidirektes Produkt der Form*

$$S_{2m+2} \cap St_{2m}(H) = S_{m+1} \bowtie (F_2)^{m+1} \tag{65}$$

ist.

Beweis: Wir können nach (56) annehmen, daß die Gruppe S_{2m+2} durch Transvektionen s_a gegeben sind, die sogar Spiegelungen sind. Sei nun also $a_1, a_2, ..., a_{2m+1}$ eine Menge von nichtisotropen, d.h. $Q(a_i) = 1$ Punkten wie in (57) gegeben, mit $B(a_i, a_j) = 1$ für $i \neq j$. Dann setze

$$H = LinSpan\{a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_4 + a_5, ..., a_1 + a_{2m} + a_{2m+1}\}. \tag{66}$$

Man verifiziert leicht, daß $\dim H = m-1$ gilt, und daß H ein $Q-$isotroper Unterraum ist. Man kann H auch beschreiben als

$$H = \{v \in F_2^{2m} \mid Q(v) = 0 \ \ , \ \ B(v, a_1) = B(v, a_{2i} + a_{2i+1}) = 0 \ \ \forall \ i\}.$$

Die Transvektionen s_b mit

$$b \in \{a_1, a_2 + a_3, a_4 + a_5, ..., a_{2m} + a_{2m+1}\}$$

lassen H punktweise fest. Es ist klar, daß diese alle miteinander kommutieren. Die Abbildungen

$$r_i(x) = x + B(x, a_{2i})(a_1 + a_{2i} + a_{2i+1}) \ \ (1 \leq i \leq m)$$

führen H in sich selbst über. Erstere erzeugen eine elementarabelsche Gruppe vom Rang $m+1$ und letztere erzeugen eine symmetrische Untergruppe S_{m+1} der Gruppe $GL(H) = Gl_{m-1}(F_2)$, welche übrigens gerade wieder von demselben Dicksonschen Typ ist wie in (57) . Die letztere Untergruppe normalisiert die erstere. Also gilt

$$S_{2m+2} \cap St_{2m}(H) \supseteq S_{m+1} \bowtie (F_2)^{m+1}.$$

Um nun die Gleichheit zu zeigen, betrachten wir die Anzahl der Elemente in der Bahn von H unter der Operation von S_{2m+2}. Jede Auswahl eines Elementes a_j und die darauffolgende Einteilung der restlichen Elemente a_i in

2−Teilmengen definiert in derselben Weise wie in (66) einen isotropen $(m-1)$−dimensionalen Unterraum von F_2^{2m}. Verschiedene solche 2−Partitionen ergeben dann verschiedene Unterräumen H, denn aus den Elementen vom Gewicht 3 des Unterraums (66) läßt sich das spezielle Element a_j und die 2−Partition ablesen. Die Anzahl aller solcher 2−Partitionen ist gleich $(2m+1)\cdot(2m-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1$, also gerade gleich dem Index des Stabilisators $S_{2m+2}\cap St_{2m}(H)$ in der Gruppe S_{2m+2} □

Folgerung 7 *Die Bahn des obigen $(m-1)$−dimensionalen isotropen Unterraums unter der Gruppenwirkung von S_{2m+2} hat gerade $(2m+1)\cdot(2m-1)\cdot\ldots\cdot 3$ Elemente.*

Die Elemente dieser Bahn sind gerade alle isotropen Unterräume der Dimension $m-1$, die sich in der Form

$$H(\mathcal{Q}) = LinSpan\{a_{i_1}+a_{i_2}+a_{i_3}, a_{i_1}+a_{i_4}+a_{i_5}, \ldots., a_{i_1}+a_{i_{2m}}+a_{i_{2m+1}}\} \quad (67)$$

mit einer 2−Partition

$$\mathcal{Q} = \{0, i_1\}\cup\{i_2, i_3\}\cup\ldots\cup\{i_{2m}, i_{2m+1}\}$$

von $\{0,1,2,\ldots.,2m,2m+1\}$ schreiben lassen. Daraus ersieht man

Folgerung 8 *Zwei isotrope Unterräume der Form $H(\mathcal{P}), H(\mathcal{Q})$ haben die Eigenschaft* $\dim H(\mathcal{P})\cap H(\mathcal{Q}) = m-2$ *genau dann wenn die Partitionen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ addierbar sind.*

Satz 7 *Bei gegebener Untergruppe $S_{2m+2}\subset Sp_{2m}(F_2)$ wie in Abschnitt 1 kann man stets einen maximalen $B-$isotropen Unterraum U mit* $\dim U = m$ *so finden, daß der Durchschnitt der symmetrischen Gruppe und des Stabilisators von U gerade ein semidirektes Produkt der Form*

$$S_{2m+2}\cap St_{2m}(U) = S_{m+1}\bowtie(F_2)^{m+1} \quad (68)$$

ist.

Der Beweis ist ähnlich wie oben. □
Entsprechende Folgerungen wie im orthogonalen Fall gelten dann genauso und werden hier nicht im Einzelnen formuliert.

2.5 Die homologisch definierte Darstellung ist die Spinordarstellung

Wir zeigen jetzt die Gleichheit der beiden hier betrachteten S_{2m+2}-Darstellungen. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall einer hyperbolischen quadratischen Form, weil in diesem Fall alle Resultate in [4] ganz explizit zur Verfügung stehen. Sei also $m \equiv 3 \bmod 4$. Dann ist die Untergruppe $S_{2m+2} \subset O^{+}_{2m}(F_2)$ gegeben, und nach Folgerung 7 sowie Satz 6 (i) und der Definition der Gruppenwirkungen ist die Bahn der Elemente $\{s(g \cdot H)\}$ isomorph zu der Bahn der Elemente $s(\mathcal{Q})$ aus 1.5 und 1.7 . In [4] III.1.12 wurde die additive Struktur der reinen Spinoren angegeben, woraus man ersieht, daß die Summe zweier gemischter Spinoren $s(H_1)$ und $s(H_2)$ wieder ein gemischter Spinor ist genau dann wenn $\dim(H_1 \cap H_2) = m-2$ ist. Damit folgt wegen Folgerung 8, daß die additive Struktur der Spinoren $s(H(\mathcal{Q}))$ definiert durch Lemma 8 und Gleichung (67) mit der in 1.7 gefundenen additiven Struktur des Cartan-Chevalley-Systems übereinstimmt. Beide Systeme erzeugen einen F_2-Vektroraum derselben Dimension 2^m. Also folgt der Isomorphismus der beiden F_2-Darstellungen in diesem Fall.
Für den Fall einer symplektischen bilinearen Form haben wir entsprechende Resultate über spezielle Orbits der Spinordarstellungen der symplektischen Gruppen $O_{2m+1}(F_2) \cong Sp_{2m}(F_2)$, in Folgerung 6 und Satz 7 hergeleitet. Nimmt man die analogen Resultate für die Gruppen $O^{-}_{2m}(F_2)$ auch noch hinzu, so erhält man insgesamt den

Satz 8 *Die F_2-modulare Darstellung der Gruppe S_{2m+2} auf den Zweischritthomologiegruppen $^2SH_m(\Delta(2m+1))$ ist isomorph zu der Spinordarstellung der symmetrischen Untergruppen*

$$S_{2m+2} \subset Sp_{2m}(F_2) \cong O^{+}_{2m+1}(F_2)$$

im Raum der binären Spinoren der Dimension 2^m.
Für den Fall $m \equiv 1 \bmod 2$ sind die Untergruppen S_{2m+2} schon in den entsprechenden orthogonalen Gruppen von Formen gerader Dimension $O^{e}_{2m}(F_2)$ enthalten.

2.6 Eine Durchschnittsformel

Mit den obigen Notationen können wir noch den folgenden Satz für die Durchschnitte der Fixräume aus (58) formulieren, der das Analogon von Satz 2 für die Spinoren ist.

Satz 9 *Sei L ein (nichtmaximaler) isotroper Unterraum und sei $a+L$ eine Nebenklasse von L mit*

$$a + L \subset L^{\perp} \cap \{a \in F_2^{2m} \mid Q(a) = 1\}.$$

Dann gilt

$$\dim(\bigcap_{b \in a+L} Fix(b)) = 2^{m - \dim L - 1} \tag{69}$$

Insbesondere ist für $L = H$ mit $\dim H = m - 1$

$$\bigcap_{b \in a+H} Fix(b) = \{0, s(H)\} \tag{70}$$

wobei $s(H)$ das in Lemma 8 definierte Element ist.

Der Beweis folgt jetzt sofort aus Satz 2 und der in Satz 8 gegebenen Äquivalenz der Darstellungen. □

Literatur

[1] T. Bier. Eine homologische Interpretation gewisser Inzidenzmatrizen mod p. *Mathematische Annalen*, 297:289–302, 1993.

[2] T. Bier. Zweischritthomologie eines Joinproduktes. Eingereicht zur Veröffentlichung, 1993.

[3] M. Broue und M. Enguehard. Une famille infinie de formes quadratiques entieres; leurs groupes d'automorphismes. *Ann. scient. Ec.Norm.Sup. 4 ser.*, 6:17–52, 1973.

[4] C. Chevalley. *The Algebraic Theory of Spinors.* Columbia University Press, New York, USA, 1954.

[5] L.E. Dickson. *Linear Groups.* Dover Publications Reprint 1958, New York,USA, 1900.

[6] L.E. Dickson. Representations of the general symmetric group as linear groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 9:121–148, 1908.

[7] R.H. Dye. Symmetric groups as maximal subgroups of orthogonal and symplectic groups over the field of two elements. *Journal of the London Mathematical Society*, 20:227–237, 1979.

[8] M. Suzuki. *Group Theory I.* Band 247 der Grundlehren. Springer Verlag, 1980.

[9] P.Y.H. Yiu. Strongly regular graphs and Hurwitz-Radon numbers. *Graphs and Combinatorics*, 6:61–69, 1990.

Dr. Thomas Bier
Twiskenweg 43 B
D-26129 Oldenburg i.O.