Ergänzungsreihe 95 – 005

Unimodulare Gitter über Reell-Quadratischen Zahlkörpern

by

Britta Habdank-Eichelsbacher

Mitgeteilt von F. Götze
15.4.1995

Sonderforschungsbereich “Diskrete Strukturen in der Mathematik”
Universität Bielefeld
POB 10 01 31
33501 Bielefeld
Germany
Telefon: (0521) 106–4970
Telex: 932 362 unibi
Telefax: 106–4743
Electronic mail: sfbmath@mathematik.uni-bielefeld.de

ISSN: 0936–7926

Typeset in TEX

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Klassifikation ganzzahliger, positiv definiter Gitter über $\mathbb{Q}$ ist eine klassische Fragestellung in der Theorie der quadratischen Formen. In den letzten Jahren ist man dazu übergegangen, ganzzahlige, positiv definite Gitter auch über reell–quadratischen Zahlkörpern zu klassifizieren.

So klassifizierte Han Shi–an [4] 1984 z.B. ganzzahlige, unimodulare, positiv definite Gitter in den Dimensionen 3 und 4 über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$. Eine vollständige Klassifikation aller Geschlechter ganzzahliger, unimodularer, positiv definiter Gitter über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ in den Dimensionen ≤ 3 gab 1985 Takada [15] an. Für die Dimension 4 klassifizierte Hoberg [5] 1993, basierend auf Takadas Arbeit, die ganzzahligen, unimodularen, positiv definiten Gitter über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Costello und Hsia [2] klassifizierten 1987 das Geschlecht der geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter der Dimension 12 über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. In diesen Arbeiten werden zwei Methoden zur Konstruktion und Klassifikation von Gittern angewendet. Zum einen ist dies die 1957 von Kneser [10] eingeführte Nachbarmethode. Die andere Methode ist die 1978 bei Venkov [16] beschriebene Konstruktion unimodularer, positiv definiter Gitter mit Hilfe von Wurzelgittern. Venkov verwendet dieses Verfahren zur Klassifikation des Geschlechts der geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter der Dimension 24 über $\mathbb{Z}$.
Scharlau [14] führte 1994 einen erweiterten Begriff eines Wurzelsystems über einem reell–quadratischen Zahlkörper ein. Er beschreibt die sich daraus ergebenden vergrößerten Wurzelsysteme über $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Hieraus erhält man eine größere Anzahl von Wurzelgittern, aus denen man ein unimodulares, positiv definites Gitter konstruieren kann.

Auf analytischem Weg berechnete Kitaoka [8] bereits 1977 eine Klassenzahlformel für das Geschlecht der geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter in Dimension 4 über $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$, wobei q eine Primzahl kongruent 1 modulo 4 ist. Sein Ergebnis liefert die Anzahl der Klassen im Geschlecht. Im Gegensatz zur Klassifikation mit Hilfe der Kneserschen Nachbarmethode oder mit Hilfe der Konstruktion von unimodularen, positiv definiten Gittern anhand von Wurzelgittern liefert diese Methode keine Beschreibung der einzelnen Gitter im Geschlecht.

In dieser Arbeit wird das Geschlecht $\mathfrak{G}$ der geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter der Dimension 4 über den reell–quadratischen Zahlkörpern bis zur Körperdiskriminante $d \leq 101$ vollständig klassifiziert. Die Gitter werden dabei durch ihr Wurzelsystem und die

Ordnung ihrer orthogonalen Gruppe beschrieben. Desweiteren wird die Unterteilung des Geschlechts in seine eigentlichen Spinorgeschlechter angegeben, d.h. es wird aufgelistet, welche Gitter in demselben eigentlichen Spinorgeschlecht liegen.
Zur Klassifikation des Geschlechts $\mathfrak{G}$ werden die beiden Konstruktionsmethoden nach Kneser und Venkov angewendet. Dazu beginnt man mit der Konstruktion eines geraden, unimodularen, positiv definiten Gitters anhand eines Wurzelgitters. Ausgehend von diesem Gitter berechnet man die Menge aller $\mathfrak{p}$–Nachbarn des Gitters, deren $\mathfrak{p}$–Nachbarn, usw. Nach Benham und Hsia [1] enthält diese Menge genau ein oder zwei vollständige eigentliche Spinorgeschlechter im Geschlecht $\mathfrak{G}$. Die Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter in $\mathfrak{G}$ wird in Abhängigkeit der Körperdiskriminante d angegeben. Für geeignete Primideale $\mathfrak{p}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ wechselt man durch $\mathfrak{p}$–Nachbarbildung zwischen zwei eigentlichen Spinorgeschlechtern, so daß man alle Gitter im Geschlecht $\mathfrak{G}$ der geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter der Dimension 4 über $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ gefunden hat, wenn man mit Hilfe der Menge aller $\mathfrak{p}$–Nachbarn eines Gitters alle eigentlichen Spinorgeschlechter in $\mathfrak{G}$ bestimmt hat.
Für $d = 97$ enthält das Geschlecht ein Gitter mit einer orthogonalen Gruppe der Ordnung 2. Der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{97})$ ist der Körper mit der kleinsten Körperdiskriminante, für den ein solches Gitter im Geschlecht $\mathfrak{G}$ existiert. Dies folgt daraus, daß das Geschlecht $\mathfrak{G}$ für alle Körper mit einer Körperdiskriminante $d \leq 101$ klassifiziert wird und in den Fällen mit $d < 97$ kein Gitter mit einer orthogonalen Gruppe der Ordnung 2 auftritt.

Im ersten Kapitel werden die Wurzelsysteme eines Gitters beschrieben. Insbesondere wird der von Scharlau [14] erweiterte Begriff eines Wurzelsystems über $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ eingeführt und die sich daraus ergebenden vergrößerten Wurzelsysteme beschrieben.

Das zweite Kapitel behandelt die Knesersche Nachbarmethode. In Satz 2.4 wird dazu, ausgehend von einem freien Gitter L, eine freie Darstellung eines $\mathfrak{p}$–Nachbarn $L(v)$ angegeben. $\mathfrak{p}$ ist dabei ein Primideal in $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Anhand des Satzes läßt sich ein Algorithmus zur Berechnung der Basis und der Grammatrix eines $\mathfrak{p}$–Nachbarn $L(v)$ des freien Gitters L formulieren.
Die Umsetzung dieses Algorithmus wird im Anhang genauer beschrieben. Dabei werden die in der Arbeit entwickelten Algorithmen mit bereits existierenden Programmen von Hoberg, Souvignier und Tubbesing kombiniert. Das Programm–Paket wird zur Erstellung der Klassifikations–Tabelle verwendet.

Im dritten Kapitel werden die eigentlichen Spinorgeschlechter eines Geschlechts berechnet. Dazu wird der Satz 3.7 bewiesen, der die genaue Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter im Geschlecht $\mathfrak{G}$ der geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter über einem reell–quadratischen Zahlkörper angibt. Man sieht, daß die Anzahl nur von der Körperdiskriminante d von $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ abhängt und sich aus dieser direkt berechnen läßt. In Korollar 3.9 werden die reell–quadratischen Zahlkörper mit der Klassenzahl $h = 1$ und 2 genauer untersucht. Es wird angegeben, für welche Primideale $\mathfrak{p}$ die Menge aller $\mathfrak{p}$–Nachbarn genau ein und für welche Primideale die Menge genau zwei eigentliche Spinorgeschlechter enthält.

Das vierte Kapitel baut auf den Ergebnissen der Kapitel 1, 2 und 3 auf und beschreibt die Vorgehensweise bei der Klassifikation des Geschlechts $\mathfrak{G}$ der geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter der Dimension 4 über einem reell–quadratischen Zahlkörper. Dazu werden zwei interessante Beispiele zur Körperdiskriminante $d = 60$ und $d = 97$ genauer beschrieben, und ihre Nachbarschaftsgraphen werden erstellt. Eine Tabelle gibt dann die vollständige Klassifizierung des Geschlechts $\mathfrak{G}$ für alle reell–quadratischen Zahlkörper bis zur Körperdiskriminante $d \leq 101$ an. Aus dieser Tabelle folgt, daß $d = 97$ die kleinste Körperdiskriminante ist, für die es im Geschlecht $\mathfrak{G}$ ein Gitter mit einer orthogonalen Gruppe der Ordnung 2 gibt.

Herr Prof. Dr. R. Scharlau führte mich zu den in dieser Arbeit betrachteten Fragestellungen. Ihm gilt der Dank für eine gute Betreuung. Für eine wertvolle Anregung danke ich Herrn Prof. Dr. Xu Fei.

1 Wurzelsysteme

Es sei $F = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ ein reell–quadratischer Zahlkörper, wobei D eine quadratfreie natürliche Zahl ist. $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}[\omega]$ bezeichne den Ring der ganzen Zahlen von F mit $\omega = \sqrt{D}$ für $D \equiv 2, 3$ modulo 4 und $\omega = \frac{1+\sqrt{D}}{2}$ für $D \equiv 1$ modulo 4. Die Körperdiskriminante von F ist $d = 4D$ bzw. $d = D$, und die Grundeinheit wird mit ε bezeichnet. Der quadratische Raum V der Dimension n über F ist mit einer nicht–ausgearteten, symmetrischen Bilinearform $(\,\cdot\,,\,\cdot\,) : V \times V \longrightarrow F$ versehen, und das Gitter L auf $V = FL$ ist ganz und positiv definit.

Um ein Gitter L genauer zu charakterisieren, betrachtet man die Menge aller Vektoren v im Gitter L, die eine Spiegelung des Gitters auf sich selbst an der Hyperebene $v^\perp$ in $V = FL$ induzieren. Dies ist gleichbedeutend damit, das Wurzelsystem des Gitters, ein endliches Vertretersystem von Vektoren, dessen Elemente diese Spiegelungen bereits vollständig induzieren, zu betrachten. Die Liste aller möglichen unzerlegbaren Wurzelsysteme von Gittern über $\mathbb{Z}$ ist aus der Theorie der Wurzelsysteme wohlbekannt; siehe z.B. Humphreys [7]. Mimura [11] listet über reell–quadratischen Zahlkörpern alle irreduziblen 2–Gitter und ihre Wurzelsysteme auf. Scharlau [14] führt den erweiterten Begriff von Wurzelsystemen über reell–quadratischen Zahlkörpern ein. Er beschreibt diese Wurzelsysteme in unimodularen Gittern und gibt ihre Konstruktionsmethode an. Dazu folgen einige Grundlagen.

Zu $0 \neq v \in V$ ist die Spiegelung

$$s_v \;:\; x \longmapsto x - \tfrac{2(v,x)}{(v,v)} v$$

eine Isometrie auf V, also $s_v \in O(V)$. Liegt v in $L \subset V$ und gilt $s_v(w) \in L$ für alle $w \in L$, so ist $s_v \in O(L) \subset O(V)$ und $\frac{2(v,L)}{(v,v)} v \subseteq L$. Der Vektor v wird als eine **Wurzel im schwachen Sinn** bezeichnet. Es sei

$$\overline{\mathsf{R}}(L) := \{v \in L \mid s_v \in O(L)\}$$

die Menge aller Wurzeln im schwachen Sinn. $\overline{\mathsf{R}}(L)$ zerfällt in eine endliche Anzahl von Teilmengen, wobei die Elemente einer Teilmenge jeweils auf einer Geraden in $V = FL$ liegen. Für $v \in \overline{\mathsf{R}}(L)$ ist $\dot{F}v \cap L$ eine Teilmenge von $\overline{\mathsf{R}}(L)$ und $\dot{F}v$ die zugehörige Gerade, wobei $\dot{F} = F - \{0\}$ ist. Es gibt endlich viele w_i, mit i in einer endlichen Indexmenge I, so daß $\overline{\mathsf{R}}(L) = \dot{\bigcup\limits_{i \in I}} (\dot{F}w_i \cap L)$ ist. Zu jedem $v \in \overline{\mathsf{R}}(L)$ ist die Menge $\mathfrak{a}_v := \{x \in F \mid xv \in \overline{\mathsf{R}}(L)\} \cup \{0\}$ ein gebrochenes Ideal, so daß $(\dot{F}v \cap L) = (\mathfrak{a}_v - \{0\})v$ ist. Somit gibt es auch zu jedem w_i mit $i \in I$ ein $\mathfrak{a}_i := \mathfrak{a}_{w_i}$, so daß $(\dot{F}w_i \cap L) = (\mathfrak{a}_i - \{0\})w_i$ und

$$\overline{\mathsf{R}}(L) \;=\; \dot{\bigcup_{i\in I}}(\mathfrak{a}_i - \{0\})\; w_i \tag{1}$$

ist.

Ist für alle $i \in I$ der Modul $\mathfrak{a}_i w_i$ ein freier $\mathfrak{o}$–Modul, so existiert jeweils ein $v_i \in \mathfrak{a}_i w_i$ mit $\mathfrak{a}_i w_i = \mathfrak{o} v_i$ für alle i. Die Wahl eines solchen Vektors ist bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig. Somit ist die Länge des Vektors bis auf Multiplikation mit Einheiten zum Quadrat eindeutig. Im folgenden soll die Länge (v_i, v_i) des gewählten Vektors v_i ein Element der Menge

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}^+_{rep.} \;:=\; & \{\alpha \in \mathfrak{o}^+ \mid \mathrm{Spur}(\alpha) \text{ ist minimal unter allen } \mathrm{Spur}(\alpha\varepsilon^{2k})\ , \\ & k \in \mathbb{Z}\ ,\ \alpha - \mathrm{konjugiert}(\alpha) \geq 0\} \end{aligned} \tag{2}$$

sein, für alle $i \in I$, wobei $\mathfrak{o}^+$ die Menge aller total positiven Zahlen in $\mathfrak{o}$ ist. Man erhält nun ein endliches Vertretersystem von Vektoren, die bereits alle Spiegelungen in $O(L)$ liefern und definiert:

$$\mathsf{R}(L) = \dot{\bigcup_{i\in I}}\{\pm v_i\}\ .$$

Ist die Klassenzahl des Körpers $h = 1$, so erhält man für unimodulare, positiv definite Gitter als Vertretersystem die Menge:

$$\mathsf{R}(L) = \{v \in L \mid (v,v) \in \{1, \varepsilon, \tau, \varepsilon\tau, 2, 2\varepsilon\}\}\ ,$$

wobei $\tau > 0$ und $|\mathrm{Norm}(\tau)| = 2$ ist. Dabei werden nur die Längen positiver Norm angenommen und die Längen τ bzw. $\varepsilon\tau$ existieren nur für $d \equiv 0$ modulo 4.

Ist die Klassenzahl des Körpers $h = 1$ und das Gitter darüberhinaus gerade, unimodular und positiv definit, so gilt:

$$\mathsf{R}(L) = \{v \in L \mid (v,v) \in \{2, 2\varepsilon\}\}\ ,$$

und die Länge 2ε wird nur bei positiver Norm von ε angenommen.

Ganz allgemein zeigt die Darstellung (1), daß man auch für nicht–freie Moduln $\mathfrak{a}_i w_i$ ein endliches Vertretersystem, basierend auf Ideal–Klassen und deren Repräsentanten, wählen kann. Diese Wahl trifft man besser nur in dem Fall, in dem ein konkreter reell–quadratischer Zahlkörper gegeben ist. In dieser Arbeit soll davon abgesehen werden.

Definition 1.1 *V sei ein Vektorraum über dem Körper F, versehen mit einer nicht ausgearteten, symmetrischen, positiv definiten Bilinearform $(\ .\ ,\ .\ )$. Eine Teilmenge R von V heißt F–***Wurzelsystem** *oder* **Wurzelsystem über** *F, falls gilt:*

(i) *R ist eine endliche Teilmenge von V ohne den Nullvektor.*

(ii) *Für alle Spiegelungen s_v mit $v \in \mathsf{R}$ gilt $s_v(\mathsf{R}) = \mathsf{R}$.*

(iii) *Für alle $v, w \in \mathsf{R}$ ist $\frac{2(v,w)}{(v,v)} \in \mathfrak{o}$.*

(iv) *$\pm v$ sind die einzigen Vielfachen von v, die in R liegen, d.h. $Fv \cap \mathsf{R} = \pm v$.*

Die Elemente in R heißen **Wurzeln**.

Bemerkung: Die Menge aller Wurzeln im schwachen Sinn $\overline{\mathsf{R}}(L)$ sei eine disjunkte Vereinigung freier $\mathfrak{o}$–Moduln. Dann ist das endliche Vertretersystem $\mathsf{R}(L)$ von $\overline{\mathsf{R}}(L)$ ein F–Wurzelsystem.

Definition 1.2 (i) *Ein Gitter L heißt* **reflektiv**, *falls das durch $\overline{\mathsf{R}}(L)$ bzw. $\mathsf{R}(L)$ erzeugte Untergitter von endlichem Index in L ist, d.h. $F\langle\overline{\mathsf{R}}(L)\rangle_{\mathfrak{o}} = F\langle\mathsf{R}(L)\rangle_{\mathfrak{o}} = FL = V$.*

(ii) *Es sei $\overline{\mathsf{R}}$ eine Menge von Wurzeln im schwachen Sinn. Die* **Weyl–Gruppe** *von $\overline{\mathsf{R}}$ ist definiert als die Menge*

$$W(\overline{\mathsf{R}}) := \langle s_v \mid v \in \overline{\mathsf{R}}\rangle \ .$$

Die Weyl–Gruppe eines Wurzelsystems R in $\overline{\mathsf{R}}$ ist

$$W(\mathsf{R}) := \langle s_v \mid v \in \mathsf{R}\rangle = W(\overline{\mathsf{R}}) \ .$$

Die Weyl–Gruppe eines Gitters L ist entsprechend definiert als die Menge

$$W(L) := \langle s_v \mid v \in \overline{\mathsf{R}}(L)\rangle \ .$$

Dies ist eine Teilmenge der Orthogonalen Gruppe $O(L)$ von L.

Bemerkungen:

- Für ein positiv definites Gitter L auf V sind die orthogonale Gruppe $O(L)$ und die Weyl–Gruppe $W(L)$ endlich.
- Die Weyl–Gruppe $W(L)$ eines Gitters L ist ein Normalteiler der orthogonalen Gruppe $O(L)$ des Gitters.

Sei F ein reell–quadratischer Zahlkörper und L ein gerades, unimodulares, positiv definites Gitter der Dimension 4. Im folgenden wird die Liste aller möglichen nicht orthogonal zerlegbaren Teil–Wurzelsysteme über F angegeben. Dabei seien R, A, D, ... F–Wurzelsysteme und R, A, D, ... die aus den jeweiligen Wurzelsystemen erzeugten Wurzelgitter (zu R ist $\langle \mathsf{R} \rangle_{\mathfrak{o}} = R$ das Wurzelgitter). Weiter sei α aus $\mathfrak{o}^+_{rep.}$, wie in (2) definiert, und $\mathsf{R}^{(\alpha)}$ die Menge aller Wurzeln der Länge α im Wurzelsystem R ($\mathsf{R}^{(\alpha)} := \{v \in \mathsf{R} \mid (v,v) = \alpha\}$). Die Bezeichnung ${}^{\alpha}\mathsf{R}$ bzw. ${}^{\alpha}R$ besagt, daß die Bilinearform des Wurzelsystems bzw. des Gitters mit α skaliert wird. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Grammatrix des durch ${}^{\alpha}\mathsf{R}$ bzw. ${}^{\alpha}R$ erzeugten quadratischen Raumes mit α multipliziert wird. Man spricht daher von einer **Skalierung** des Wurzelsystems bzw. des Gitters mit α. Ist $\alpha = 1$, so ist offensichtlich ${}^{1}\mathsf{R} = \mathsf{R}$ bzw. ${}^{1}R = R$.

Die Wurzelsysteme ${}^{\alpha}\mathsf{A}_l$ und ${}^{\alpha}\mathsf{G}_2$:

Das Wurzelgitter ${}^{\alpha}A_l$ mit $l \geq 1$ ist der freie Modul $\mathfrak{o}^l$, versehen mit der Bilinearform

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & \alpha & \cdot & \cdot & \alpha \\ \alpha & 2\alpha & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \alpha \\ \alpha & \cdot & \cdot & \alpha & 2\alpha \end{pmatrix}$$

und der zugehörigen Basis des Gitters $\{z_1, \ldots, z_l\}$. Das Wurzelsystem ${}^{\alpha}\mathsf{A}_l$ ist nach Definition die Menge

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}\mathsf{A}_l &:= \mathsf{R}^{(2\alpha)}({}^{\alpha}A_l) \\ &= \{v \in \mathsf{R}({}^{\alpha}A_l) \mid (v,v) = 2\alpha\} \\ &= \{\pm z_i \text{ für } 1 \leq i \leq l \ ; \ \pm(z_i - z_j) \text{ für } 1 \leq j < i \leq l\} \ . \end{aligned}$$

${}^{\alpha}\mathsf{A}_l$ enthält $l(l+1)$ Wurzeln. Die Weyl–Gruppe $W({}^{\alpha}\mathsf{A}_l)$ ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_{l+1} und enthält somit $(l+1)!$ Elemente.
Für $l \neq 2$ ist ${}^{\alpha}\mathsf{A}_l = \mathsf{R}({}^{\alpha}A_l)$ bereits das volle Wurzelsystem des Wurzelgitters ${}^{\alpha}A_l$. Ist die Dimension $l = 2$, so vergrößert sich das Wurzelsystem des Gitters ${}^{\alpha}A_l$ zu der Menge

$$ {}^{\alpha}\mathsf{G}_2 := \mathsf{R}({}^{\alpha}A_2) = {}^{\alpha}\mathsf{A}_2 \,\dot{\cup}\, \{\pm(z_1+z_2)\ ;\ \pm(2z_1 - z_2)\ ;\ \pm(-z_1+2z_2)\}\ . $$

Das Wurzelsystem ${}^{\alpha}\mathsf{G}_2$ enthält 12 Wurzeln und die Ordnung der Weyl–Gruppe $W({}^{\alpha}\mathsf{G}_2)$ beträgt $2^2 3$.

Die Wurzelsysteme ${}^{\alpha}\mathsf{D}_l$, ${}^{\alpha}\mathsf{C}_l$ und ${}^{\alpha}\mathsf{F}_4$:

Das Wurzelgitter ${}^{\alpha}D_l$ mit $l \geq 1$ ist der freie Modul $\mathfrak{o}^l$, versehen mit der Bilinearform

$$ \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & \alpha & \cdot & \cdot & \alpha \\ 0 & 2\alpha & \alpha & & & \cdot \\ \alpha & \alpha & 2\alpha & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \alpha \\ \alpha & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha & 2\alpha \end{pmatrix} $$

und der zugehörigen Basis des Gitters $\{z_1, \ldots, z_l\}$. Das Wurzelsystem ${}^{\alpha}\mathsf{D}_l$ ist nach Definition die Menge

$$ \begin{aligned} {}^{\alpha}\mathsf{D}_l &:= \mathsf{R}^{(2\alpha)}({}^{\alpha}D_l) \\ &= \{\pm z_i \text{ für } 1 \leq i \leq l\ ;\ \pm(z_i - z_j) \text{ für } 2 < i \leq l \text{ und } 1 \leq j < i\ ; \\ &\quad \pm(z_1 + z_2 - z_i) \text{ für } 2 < i \leq l\ ;\ \pm(z_1 + z_2 - z_i - z_j) \text{ für } 2 < j < i \leq l\}\ , \end{aligned} $$

und ${}^{\alpha}\mathsf{D}_l$ enthält $2(l^2 - l)$ Wurzeln. Die Weyl–Gruppe $W({}^{\alpha}\mathsf{D}_l)$ ist isomorph zum semidirekten Produkt $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{l-1} \rtimes S_l$ und enthält somit $2^{l-1} l!$ Elemente.
Das durch Vektoren der Länge $4\,\alpha$ vergrößerte Wurzelsystem

$$ {}^{\alpha}\mathsf{C}_l = {}^{\alpha}\mathsf{D}_l \,\dot{\cup}\, \{\pm(z_1 + z_2)\ ;\ \pm(z_1 + z_2 - 2z_i) \text{ für } 2 \leq i \leq l\} $$

ist für $l \neq 4$ das volle Wurzelsystem $\mathsf{R}({}^{\alpha}D_l)$ des Wurzelgitters und enthält $2\,l^2$ Wurzeln. Die Ordnung der Weyl–Gruppe $W({}^{\alpha}\mathsf{C}_l)$ beträgt $2^l l!$.

Ist $l = 4$, so erhält man

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}\mathsf{F}_4 &:= \mathsf{R}({}^{\alpha}D_4) \\ &= {}^{\alpha}\mathsf{C}_4 \,\dot{\cup}\, \{\pm(z_i \pm (z_3 - z_4)) \text{ für } i = 1,2 \;;\; \pm(z_i - z_3 - z_4) \text{ für } i = 1,2 \;; \\ &\qquad \pm(2z_1 + z_2 - z_3 - z_4) \;;\; \pm(z_1 + 2z_2 - z_3 - z_4)\} \end{aligned}$$

als volles Wurzelsystem des Wurzelgitters ${}^{\alpha}D_4$ mit 48 Wurzeln. Die Weyl–Gruppe $W({}^{\alpha}\mathsf{F}_4)$ ist gleich der vollen orthogonalen Gruppe $O({}^{\alpha}D_4)$ des Wurzelgitters ${}^{\alpha}D_4$ und hat somit $2^7 3^2$ Elemente.

Die Menge aller Wurzeln im schwachen Sinn ${}^{\alpha}\overline{\mathsf{C}}_2(\sqrt{D})$ für $d \equiv 0$ modulo 4:

Das Ideal $2\mathfrak{o} = \mathfrak{q}^2$ ist im Körper $F = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ für $d \equiv 0$ modulo 4 verzweigt. Das Wurzelgitter $2\,{}^{\alpha}A_1$ ist der freie Modul $\mathfrak{o}^2$, versehen mit der Bilinearform $\begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$ und der zugehörigen Basis $\{z_1, z_2\}$. Dann hat das 2–dimensionale Gitter

$$M := \mathfrak{o}^2 + \mathfrak{q}^{-1}(z_1 + z_2) \supseteq 2\,{}^{\alpha}A_1$$

das Determinantenideal $2\alpha^2\mathfrak{o}$ und die Menge aller Wurzeln im schwachen Sinn ist durch

$${}^{\alpha}\overline{\mathsf{C}}_2(\sqrt{D}) := \overline{\mathsf{R}}(M) = (\mathfrak{o}z_1 \,\dot{\cup}\, \mathfrak{o}z_2 \,\dot{\cup}\, \mathfrak{q}^{-1}(z_1 + z_2) \,\dot{\cup}\, \mathfrak{q}^{-1}(z_1 - z_2)) - \{0\}\ .$$

gegeben. Ist das Ideal $\mathfrak{q} = \tau\mathfrak{o}$ ein Hauptideal mit $|\mathrm{Norm}(\tau)| = 2$ und $\tau^2 = 2\,\varepsilon$, so erhält man das Wurzelsystem

$${}^{\alpha}\mathsf{C}_2(\sqrt{D}) := \mathsf{R}(M) = \{\pm z_1, \pm z_2, \pm\tfrac{\tau}{2}(z_1 + z_2), \pm\tfrac{\tau}{2}(z_1 - z_2)\} \cong 2\,{}^{\alpha}\mathsf{A}_1 \,\dot{\cup}\, 2\,{}^{\varepsilon\alpha}\mathsf{A}_1\ .$$

Es sollen nun einige Wurzelsysteme bzw. Mengen von Wurzeln im schwachen Sinn beschrieben werden, deren Wurzelgitter ein gerades, unimodulares Gitter ist. Die Skalierungen mit α sollen dabei außer Acht gelassen werden.

Die Menge aller Wurzeln im schwachen Sinn $\overline{\mathsf{F}}_4(\sqrt{D})$ für $d \equiv 0$ modulo 4 und das Wurzelgitter Δ_4' für $D = 2$:

Man definiert, ausgehend von $F_4 = D_4$, das gerade, unimodulare Gitter

$$F_4(\sqrt{D}) := D_4 + \mathfrak{q} D_4^{\#} \ .$$

Bezeichne das Wurzelgitter zur Menge aller Wurzeln im schwachen Sinn mit

$$\overline{\mathsf{F}}_4(\sqrt{D}) := \overline{\mathsf{R}}(F_4(\sqrt{D})) \ .$$

Ist $\mathfrak{q} = \tau\mathfrak{o}$ ein Hauptideal, so ist $\overline{\mathsf{F}}_4(\sqrt{D})$ eine Vereinigung freier $\mathfrak{o}$–Moduln und das Wurzelsystem ist

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}_4(\sqrt{D}) \ := \ & \mathsf{D}_4 \ \dot{\cup} \ \{\pm\tfrac{\tau}{2}(z_1+z_2) \ ; \ \pm\tfrac{\tau}{2}(z_1+z_2-2z_i) \text{ für } 2 \le i \le 4 \ ; \\
& \qquad \pm\tfrac{\tau}{2}(z_i \pm (z_3 - z_4)) \text{ für } i = 1,2 \ ; \ \pm\tfrac{\tau}{2}(z_i - z_3 - z_4) \text{ für } i = 1,2 \ ; \\
& \qquad \pm\tfrac{\tau}{2}(2z_1 + z_2 - z_3 - z_4) \ ; \ \pm\tfrac{\tau}{2}(z_1 + 2z_2 - z_3 - z_4)\} \\
= \ & \mathsf{D}_4 \ \dot{\cup} \ \tfrac{\tau}{2}(\mathsf{F}_4 - \mathsf{D}_4) \ .
\end{aligned}$$

Dieses Wurzelsystem hat 48 Wurzeln. Für $D \neq 2$ ist die Weyl–Gruppe von $\overline{\mathsf{F}}_4(\sqrt{D})$ gleich $W(\mathsf{F}_4)$ und hat somit $2^7 3^2$ Elemente.
Für $D = 2$ ist $\mathfrak{q} = \sqrt{2}\,\mathfrak{o}$, und alle Wurzeln im Wurzelsystem $\mathsf{F}_4(\sqrt{2})$ haben die Länge 2. Das Wurzelgitter $F_4(\sqrt{2})$ ist das bei Mimura [11] beschriebene Gitter Δ_4' mit $2^8 3^2$ Elementen in der Weyl–Gruppe.

Die Menge aller Wurzeln im schwachen Sinn $\overline{\mathsf{G}}_2(\sqrt{D})$ für $d \equiv 0$ modulo 3, $d > 12$, und das Wurzelgitter T_2 für $D = 3$:

Es sei $\mathfrak{r}$ das Primideal mit $\mathfrak{r}^2 = 3\mathfrak{o}$. Man definiert, ausgehend von A_2, das binäre, gerade, unimodulare Gitter

$$G_2 = G_2(\sqrt{D}) := A_2 + \mathfrak{r} A_2^{\#} = A_2 + \mathfrak{r}\tfrac{1}{3}(z_1 + z_2) \ .$$

Die Menge aller Wurzeln im schwachen Sinn des Wurzelgitters $G_2(\sqrt{D})$ ist

$$\overline{\mathsf{G}}_2 = \overline{\mathsf{G}}_2(\sqrt{D}) := \overline{\mathsf{R}}(G_2(\sqrt{D})) \ .$$

Ist $\mathfrak{r} = \varrho\,\mathfrak{o}$ ein Hauptideal mit $\varrho^2 = 3\varepsilon$, so ist $\overline{\mathsf{G}}_2(\sqrt{D})$ ein freier $\mathfrak{o}$–Modul und das Wurzelsystem ist

$$\begin{aligned}\mathsf{G}_2(\sqrt{D}) &:= \mathsf{R}(G_2(\sqrt{D}))\\ &= \mathsf{A}_2 \,\dot\cup\, \{\pm\tfrac{\varrho}{3}(z_1+z_2)\ ;\ \pm\tfrac{\varrho}{3}(2z_1-z_2)\ ;\ \pm\tfrac{\varrho}{3}(-z_1-2z_2)\}\\ &\cong \mathsf{A}_2 \,\dot\cup\, {}^{\varepsilon}\mathsf{A}_2\ .\end{aligned}$$

Die Grammatrix des Gitters $G_2(\sqrt{D})$ bzgl. der Basis z_1, $\frac{\varrho}{3}(-z_1+2z_2)$ ist $\begin{pmatrix} 2 & \varrho \\ \varrho & 2\varepsilon \end{pmatrix}$, und die Weyl–Gruppe von $\overline{\mathsf{G}}_2$ ist die von G_2 über $\mathbb{Z}$ mit $2^2 3$ Elementen.
Für $D = 3$ ist $\mathfrak{r} = \sqrt{3}\,\mathfrak{o}$ und man erhält das Wurzelgitter $T_2 = G_2(\sqrt{3})$ nach Mimura [11] mit der Grammatrix $\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$, und das Wurzelsystem T_2 ist die Menge $\mathsf{R}^{(2)}(T_2)$. Es enthält 12 Wurzeln der Länge 2, und seine Weyl–Gruppe hat $2^3 3$ Elemente. Das volle Wurzelsystem $\mathsf{R}(T_2)$ des Wurzelgitters T_2 ist $\mathsf{T}_2 \,\dot\cup\, {}^{\varepsilon}\mathsf{T}_2$ mit 24 Wurzeln und $2^3 3$ Elementen in der Weyl–Gruppe.

Das Wurzelgitter H_4 für $d = 5$:

Man definiert, ausgehend von D_4, das quaternäre, gerade, unimodulare Gitter

$$H_4 := D_4 + \mathfrak{o}\tfrac{1}{4}((3+\sqrt{5})z_1 + (1+\sqrt{5})z_2 - 2z_3 - 2z_4)\ .$$

Es ist das Wurzelgitter zum Wurzelsystem H_4, beschrieben bei Mimura [11], mit 120 Wurzeln, die alle Länge 2 haben. Die Weyl–Gruppe enthält $2^6 3^2 5^2$ Isometrien.

Wir wollen nun noch zwei häufig verwendete Konstruktionen für gerade, unimodulare, positiv definite Gitter angeben, ausgehend von einem geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter. Die Wurzelsysteme der beiden Gitter werden ineinander überführt, und die orthogonalen Gruppen der Gitter sind gleich.

ε–Skalierung mit Norm$(\varepsilon) = +1$:

Es sei L ein gerades, unimodulares, positiv definites Gitter. Man konstruiert das ε–skalierte Gitter ${}^{\varepsilon}L$ zu einem Gitter L, indem man die Grammatrix des Gitters L mit ε multipliziert

und dies als Grammatrix des Gitters ${}^{\varepsilon}L$ betrachtet. Dabei geht das Wurzelsystem $\overline{\mathsf{R}}(L)$ des Gitters L auf das Wurzelsystem $\overline{\mathsf{R}}({}^{\varepsilon}L)$ des neuen Gitters ${}^{\varepsilon}L$ über.
Das so konstruierte neue Gitter ${}^{\varepsilon}L$ ist wieder ein gerades, unimodulares, positiv definites Gitter.

Skalierung mit $\frac{1}{2}$ und Multiplikation mit $\mathfrak{q}$, für $d \equiv 0$ modulo 4, wobei $\mathfrak{q}$ Teiler von $2\,\mathfrak{o}$ ist:

Es sei L ein gerades, unimodulares, positiv definites Gitter und $\mathfrak{q}$ das Pimideal mit $\mathfrak{q}^2 = 2\,\mathfrak{o}$. Man konstruiert das Gitter $L^{\times} := \mathfrak{q}(\frac{1}{2}L)$, indem man das Gitter L mit $\mathfrak{q}$ und die Grammatrix des Gitters L mit $\frac{1}{2}$ multiplizierten. Dabei wird das Wurzelsystem $\overline{\mathsf{R}}(L)$ in das Wurzelsystem $\overline{\mathsf{R}}(L^{\times})$ überführt.
Das so konstruierte neue Gitter ${}^{\varepsilon}L$ ist wieder ein gerades, unimodulares, positiv definites Gitter.
Ist $\mathfrak{q} = \tau\mathfrak{o}$ ein Hauptideal mit $\tau^2 = 2\varepsilon$, so liefert diese Konstruktion das ε–skalierte Gitter von L.

2 Nachbarmethode nach Kneser

Es sei F ein algebraischer Zahlkörper mit dem Ring der ganzen Zahlen $\mathfrak{o}$ und V ein n–dimensionaler quadratischer Raum über F mit einer symmetrischen, nicht ausgearteten Bilinearform $(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \;:\; V \times V \longrightarrow F$. Desweiteren sei L ein ganzes Gitter auf V, d.h. $(v, w) \in \mathfrak{o}$ für alle $v, w \in L$ und $FL = V$. Die orthogonale Gruppe von V bzw. von L wird mit $O(V)$ bzw. mit $O(L)$ bezeichnet und die Menge aller Primstellen mit Ω. Bezüglich einer Primstelle $\mathfrak{p}$ in Ω ist $\mathfrak{o}_\mathfrak{p} \otimes_\mathfrak{o} F =: F_\mathfrak{p}$ die Komplettierung von F, wobei $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ der Ring der Ganzen Zahlen in $F_\mathfrak{p}$ ist. Analog sind $\mathfrak{o}_\mathfrak{p} \otimes_\mathfrak{o} V =: V_\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{o}_\mathfrak{p} \otimes_\mathfrak{o} L =: L_\mathfrak{p}$ die Komplettierungen des Vektorraums und des Gitters.

Definition 2.1 (i) *Die* **Äquivalenzklasse** *eines Gitters L auf V ist die Menge aller Gitter K auf V, für die es eine Isometrie φ aus $O(V)$ gibt, so daß $K = \varphi(L)$ ist. Zwei Gitter L und K heißen* **äquivalent**, *wenn sie in derselben Äquivalenzklasse liegen.*

(ii) *Das* **Geschlecht** $\mathrm{gen}(L)$ *eines Gitters L auf V ist die Menge aller Gitter K auf V, für die es zu allen nicht–archimedischen Primstellen $\mathfrak{p} \in \Omega$ eine Isometrie $\varphi_\mathfrak{p}$ aus $O(V_\mathfrak{p})$ gibt, so daß*

$$K_\mathfrak{p} = \varphi_\mathfrak{p}(L_\mathfrak{p})$$

ist.

Bemerkung: Liegt ein Gitter L im Geschlecht $\mathrm{gen}(L)$, so auch alle zu L äquivalenten Gitter K.

Mit der Kneserschen Nachbarmethode, die in [10] beschrieben wird, können alle Äquivalenzklassen in einem Geschlecht bestimmt werden.

Definition 2.2 (Knesersche Nachbarmethode)
Sei $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ ein Ideal in dem Ring der ganzen Zahlen $\mathfrak{o}$ und L ein ganzes Gitter auf dem Vektorraum V. Zu dem Vektor $v \in L - \mathfrak{a}L$ mit $(v, v) \in \mathfrak{a}^2$ definiert man das ganze Gitter

$$\begin{aligned} L(v) :=& \{\alpha v + w \mid \alpha \in \mathfrak{a}^{-1},\ w \in L \text{ mit } (v, w) \in \mathfrak{a}\} \\ =& \{w \in L \mid (v, w) \in \mathfrak{a}\} + \mathfrak{a}^{-1} v \\ =& L_v + \mathfrak{a}^{-1} v\ , \end{aligned}$$

*wobei $L_v := \{w \in L \mid (v, w) \in \mathfrak{a}\}$ ist. $L(v)$ wird als ein zu L $\mathfrak{a}$–**benachbartes** Gitter, bzw. als ein $\mathfrak{a}$–**Nachbar** von L bezeichnet.*

Bemerkungen:

- Es sei L ein gerades, unimodulares, positiv definites Gitter auf V, d.h. $(v,v) \in 2\mathfrak{o}$ für alle $v \in L$. Dann gilt: es gibt genau ein Geschlecht gerader, unimodularer, positiv definiter Gitter auf V.

- Ist L wieder ein gerades, unimodulares Gitter auf V und stellt man an den Vektor zur Nachbarbildung die etwas schärfere Forderung $v \in L - \mathfrak{a}L$ mit $(v,v) \in 2\mathfrak{a}^2$, so ist der Nachbar $L(v)$ wieder ein gerades, unimodulares Gitter. Somit liegt $L(v)$ im Geschlecht von L.

Nach O'Meara [12], 81:5 hat jedes Gitter L auf V eine **fast freie** Darstellung, d.h. es gibt ein gebrochenes Ideal $\mathfrak{a}$ und eine Basis $z_1, \ldots, z_n$ von $V = FL$, so daß

$$L = \mathfrak{a}z_1 + \mathfrak{o}z_2 + \cdots + \mathfrak{o}z_n$$

ist. Betrachtet man eine weitere derartige Darstellung des Gitters L mit gebrochenem Ideal $\mathfrak{b}$ und Basis $y_1, \ldots, y_n$ von V, so daß sich L auch schreiben läßt als

$$L = \mathfrak{b}y_1 + \mathfrak{o}y_2 + \cdots + \mathfrak{o}y_n \ ,$$

so erhalten wir folgende Übergangsmatrizen:

Aus $y_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}z_i$ erhält man $A = (a_{ij})_{\{i,j\}}$ mit $a_{1j} \in \mathfrak{a}$ und $a_{ij} \in \mathfrak{o}$ für alle i,j mit $i \neq 1$, sowie

aus $z_j = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}y_i$ erhält man $B = (b_{ij})_{\{i,j\}}$ mit $b_{1j} \in \mathfrak{b}$ und $b_{ij} \in \mathfrak{o}$ für alle i,j mit $i \neq 1$,

mit $\det(A) \in \mathfrak{a}$ und $\det(B) \in \mathfrak{b}$. Nach O'Meara [12], 81:8 gilt $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot \det(A)$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \det(B)$ und somit ist

$$\det(A)^{-1} \in \det(B) \cdot \mathfrak{o}^* \ ,$$

wobei $\mathfrak{o}^*$ die Einheitengruppe in $\mathfrak{o}$ ist.
Angenommen $\mathfrak{a}$ ist ein Hauptideal, also $\mathfrak{a} = a\mathfrak{o}$ für ein $a \in F$. Dann hat man

$$\begin{aligned} \det(A) &= a \cdot r \text{ mit } r \in \mathfrak{o} \\ \Rightarrow \quad a\mathfrak{o} &= \mathfrak{b} \cdot a \cdot r \\ \Rightarrow \quad r^{-1}\mathfrak{o} &= \mathfrak{b} \ . \end{aligned}$$

Es folgt, daß auch $\mathfrak{b}$ ein Hauptideal ist. Man erhält somit die

Bemerkung: L ist genau dann ein freies Gitter auf V, wenn das gebrochene Ideal $\mathfrak{a}$ in einer beliebigen fast freien Darstellung $L = \mathfrak{a}z_1 + \mathfrak{o}z_2 + \cdots + \mathfrak{o}z_n$ ein Hauptideal ist.

Im folgenden Lemma werden Fälle behandelt, in denen zwei Nachbarn eines Gitters gleich sind.

Lemma 2.3 (i) *L sei ein ganzes Gitter auf V und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $\mathfrak{o}$. Für einen Vektor $v \in L - \mathfrak{p}L$ mit $(v,v) \in \mathfrak{p}^2$ und ein $\alpha \in \mathfrak{o} - \mathfrak{p}$ sind die $\mathfrak{p}$–Nachbarn $L(v)$ und $L(\alpha v)$ identisch.*

(ii) (Mimura [11], Lemma 2.)
L sei ein ganzes Gitter auf V und $v, \tilde{v}$ seien Vektoren in $L - \mathfrak{p}L$ mit (v,v), $(\tilde{v},\tilde{v}) \in \mathfrak{p}^2$. Ist $(v,\tilde{v}) \in \mathfrak{p}^2$ und $v - \alpha\tilde{v} \in \mathfrak{p}L$ für ein $\alpha \in \mathfrak{o} - \mathfrak{p}$, dann gilt für die $\mathfrak{p}$–Nachbarn von L, daß $L(v) = L(\tilde{v})$ ist.

Beweis: zu (i)
Man hat
$$L(v) = \{w \in L \mid (w,v) \in \mathfrak{p}\} + \mathfrak{p}^{-1}v = L_v + \mathfrak{p}^{-1}v$$
und
$$L(\alpha v) = \{w \in L \mid (w,\alpha v) \in \mathfrak{p}\} + \mathfrak{p}^{-1}(\alpha v) = L_{\alpha v} + \mathfrak{p}^{-1}(\alpha v)\ .$$
(a) Sei $w \in L_v$, dann ist $(w,v) \in \mathfrak{p}$ und $\alpha(w,v) \in \mathfrak{p}$. Es folgt $L_v \subseteq L_{\alpha v}$. Ist $w \in L_{\alpha v}$, so daß $(w,\alpha v) = \alpha(w,v) \in \mathfrak{p}$ ist, so ist bereits $(w,v) \in \mathfrak{p}$, da $\alpha \in \mathfrak{o} - \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ nullteilerfrei ist. Also gilt $L_v \supseteq L_{\alpha v}$ und somit ist $L_v = L_{\alpha v}$.
(b) Offensichtlich ist $L_{\alpha v} + \mathfrak{p}^{-1}(\alpha v) \subseteq L_v + \mathfrak{p}^{-1}v$. Zur Umkehrung: Sowohl v als auch αv liegen in $L_v = L_{\alpha v}$. Gesucht sind nun Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{o}$, so daß $\mathfrak{p}^{-1}v = \mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1}(\alpha v) + \mathfrak{b}v = \mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\mathfrak{p})v$, d.h. $\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ ist. Die Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ existieren, da $\mathfrak{p}$ und $\alpha\mathfrak{o}$ teilerfremd sind. Somit ist $L_{\alpha v} + \mathfrak{p}^{-1}(\alpha v) \supseteq L_v + \mathfrak{p}^{-1}v$.
Es folgt die Behauptung. □

Sei nun $L = \mathfrak{o}z_1 + \cdots + \mathfrak{o}z_n$ ein ganzes, freies Gitter auf V und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $\mathfrak{o}$. Man wählt einen zur $\mathfrak{p}$–Nachbarbildung nach Kneser geeigneten Vektor $v \in L - \mathfrak{p}L$ mit $(v,v) \in \mathfrak{p}^2$. Die Basis $z_1, \ldots, z_n$ des Gitters L sei o.B.d.A. so sortiert, daß für ein $r \in \{1, \ldots, n\}$ gilt,
$$\begin{aligned} (z_i, v) &\in \mathfrak{p} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, r\ , \\ (z_i, v) &\in \mathfrak{o} - \mathfrak{p} \quad \text{für} \quad i = r+1, \ldots, n\ . \end{aligned} \tag{1}$$

Es ergibt sich daraus eine fast freie Darstellung des Teilgitters L_v:

$$L_v = \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{o} z_i + \mathfrak{p} z_{r+1} + \sum_{i=r+2}^{n} \mathfrak{o}(\delta_i z_{r+1} + z_i) \ ,$$

wobei $\delta_i \in \mathfrak{o} - \mathfrak{p}$ mit $\delta_i(z_{r+1}, v) + (z_i, v) \equiv 0$ modulo $\mathfrak{p}$ für alle $i \in \{r+2, \ldots, n\}$ ist. Diese Kongruenzen sind lösbar, da $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ein Körper ist. Die Darstellung von L_v ist leicht einzusehen, denn

$\supseteq$: Sei $x \in \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{o} z_i + \mathfrak{p} z_{r+1} + \sum_{i=r+2}^{n} \mathfrak{o}(\delta_i z_{r+1} + z_i)$, dann gilt

$$x = \sum_{i=1}^{r} \nu_i z_i + \pi z_{r+1} \sum_{i=r+2}^{n} \nu_i(\delta_i z_{r+1} + z_i) \qquad (\text{mit } \nu_i \in \mathfrak{o} \text{ und } \pi \in \mathfrak{p})$$

$$\Longrightarrow \quad (x, v) = \sum_{i=1}^{r} \nu_i \underbrace{(z_i, v)}_{\in \mathfrak{p}} + \underbrace{\pi(z_{r+1}, v)}_{\in \mathfrak{p}} + \sum_{i=r+2}^{n} \nu_i \underbrace{(\delta_i(z_{r+1}, v) + (z_i, v))}_{\in \mathfrak{p}} \in \mathfrak{p} \ .$$

Es folgt, daß x aus L_v ist.

$\subseteq$: Sei nun $x \in L_v$ mit $x = \sum_{i=1}^{n} \nu_i z_i$ und $\nu_i \in \mathfrak{o}$. Es gilt

$$\mathfrak{p} \ni (x, v) = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \nu_i \overbrace{(z_i, v)}^{\in \mathfrak{p}}}_{\in \mathfrak{p}} + \sum_{i=r+1}^{n} \nu_i(z_i, v)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathfrak{p} \ni \sum_{i=r+1}^{n} \nu_i(z_i, v) = (\nu_{r+1} - \sum_{i=r+2}^{n} \nu_i \delta_i) \underbrace{(z_{r+1}, v)}_{\in \mathfrak{o} - \mathfrak{p}} + \underbrace{\sum_{i=r+2}^{n} \nu_i \overbrace{(\delta_i z_{r+1} + z_i, v)}^{\in \mathfrak{p}}}_{\in \mathfrak{p}} \ .$$

Es folgt, daß $\nu_{r+1} - \sum_{i=r+2}^{n} \nu_i \delta_i$ ein Koeffizient aus $\mathfrak{p}$ ist. Damit ist x in der obigen Darstellung beschrieben.

Die fast freie Darstellung von L_v ist verifiziert.

Mit Hilfe von Lemma 2.3 soll nun der Vektor v zur Nachbarbildung geeignet modifiziert werden. Da v in $(L - \mathfrak{p}L) \cap L_v$ liegt, gilt

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{n} \nu_i z_i \qquad\qquad (\text{mit } \nu_i \in \mathfrak{o}) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \nu_i z_i + (\nu_{r+1} - \sum_{i=r+2}^{n} \nu_i \delta_i) z_{r+1} + \sum_{i=r+2}^{n} \nu_i(\delta_i z_{r+1} + z_i) \ , \end{aligned}$$

wobei $\nu_{r+1} - \sum\limits_{i=r+2}^{n} \nu_i \delta_i \in \mathfrak{p}$ ist. Angenommen es ist $\nu_i \in \mathfrak{p}$ für alle $i \neq r+1$, so ist auch $\nu_{r+1} \in \mathfrak{p}$, da $\nu_{r+1} - \sum\limits_{i=r+2}^{n} \nu_i \delta_i \in \mathfrak{p}$ ist. Dies ist aber ein Widerspruch zur Wahl $v \notin \mathfrak{p}L$. Es folgt, daß mindestens ein Koeffizient ν_j in $\mathfrak{o} - \mathfrak{p}$ liegt für $j \in \{1, \ldots, r, r+2, \ldots, n\}$. Zu diesem Koeffizienten existiert ein $\delta \in \mathfrak{o} - \mathfrak{p}^2$, so daß

$$\nu_j \cdot \delta \equiv 1 \text{ modulo } \mathfrak{p}^2$$

ist, da $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ nullteilerfrei. Man setzt

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \delta \nu_i z_i + z_j \\ &= \delta v - (\delta \nu_j - 1) z_j \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} (v, \tilde{v}) &= \delta \underbrace{(v, v)}_{\in \mathfrak{p}^2} - \underbrace{(\delta \nu_j - 1)}_{\in \mathfrak{p}^2} (v, z_j) \\ &\equiv 0 \text{ modulo } \mathfrak{p}^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v - \nu_j \tilde{v} &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \nu_i (1 - \delta \nu_j) z_i + (\nu_j - \nu_j) z_j \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \nu_i (1 - \delta \nu_j) z_i \\ &\in \mathfrak{p}L \ , \end{aligned}$$

da $1 - \delta \nu_j \equiv 0$ modulo $\mathfrak{p}^2$ ist. Mit Lemma 2.3 erhält man, daß $L(v)$ und $L(\tilde{v})$ gleich sind. Im folgenden sei o.B.d.A. $v = \tilde{v}$, also $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \nu_i z_i \in L - \mathfrak{p}L$ mit $(v, v) \in \mathfrak{p}^2$ und $\nu_j = 1$ für ein $j \in \{1, \ldots, r, r+2, \ldots, n\}$. Der Nachbar läßt sich folglich schreiben als

$$L(v) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} \mathfrak{o} z_i + \mathfrak{p}^{-1} v + \mathfrak{p} z_{r+1} + \sum_{\substack{i=r+2 \\ i \neq j}}^{n} \mathfrak{o} (\delta_i z_{r+1} + z_i) \ , \tag{3}$$

wobei v den j–ten Vektor in der Darstellung (3) ersetzt, da sein j–ter Koeffizient gleich 1 ist. Gesucht ist eine $\mathfrak{o}$–Basis dieses Nachbargitters.

Dazu gibt man zuerst für das 2–dimensionale Untergitter $M = \mathfrak{p}^{-1}v + \mathfrak{p}z_{r+1}$ von $L(v)$ eine fast freie Darstellung an.
Jedes gebrochene Ideal in $\mathfrak{o}$ ist von der Form $\alpha\mathfrak{o} + \beta\mathfrak{o}$ mit $\alpha, \beta \in F$ (O'Meara [12], 22:5a). Speziell das Primideal $\mathfrak{p}$ läßt sich darstellen als $\mathfrak{p} = x\mathfrak{o} + y\mathfrak{o} = \mathrm{ggT}(x\mathfrak{o}, y\mathfrak{o})$ mit $x, y \in F$. Der algebraische Zahlkörper F hat $m = [F : \mathbb{Q}]$ verschiedene Einbettungen nach $\mathbb{C}$. Das Normideal eines Ideals in $\mathfrak{o}$ ist als das Produkt seiner m konjugierten Ideale definiert. Es ist ein Hauptideal, erzeugt durch den Index des Ideals in $\mathfrak{o}$. Der Index, eine natürliche Zahl, wird als die Norm des Ideals in $\mathbb{Z}$ bezeichnet. Für das Primideal $\mathfrak{p}$ wird das Normideal erzeugt durch die Norm $[\mathfrak{o} : \mathfrak{p}] = p^k$, eine Primzahl–Potenz. Es gilt für das Normideal $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$:

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) = p^k\mathfrak{o} = \prod_{i=1}^{m} \mathfrak{p}_i \ , \ \text{mit } \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{p}^{-1} = \tfrac{1}{p^k} \prod_{i=2}^{m} \mathfrak{p}_i =: \tfrac{1}{p^k}(x'\mathfrak{o} + y'\mathfrak{o})$$

für geeignete $x', y' \in F$, wobei $\mathfrak{p}_i$ die konjugierten Ideale von $\mathfrak{p}$ sind. Nach O'Meara [12], 22:5 exisitieren $a, b \in F$ mit

$$a\,\mathfrak{p} + b\,\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{o} \ .$$

Dies ist richtig für $a = 1$ und $b = x$, wobei o.B.d.A. $\mathfrak{p}^2$ nicht $x\mathfrak{o}$ teilt. Dies ist so wählbar, da $\mathfrak{p} = \mathrm{ggT}(x\mathfrak{o}, y\mathfrak{o})$ ist, d.h. eines dieser beiden Hauptideale wird höchstens einfach von $\mathfrak{p}$ geteilt. Es ist nun

$$\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{p} + x\,\mathfrak{p}^{-1} \subseteqq \mathfrak{o} \ .$$

Da das Primideal $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal in $\mathfrak{o}$ ist, gilt

$$\mathfrak{p} + x\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{o} \ .$$

Es ergibt sich nach O'Meara [12], 81:5 (siehe Beweis) ein neuer primitiver Vektor für M:

$$w_1 := v + x\, z_{r+1} \ .$$

Mit Hilfe von O'Meara [12], 81:2 und 81:3 soll ein zweiter erzeugender Vektor w_2 konstruiert werden. Dazu sei $W = FM = Fv + Fz_{r+1}$ der Vektorraum über M und $U = F(v + xz_{r+1}) \subset W$ ein Untervektorraum, so daß $v \in W - U$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{q} &= \{a \in F \mid a \cdot v \in M + U\} \\ &= \{a \in F \mid a \cdot v \in \mathfrak{p}^{-1}v + \mathfrak{p}z_{r+1} + F(v + x\, z_{r+1})\} \ , \end{aligned}$$

d.h., für ein $a \in \mathfrak{q}$ gilt

$$\begin{aligned} a \cdot v &\in \mathfrak{p}^{-1} v + \mathfrak{p} z_{r+1} + s(v + x\, z_{r+1}) \qquad (\text{für } s \in F) \\ &= (\mathfrak{p}^{-1} + s) v + (\mathfrak{p} + s\, x) z_{r+1} \ . \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich zeigt, daß $a \cdot v$ genau dann in der Menge liegt, wenn $a \in \mathfrak{p}^{-1} + s$ und die Summe $\pi + s\,x = 0$ für $\pi \in \mathfrak{p}$ ist. Dabei ist $\pi + s\,x = 0 \iff s = -\frac{\pi}{x} \in \frac{1}{x}\mathfrak{p}$. Es folgt daraus

$$\begin{aligned} \mathfrak{q} &= \mathfrak{p}^{-1} - \tfrac{1}{x}\mathfrak{p} \\ &= \tfrac{1}{x}(x\mathfrak{p}^{-1} + \mathfrak{p}) \\ &= \tfrac{1}{x}\mathfrak{o} \ , \end{aligned}$$

wie oben bereits gesehen. Somit ist $\mathfrak{q} = \frac{1}{x}\mathfrak{o}$, die Menge der Koeffizienten von v in $M + U$, ein Hauptideal. Gesucht wird ein $u \in U$, so daß $\frac{1}{x}(v + u)$ in M liegt. Es gilt

$$\begin{aligned} M &\ni \tfrac{1}{x}(v + u) \\ &= \tfrac{1}{x}(v + s(v + x\, z_{r+1})) \quad (\text{für } s \in F) \\ &= \tfrac{1+s}{x} v + s\, z_{r+1} \ , \end{aligned}$$

d.h. $\frac{1+s}{x} \in \mathfrak{p}^{-1}$ und $s \in \mathfrak{p}$, so daß $s \in (\frac{x\,x'}{p^k}\mathfrak{o} + \frac{x\,y'}{p^k}\mathfrak{o} - 1) \cap (x\mathfrak{o} + y\mathfrak{o})$ ist. Da $x\mathfrak{o}$ nur einfach von $\mathfrak{p}$ geteilt wird, muß mindestens eines der beiden in $\mathfrak{o}$ enthaltenen Elemente $\frac{x\,x'}{p^k}$ und $\frac{x\,y'}{p^k}$ in $\mathfrak{o} - \mathfrak{p}$ liegen. Das geeignete der beiden Elemente soll mit $\frac{x\,\pi}{p^k}$ bezeichnet werden. D.h. es gibt ein $\varrho \in \mathfrak{o} - \mathfrak{p}$, so daß $\varrho\frac{x\,\pi}{p^k} \equiv 1$ modulo $\mathfrak{p}$ ist. Eine mögliche Wahl für s ist somit $s = \varrho\frac{x\,\pi}{p^k} - 1$, und der zweiten Vektor ist definiert als

$$\begin{aligned} w_2 &:= \tfrac{1+s}{x} v + s\, z_{r+1} \\ &= \tfrac{1}{x}(1 + \varrho\tfrac{x\,\pi}{p^k} - 1) v + (\varrho\tfrac{x\,\pi}{p^k} - 1) z_{r+1} \\ &= \varrho\tfrac{\pi}{p^k} v + (\varrho\tfrac{x\,\pi}{p^k} - 1) z_{r+1} \ . \end{aligned}$$

Das Gitter M läßt sich nun schreiben als

$$M = \mathfrak{o}(v + x\, z_{r+1}) + \mathfrak{o}(\varrho\tfrac{\pi}{p^k} v + (\varrho\tfrac{x\,\pi}{p^k} - 1) z_{r+1}) \ ,$$

d.h. man hat eine $\mathbb{Z}$–Basis für das Untergitter M von $L(v)$ gefunden. Der folgende Satz ist somit bewiesen:

Satz 2.4 *Sei* $L = \mathfrak{o}z_1 + \cdots + \mathfrak{o}z_n$ *ein ganzes, freies Gitter auf* V *und* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal in* $\mathfrak{o}$. *Der* $\mathfrak{p}$*–Nachbar* $L(v)$ *von* L *bezüglich eines Vektors* $v \in L - \mathfrak{p}L$ *mit* $(v,v) \in \mathfrak{p}^2$ *ist wieder ein ganzes, freies Gitter.*
Genügt die Basis von L *den unter* (1) *beschriebenen Bedingungen, so hat der Nachbar die folgende Darstellung:*

$$L(v) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} \mathfrak{o}z_i + \mathfrak{o}(\tilde{v} + x\, z_{r+1}) + \mathfrak{o}(\varrho \tfrac{\pi}{p^k} \tilde{v} + (\varrho \tfrac{x\,\pi}{p^k} - 1) z_{r+1}) + \sum_{\substack{i=r+2 \\ i \neq j}}^{n} \mathfrak{o}(\delta_i z_{r+1} + z_i) \ ,$$

wobei $\tilde{v}$ *wie in* (2) *beschrieben aus* v *konstruiert wird,* $\varrho \in \mathfrak{o} - \mathfrak{p}$ *so gewählt ist, daß* $\varrho \frac{x\,\pi}{p^k} \equiv 1$ *modulo* $\mathfrak{p}$ *ist und* $\delta_i \in \mathfrak{o} - \mathfrak{p}$ *so, daß* $\delta_i(z_{r+1}, v) + (z_i, v) \equiv 0$ *modulo* $\mathfrak{p}$ *ist für* $i \in \{r+2, \ldots, n\}$. *Die Elemente* x *und* π *seien, wie oben gefordert, aus den Darstellungen der Ideale* $\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{p}^{-1}$ *geeignet gewählt.*

3 Eigentliche Spinorgeschlechter

In diesem Kapitel soll untersucht werden, wann das Geschlecht der geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter der Dimension 4 über reell–quadratischen Zahlkörpern genau ein Spinorgeschlecht enthält und wann mehr als eins. Dazu zuerst einige allgemeine Definitionen und Sätze.

3.1 Grundlagen

Es sei F ein algebraischer Zahlkörper mit dem Ring der ganzen Zahlen $\mathfrak{o}$ und der Gruppe der Einheiten $\mathfrak{u}$. Weiter sei V ein n–dimensionaler quadratischer Raum über F. Mit Ω soll die Menge aller diskreten und archimedischen Primstellen $\mathfrak{p}$ auf F bezeichnet werden. Für die Lokalisierung nach $\mathfrak{p}$ erhält man somit den Körper $F_\mathfrak{p}$ mit dem Ring der ganzen Zahlen $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ und der Gruppe der Einheiten $\mathfrak{u}_\mathfrak{p}$ sowie den quadratischen Raum $V_\mathfrak{p}$. Im folgenden sei L ein Gitter auf V, d.h. $FL = V$, und $O(V)$ bzw. $O(L)$ sei die orthogonale Gruppe des Vektorraums bzw. des Gitters. $L_\mathfrak{p}$ sei die Komplettierung des Gitters L bzgl. einer Primstelle $\mathfrak{p}$
Jede Isometrie σ in einer orthogonalen Gruppe O des Vektorraums V oder des Gitters L ist das Produkt von r Spiegelungen τ_{u_i} mit $u_i \in V$.

Definition 3.1 *Die* **Spinornorm** *einer Isometrie $\sigma \in O$ ist definiert als die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \theta \,:\, O & \longrightarrow & \dot{F}/\dot{F}^2 \\ \tau_{u_1}\cdots\tau_{u_r} = \sigma & \longmapsto & (u_1,u_1)\cdots(u_r,u_r)\cdot\dot{F}^2 \ , \end{array}$$

wobei $\dot{F} = F - \{0\}$ die multiplikative Gruppe in F ist.

Bemerkung: Die Spinornorm θ ist ein Gruppenhomomorphismus mit $\theta(\sigma\varphi) = \theta(\sigma)\theta(\varphi)$ für $\sigma, \varphi \in O$.

Im folgenden wird das Interesse hauptsächlich auf der Einschränkung

$$\theta \,:\, O^+ \longrightarrow \dot{F}/\dot{F}^2 \ ,$$

also den Drehungen in O, liegen.

Definition 3.2 *Das* **eigentliche Spinorgeschlecht** $\mathrm{spn}^+(L)$ *eines Gitters L auf V ist die Menge aller Gitter K auf V, für die es eine Isometrie $\sigma \in O^+(V)$ und zu allen* *diskreten Primstellen* $\mathfrak{p} \in \Omega$ *eine Isometrie* $\Sigma_\mathfrak{p} \in O'(V_\mathfrak{p}) = \{\varphi_\mathfrak{p} \in O^+(V_\mathfrak{p}) \mid \theta(\varphi_\mathfrak{p}) = 1\dot{F}^2\}$ *gibt, so daß*

$$K_\mathfrak{p} = \sigma_\mathfrak{p}\Sigma_\mathfrak{p}L_\mathfrak{p}$$

für alle diskreten Primstellen $\mathfrak{p} \in \Omega$.

Bemerkungen:

- Liegt ein Gitter K im eigentlichen Spinorgeschlecht $\mathrm{spn}^+(L)$, so auch alle zu K äquivalenten Gitter.

- Liegt ein Gitter K im Geschlecht $\mathrm{gen}(L)$, so auch alle Gitter im eigentlichen Spinorgeschlecht $\mathrm{spn}^+(K)$ von K.

Die eigentlichen Spinorgeschlechter eines Geschlechts fassen jeweils eine Menge von Äquivalenzklassen von Gittern im Geschlecht zusammen. Sie liefern eine gröbere Einteilung des Geschlechts als die Äquivalenzklassen. Die beiden in der Definition verwendeten Untergruppen $O^+(V)$ und $O'(V_\mathfrak{p})$ der orthogonalen Gruppen $O(V)$ und $O(V_\mathfrak{p})$ sollen bezüglich der Spinornormen ihrer Elemente genauer untersucht werden. Es ist bekannt:

Satz 3.3 (i) (O'Meara [12], 101:8)
Es sei V *ein regulärer quadratischer Raum über einem globalen Körper* F *mit* $\dim V \geq 3$. *Dann besteht* $\theta(O^+(V))$ *aus der Menge aller Elemente aus* $\dot{F}$, *die an allen reellen Primstellen* $\mathfrak{p}$, *für die* $V_\mathfrak{p}$ *anisotrop ist, positiv sind.*

(ii) (O'Meara [12], 92:5)
Es sei $L_\mathfrak{p}$ *ein modulares Gitter auf einem quadratischen Raum* $V_\mathfrak{p}$ *über einem nicht–dyadischen lokalen Körper* $F_\mathfrak{p}$ *mit* $\dim L_\mathfrak{p} \geq 2$. *Dann ist* $\theta(O^+(L_\mathfrak{p})) = \mathfrak{u}_\mathfrak{p}\dot{F}_\mathfrak{p}^2$.

(iii) (Hsia [6], Lemma 1)
Es sei $L_\mathfrak{p}$ *ein gerades unimodulares Gitter auf einem quadratischen Raum* $V_\mathfrak{p}$ *über einem dyadischen lokalen Körper* $F_\mathfrak{p}$ *mit* $\dim L_\mathfrak{p} \geq 3$. *Dann ist* $\theta(O^+(L_\mathfrak{p})) = \mathfrak{u}_\mathfrak{p}\dot{F}_\mathfrak{p}^2$.

Zur exakten Bestimmung der eigentlichen Spinorgeschlechter eines Geschlechts folgen noch ein paar Definitionen.

Definition 3.4 (i) *Die* **Idelgruppe** J_F *eines algebraischen Zahlkörpers* F *ist Untergruppe des unendlichen Produkts*

$$J_F \subset \prod_{\mathfrak{p}\in\Omega} \dot{F}_\mathfrak{p} \ .$$

Es gilt: J_F ist die Menge aller $\mathfrak{i} = (\mathfrak{i}_\mathfrak{p})_{\{\mathfrak{p}\in\Omega\}}$ aus dem Produkt, für die gilt:

$$|\mathfrak{i}_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} = 1 \quad \textit{für alle diskreten} \quad \mathfrak{p} \in \Omega \ .$$

Die Elemente der Idelgruppe heißen **Idele**.

(ii) *Eine Untergruppe der Idelgruppe J_F ist die Menge der* **Hauptidele** *P_F, die sich darstellen läßt als*

$$P_F = \{(\alpha)_{\{\mathfrak{p}\in\Omega\}} \mid \alpha \in \dot{F}\} \ .$$

Die Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter in einem Geschlecht wird durch folgenden Satz angegeben.

Satz 3.5 (O'Meara [12], 102:7)
Es sei L ein Gitter auf einem quadratischen Raum V über einem algebraischen Zahlkörper F mit $\dim V \geq 3$. Dann ist die Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter $g^+(L)$ im Geschlecht von L gleich dem Index

$$g^+(L) = (J_F : P_D J_F^L) \ ,$$

wobei P_D die Menge der Hauptidele erzeugt aus $D = \theta(O^+(V)) \subset \dot{F}$ ist. Weiter ist $J_F^L = \{\mathfrak{i} \in J_F \mid \mathfrak{i}_\mathfrak{p} \in \theta(O^+(L_\mathfrak{p}))$ für alle diskreten $\mathfrak{p} \in \Omega\}$.

Um die Äquivalenzklassen eines Geschlechts aufgeteilt in seine Spinorgeschlechter bestimmen zu können, stellen Benham und Hsia [1] Kriterien zur Verfügung. Sei dazu L weiter ein Gitter auf dem quadratischen Raum V über dem algebraischen Zahlkörper F, und sei $\dim L$ gerade und größer als 3. Im folgenden werden diejenigen Lokalisierungen $L_\mathfrak{p}$ zu den Primstellen $\mathfrak{p} \in \Omega$ von L betrachtet, für die $(L_\mathfrak{p}, L_\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ und $L_\mathfrak{p}$ unimodular ist. Man bildet bezüglich einer der diskreten Primstellen $\mathfrak{p}$ alle $\mathfrak{p}$–Nachbarn, deren $\mathfrak{p}$–Nachbarn usw., bis keine neuen Klassen im Geschlecht von L mehr gefunden werden. Die Menge der Vertreter aller auf diese Weise entstandenen Äquivalenzklassen wird bei Benham und Hsia [1] mit $|\mathbf{R}(L : \mathfrak{p})|$ bezeichnet. Für je zwei Gitter K und K' als Vertreter zweier Äquivalenzklassen in $|\mathbf{R}(L : \mathfrak{p})|$ gilt

$$[K_\mathfrak{p} : (K_\mathfrak{p} \cap K'_\mathfrak{p})] = [K'_\mathfrak{p} : (K_\mathfrak{p} \cap K'_\mathfrak{p})] = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^k \ .$$

Der Exponent k wird bei Benham und Hsia [1] als die **Distanz** von K und K' in $|\mathbf{R}(L : \mathfrak{p})|$ bezeichnet. Haben zwei Gitter die Distanz 1, so sind sie $\mathfrak{p}$–Nachbarn.

Lemma 3.6 (i) (Benham und Hsia [1], Prop. 1)

Falls ein Gitter $K \in |\mathbf{R}(L:\mathfrak{p})|$ *ist, so enthält* $|\mathbf{R}(L:\mathfrak{p})|$ *einen Repräsentanten jeder Klasse des eigentlichen Spinorgeschlechts* $\mathrm{spn}^+(K)$. *Die Anzahl der Spinorgeschlechter* $g^+(L:\mathfrak{p})$, *die durch* $|\mathbf{R}(L:\mathfrak{p})|$ *repräsentiert werden, ist höchstens zwei. Also umfaßt* $|\mathbf{R}(L:\mathfrak{p})|$ *genau ein oder genau zwei vollständige Spinorgeschlechter.* (Zur ersten Teilaussage siehe auch Kneser [9].)

(ii) (Benham und Hsia [1], (1.1))

Sei π *ein festes Primelement in* $F_\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{j}(\mathfrak{p}) \in J_F$ *das Idel mit* $\mathfrak{j}(\mathfrak{p})_\mathfrak{p} = \pi$ *und* $\mathfrak{j}(\mathfrak{p})_\mathfrak{q} = 1$ *für alle* $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, *so gilt*

$$g^+(L:\mathfrak{p}) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathfrak{j}(\mathfrak{p}) \in P_D J_F^L \ ,$$

wobei P_D *und* J_F^L *wie in Satz* 3.5 *definiert sind.*

Bemerkungen:

- Es sei $J_F(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{j} \in J_F \mid \mathfrak{j}_\mathfrak{p} \in \pi\mathfrak{u}_\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{j}_\mathfrak{q} = 1$ für alle diskreten $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}\}$. Die Menge $\bigcup_{\mathfrak{p}\in\Omega} J_F(\mathfrak{p})$ ist ein Erzeugendensystem der Idelgruppe J_F.
- (Benham und Hsia [1], nach Prop. 1)
  Alle Gitter als Vertreter von Äquivalenzklassen in $|\mathbf{R}(L:\mathfrak{p})|$, die zueinander gerade Distanz haben, liegen in demselben eigentlichen Spinorgeschlecht.

3.2 Die eigentlichen Spinorgeschlechter im Geschlecht der geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter

Von nun an sei $F = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ ein reell–quadratischer Zahlkörper, wobei D eine quadratfreie natürliche Zahl echt größer als 1 ist. Der Ring der ganzen Zahlen von F ist $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}[\omega]$, mit $\omega = \sqrt{D}$ für $D \equiv 2,3$ modulo 4 und $\omega = \frac{1+\sqrt{D}}{2}$ für $D \equiv 1$ modulo 4. Auf einem n–dimensionalen Vektorraum V über F mit $n \geq 3$ betrachte man das Geschlecht $\mathfrak{G}$ der geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter, und L sei ein Vertreter einer Klasse von Gittern in diesem Geschlecht.

Zunächst sollen die Ideluntergruppen P_D und J_F^L aus Satz 3.5 genau bestimmt werden.

(i) Nach Satz 3.3 (i) ist die Menge der Hauptidele P_D erzeugt durch die Menge

$$D = \theta(O^+(V)) = \{\alpha \in \dot{F} \mid \alpha \gg 0,\ \text{d.h. } \alpha \text{ ist total positiv in } F\}\ .$$

(ii) Sei $F_\mathfrak{p}$ eine nicht–dyadische Lokalisierung von F und $L_\mathfrak{p}$ die zugehörige Lokalisierung des Gitters L. Nach Satz 3.3 (ii) ist die Gruppe der Spinornormen $\theta(O^+(L_\mathfrak{p})) = \mathfrak{u}_\mathfrak{p}\dot{F}_\mathfrak{p}^2$.

(iii) Ist $F_\mathfrak{p}$ eine dyadische Lokalisierung von F und $L_\mathfrak{p}$ das zugehörige lokalisierte gerade, unimodulare Gitter, dann gilt nach Satz 3.3 (iii) für die Spinornormen $\theta(O^+(L_\mathfrak{p})) = \mathfrak{u}_\mathfrak{p}\dot{F}_\mathfrak{p}^2$.

Aus (i) folgt

$$P_D = \{(\alpha)_{\mathfrak{p}\in\Omega} \in J_F \mid \alpha \gg 0\}\ , \tag{1}$$

und die Punkte (ii) und (iii) liefern

$$J_F^L = \{\mathfrak{i} \in J_F \mid \mathfrak{i}_\mathfrak{p} \in \mathfrak{u}_\mathfrak{p}\dot{F}^2 \text{ für alle diskreten } \mathfrak{p} \in \Omega\}\ . \tag{2}$$

Im nächsten Satz soll die genaue Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter im Geschlecht $\mathfrak{G}$ der geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter über einem reell–quadratischen Zahlkörper F angegeben werden. Dazu sei I die Gruppe der gebrochenen Ideale in F und P^+ die Untergruppe aller Hauptideale in I, die durch ein total positives Element in F, also durch ein Element in D, erzeugt werden. Die Klassenzahl des Körpers im engeren Sinn h^+ ist die Mächtigkeit der Faktorgruppe aus I und P^+, d.h. $h^+ = |I/P^+|$.

Satz 3.7 *F sei ein reell–quadratischer Zahlkörper und L ein gerades, unimodulares, positiv definites Gitter auf dem quadratischen Raum $V = FL$. Dann gilt:*

$$J_F/P_D J_F^L \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{t-1}\ ,$$

wobei t die Anzahl der verschiedenen Primteiler der Körperdiskriminante d ist und P_D und J_F^L wie in (1) *und* (2) *sind.*

Beweis: Im folgenden soll mit C^+ die Faktorgruppe I/P^+ bezeichnet werden. Betrachtet man C^+ modulo seiner Quadrate, also $C^+/(C^+)^2$, so gehört nach Zagier [17], (§12, (1)) ein Ideal $\mathfrak{a} \in I$ genau dann zur Menge $(C^+)^2$, wenn $\mathfrak{a} = (\lambda)\mathfrak{b}^2$ ist, für eine geeignete total positive Zahl $\lambda \in F$ und ein geeignetes Ideal $\mathfrak{b} \in I$. D.h., es ist

$$C^+/(C^+)^2 \cong I/I^2P^+\ .$$

Desweiteren gilt nach Zagier [17], (§12, Korollar):

$$C^+/(C^+)^2 \cong I/I^2P^+ \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{t-1} \ .$$

Insbesondere ist nach dem Korollar $h^+ = |I/P^+|$ durch 2^{t-1} teilbar, und h^+ ist genau dann ungerade, wenn d nur durch eine Primzahl teilbar ist.
Der Zusammenhang zwischen der Klassenzahl des Körpers h und der Klassenzahl des Körpers im engeren Sinn h^+ ist für reell–quadratische Zahlkörper gegeben durch:

$$h^+ = \begin{cases} h & \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Norm}(\varepsilon) = -1 \\ 2h & \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Norm}(\varepsilon) = +1 \ . \end{cases}$$

Es sei $\Omega_{\not\infty}$ die Menge aller diskreten Primstellen und Ω_∞ die Menge aller archimedischen Primstellen in Ω.
Man definiert nun die Abbildung

$$\phi \ : \ \begin{cases} J_F \xrightarrow{\phi_1} I \xrightarrow{\phi_2} I/I^2P^+ \\ \mathfrak{i} = (\mathfrak{i}_\mathfrak{p})_{\{\mathfrak{p}\in\Omega\}} \xmapsto{\phi_1} \prod\limits_{\mathfrak{p}\in\Omega_{\not\infty}} \mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{i}_\mathfrak{p})} \xmapsto{\phi_2} \prod\limits_{\mathfrak{p}\in\Omega_{\not\infty}} \mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{i}_\mathfrak{p})} \cdot (I^2P^+) \ . \end{cases}$$

ϕ_1 ist wohldefiniert, da die Abbildung $\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\ \cdot\ )$ von $F_\mathfrak{p}$ nach $\mathbb{Z}$ wohldefiniert ist und für ein $\mathfrak{i} \in J_F$ nur endlich viele Werte von $\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{i}_\mathfrak{p})$ ungleich Null sind. Desweiteren ist ϕ_1 eine surjektive Abbildung, denn zu $\mathfrak{a} = \prod\limits_{\mathfrak{p}\in\Omega_{\not\infty}} \mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}}$, mit $n_\mathfrak{p} \in \mathbb{Z}$ und $n_\mathfrak{p} = 0$ für fast alle $\mathfrak{p} \in \Omega_{\not\infty}$, ist $\prod\limits_{\mathfrak{p}\in\Omega_{\not\infty}} \mathfrak{u}_\mathfrak{p}\pi_\mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}} \times \prod\limits_{\mathfrak{p}\in\Omega_\infty} \dot{F}_\mathfrak{p} \subseteq J_F$ das Urbild von $\mathfrak{a}$ in J_F, wobei $\pi_\mathfrak{p}$ ein Primelement in $F_\mathfrak{p}$ ist. Die Abbildung ϕ_2 ist die Faktorgruppenbildung in I und ist somit wohldefiniert und surjektiv. Es folgt, daß $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$ eine wohldefinierte und surjektive Abbildung von J_F nach I/I^2P^+ ist.
Im folgenden soll der Kern von ϕ berechnet werden:

$$\mathrm{Kern}\,\phi = \{\mathfrak{i} \in J_F \mid \phi(\mathfrak{i}) = \prod_{\mathfrak{p}\in\Omega_{\not\infty}} \mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{i}_\mathfrak{p})} \in I^2P^+\} \ .$$

<u>Behauptung:</u> $\mathrm{Kern}\,\phi = P_D J_F^L$.

„ $\supseteq$ “: Es sei $(\alpha\, u_\mathfrak{p} f_\mathfrak{p}^2)_{\{\mathfrak{p}\in\Omega_{\not\infty}\}}$ beliebig aus $P_D J_F^L = (\prod\limits_{\mathfrak{p}\in\Omega_{\not\infty}} \mathfrak{u}_\mathfrak{p}\dot{F}_\mathfrak{p}^2 \times \prod\limits_{\mathfrak{p}\in\Omega_\infty} \dot{F}_\mathfrak{p}) \cdot P_D$, wobei $\alpha \in D$, $u_\mathfrak{p} \in \mathfrak{u}_\mathfrak{p}$ und $f_\mathfrak{p} \in \dot{F}_\mathfrak{p}$ sind, und $u_\mathfrak{p} f_\mathfrak{p}^2$ für fast alle $\mathfrak{p} \in \Omega$ eine Einheit ist. Dann ist

$$\phi((\alpha\, u_\mathfrak{p} f_\mathfrak{p}^2)_{\{\mathfrak{p}\in\Omega\}}) \ = \ \prod_{\mathfrak{p}\in\Omega_{\not\infty}} \mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\alpha\, u_\mathfrak{p} f_\mathfrak{p}^2)}$$

$$= \underbrace{\prod_{\mathfrak{p}\in\Omega_{\not\infty}} \mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\alpha)}}_{=\alpha\mathfrak{o}} \cdot \underbrace{\prod_{\mathfrak{p}\in\Omega_{\not\infty}} \mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(u_\mathfrak{p})}}_{=\mathfrak{o}} \cdot \prod_{\mathfrak{p}\in\Omega_{\not\infty}} \mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(f_\mathfrak{p}^2)}$$

$$= \alpha \cdot \prod_{\mathfrak{p}\in\Omega_{\not\infty}} \mathfrak{p}^{2\,\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(f_\mathfrak{p})}$$

ein Ideal in I^2P^+. Denn α ist ein total positives Element und somit ist $\alpha\mathfrak{o} \in P^+$, und $2\,\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(f_\mathfrak{p})$ ist gerade für alle $\mathfrak{p} \in \Omega_{\not\infty}$ und gleich Null für fast alle $\mathfrak{p} \in \Omega_{\not\infty}$, so daß $\prod_{\mathfrak{p}\in\Omega_{\not\infty}} \mathfrak{p}^{2\,\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(f_\mathfrak{p})}$ in I^2 liegt. Es folgt: $\mathrm{Kern}\,\phi \supseteq P_D J_F^L$.

„ $\subseteq$ “: Wähle ein beliebiges Idel $\mathfrak{i}$ im Kern von ϕ mit $\phi(\mathfrak{i}) = \prod_{\mathfrak{p}\in\Omega_{\not\infty}} \mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{i}_\mathfrak{p})} \in I^2P^+$ und $\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{i}_\mathfrak{p}) = 0$ für fast alle $\mathfrak{p} \in \Omega_{\not\infty}$. Dann gibt es $n_\mathfrak{p} \in \mathbb{Z}$ für alle $\mathfrak{p} \in \Omega_{\not\infty}$, so daß

$$\underbrace{\prod_{\mathfrak{p}\in\Omega_{\not\infty}} \mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}}}_{=\alpha\mathfrak{o}\in P^+} \cdot \underbrace{\prod_{\mathfrak{p}\in\Omega_{\not\infty}} \mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{i}_\mathfrak{p})-n_\mathfrak{p}}}_{=\mathfrak{a}^2\in I^2} = \alpha \cdot \mathfrak{a}^2$$

für ein $\alpha \in D$ und ein gebrochenes Ideal $\mathfrak{a} \in I$. Es folgt, daß $n_\mathfrak{p} = \mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\alpha)$ für alle $\mathfrak{p} \in \Omega_{\not\infty}$ und

$$\phi(\mathfrak{i}) = \underbrace{\prod_{\mathfrak{p}\in\Omega_{\not\infty}} \mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\alpha)}}_{\in P^+} \cdot \underbrace{\prod_{\mathfrak{p}\in\Omega_{\not\infty}} \mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\frac{\mathfrak{i}_\mathfrak{p}}{\alpha})}}_{\in I^2}$$

ist. Da der zweite Teil des Produkts ein Element in I^2 ist, und alle $\mathfrak{p} \in \Omega_{\not\infty}$ Primideale sind, müssen alle Exponenten $\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\frac{\mathfrak{i}_\mathfrak{p}}{\alpha})$ gerade sein. In $\dot{F}_\mathfrak{p}$ ist jedes Element darstellbar als $\pi_\mathfrak{p}^{m_\mathfrak{p}} u_\mathfrak{p}$ für ein Primelement $\pi_\mathfrak{p}$ in $\dot{F}_\mathfrak{p}$, ein $m_\mathfrak{p} \in \mathbb{Z}$ und eine Einheit $u_\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{u}_\mathfrak{p}$. D.h. es gibt insbesondere $m_\mathfrak{p} \in \mathbb{Z}$ und $u_\mathfrak{p} \in \mathfrak{u}_\mathfrak{p}$, so daß

$$\tfrac{\mathfrak{i}_\mathfrak{p}}{\alpha} = u_\mathfrak{p}\pi_\mathfrak{p}^{2m_\mathfrak{p}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathfrak{i}_\mathfrak{p} = \alpha\, u_\mathfrak{p}\pi_\mathfrak{p}^{2m_\mathfrak{p}}\ .$$

Weiter ist $\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\alpha\, u_\mathfrak{p}\pi_\mathfrak{p}^{2m_\mathfrak{p}}) = 0$ für fast alle $\mathfrak{p} \in \Omega_{\not\infty}$. Es folgt, daß $\mathfrak{i} = (\alpha\, u_\mathfrak{p}\pi_\mathfrak{p}^{2m_\mathfrak{p}})_{\{\mathfrak{p}\in\Omega_{\not\infty}\}}$ ein Element von $P_D J_F^L$ ist, und somit gilt $\mathrm{Kern}\,\phi \subseteq P_D J_F^L$.

Die Behauptung Kern $\phi = P_D J_F^L$ ist gezeigt, und es gilt nach dem Homomorphiesatz für Gruppen

$$J_F / P_D J_F^L \cong I/I^2 P^+ \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{t-1} \, .$$

$\square$

Desweitern folgt aus Satz 3.7 und nach Zagier [17] (§12, Korollar):

Korollar 3.8 *Die Klassenzahl im engeren Sinn h^+ ist durch 2^{t-1} teilbar. h^+ ist genau dann ungerade, wenn d nur von einer Primzahl geteilt wird, und genau dann gibt es nur ein eigentliches Spinorgeschlecht im Geschlecht $\mathfrak{G}$ der geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter auf V.*

Speziell für die Klassenzahlen $h = 1$ und 2 folgt aus Satz 3.7 und Korollar 3.8:

Korollar 3.9 *Sei F ein reell–quadratischer Zahlkörper, V ein n–dimensionaler Vektorraum über F und $\mathfrak{G}$ das Geschlecht der geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter auf V.*

- *Ist die Klassenzahl des Körpers gleich 1 und die Norm der Grundeinheit negativ, so ist die Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter im Geschlecht $\mathfrak{G}$ gleich 1.*
- *Ist die Klassenzahl des Körpers gleich 1 und die Norm der Grundeinheit positiv, so ist die Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter im Geschlecht $\mathfrak{G}$ gleich 2. Man wechselt zwischen den eigentlichen Spinorgeschlechtern durch Nachbarbildung mit einem Primideal, erzeugt durch ein Primelement mit negativer Norm.*
- *Ist die Klassenzahl des Körpers gleich 2 und die Norm der Grundeinheit negativ, so ist die Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter im Geschlecht $\mathfrak{G}$ gleich 2. Man wechselt zwischen den eigentlichen Spinorgeschlechtern durch Nachbarbildung mit einem Primideal, das kein Hauptideal ist.*
- *Ist die Klassenzahl des Körpers gleich 2 und die Norm der Grundeinheit positiv, so ist die Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter im Geschlecht $\mathfrak{G}$ gleich 4. Man wechselt zwischen den eigentlichen Spinorgeschlechtern durch Nachbarbildung mit einem Primideal, das kein Hauptideal ist, oder das andernfalls durch ein Primelement negativer Norm erzeugt wird.*

Beweis: Ist $h = 1$ und $\mathrm{Norm}(\varepsilon) = -1$, so ist die Klassenzahl im engeren Sinn $h^+ = 1$. Nach Korollar 3.8 gibt es somit genau ein eigentliches Spinorgeschlecht im Geschlecht $\mathfrak{G}$.

Ist $h = 1$ und $\mathrm{Norm}(\varepsilon) = +1$, so ist die Klassenzahl im engeren Sinn $h^+ = 2$. Nach Korollar 3.8 gilt, $2|h^+ \iff t \geq 2$ ist. Desweiteren ist 2^{t-1} ein Teiler von h^+, so daß es in diesem Fall genau zwei eigentliche Spinorgeschlechter im Geschlecht $\mathfrak{G}$ gibt. Alle Idele

$$\mathfrak{j}(\mathfrak{p}) \quad = \quad (1, \ldots, 1, \overbrace{\pi_\mathfrak{p}}^{\mathfrak{p}\text{–te}}, 1, \ldots) \quad = \quad (\pi_\mathfrak{p}, \pi_\mathfrak{p}, \ldots) \cdot \underbrace{(\tfrac{1}{\pi_\mathfrak{p}}, \ldots, \tfrac{1}{\pi_\mathfrak{p}}, \overbrace{1}^{\mathfrak{p}\text{–te}}, \tfrac{1}{\pi_\mathfrak{p}}, \ldots)}_{\in J_F^L} \tag{3}$$

zu $\mathfrak{p} \in \Omega$ liegen genau dann in $P_D J_F^L$, wenn es in $\mathfrak{o}$ ein total positives Element $\pi_\mathfrak{p}$ gibt, so daß $\pi_\mathfrak{p}\mathfrak{o} = \mathfrak{p}$ und $\frac{1}{\pi_\mathfrak{p}}$ eine Einheit in allen lokalen Körpern $F_\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ ist. D.h. für alle Primideale, die sich nicht durch ein total positives Element in F erzeugen lassen, liegt $\mathfrak{j}(\mathfrak{p})$ nicht in $P_D J_F^L$. Nach Benham und Hsia (siehe Lemma 3.6 (ii)) liefert die Nachbarbildung bezüglich Primidealen, die durch ein $\pi_\mathfrak{p}$ mit $\mathrm{Norm}(\pi_\mathfrak{p}) < 0$ erzeugt werden, einen Wechsel des eigentlichen Spinorgeschlechts.

Ist $h = 2$ und $\mathrm{Norm}(\varepsilon) = -1$, so ist die Klassenzahl im engeren Sinn $h^+ = 2$ und es gilt $2|h^+ \iff t \geq 2$. Auch hier gibt es somit genau zwei eigentliche Spinorgeschlechter im Geschlecht $\mathfrak{G}$. Da die Norm der Grundeinheit negativ ist, läßt sich zu jedem Hauptideal ein total positives Erzeugendes finden. Die Darstellung (3) zeigt, daß ein Idel $\mathfrak{j}(\mathfrak{p})$ für ein Primideal $\mathfrak{p} \in \Omega$, das ein Hauptideal ist, in $J_F^L P_D$ liegt. Ist $\mathfrak{p} \in \Omega$ ein Primideal, das kein Hauptideal ist, und ist $\pi_\mathfrak{p}$ ein Primelement in $F_\mathfrak{p}$, so ist $\pi_\mathfrak{p}$ für mindestens ein $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ keine Einheit in $F_\mathfrak{q}$. Offensichtlich läßt sich das Hauptidel $(\pi_\mathfrak{a})_{\{\mathfrak{a} \in \Omega\}}$ nicht wie in (3) durch Multiplikation mit Elementen aus J_F^L und P_D in das Idel $\mathfrak{j}(\mathfrak{p})$ überführen, so daß $\mathfrak{j}(\mathfrak{p})$ nicht in $J_F^L P_D$ liegt. Es folgt nach Benham und Hsia (siehe Lemma 3.6 (ii)), daß die Nachbarbildung bezüglich der Primideale, die keine Hauptideale sind, einen Wechsel des eigentlichen Spinorgeschlechts liefert.

Ist $h = 2$ und $\mathrm{Norm}(\varepsilon) = +1$, so ist die Klassenzahl im engeren Sinn $h^+ = 4$. Da h^+ durch 2 teilbar ist und $2^{t-1}|h^+$ gilt, ist die Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter gleich 2 oder gleich 4. Angenommen, sie wäre gleich 2, so gilt für jedes $\mathfrak{i}$ in $J_F - J_F^L P_D$:

$$J_F = J_F^L P_D \,\dot\cup\, \mathfrak{i}\, J_F^L P_D \ .$$

Wie im Fall $h = 1$ und $\mathrm{Norm}(\varepsilon) = +1$ gilt für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \Omega$, das ein Hauptideal ist und durch ein Element negativer Norm erzeugt wird, daß das zugehörige Idel $\mathfrak{j}(\mathfrak{p})$ nicht in $J_F^L P_D$ liegt. Ebenso gilt, wie im Fall $h = 2$ und $\mathrm{Norm}(\varepsilon) = -1$, für jedes Ideal $\mathfrak{q} \in \Omega$, das kein Hauptideal ist, daß das zugehörige Idel $\mathfrak{j}(\mathfrak{q})$ nicht in $J_F^L P_D$ liegt. Es folgt aus der Annahme, daß die Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter gleich 2 ist, daß $\mathfrak{j}(\mathfrak{q})$ ein Element aus $\mathfrak{j}(\mathfrak{p})\, J_F^L P_D$ ist, und somit ist:

$$\frac{\mathfrak{j}(\mathfrak{q})}{\mathfrak{j}(\mathfrak{p})} = (1, \ldots, 1, \overbrace{\tfrac{1}{\pi_\mathfrak{p}}}^{\mathfrak{p}\text{–te}}, 1, \ldots, 1, \overbrace{\pi_\mathfrak{q}}^{\mathfrak{q}\text{–te}}, 1, \ldots)$$

ein Element aus $J_F^L P_D$. Dies kann nicht sein, denn es gibt keine Elemente aus J_F^L und P_D, die als Produkt dieses Idel ergeben. Damit ist die Annahme, daß es zwei eigentliche Spinorgeschlechter gibt, nicht wahr. Die Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter in $\mathfrak{G}$ ist also gleich 4, und man wechselt zwischen den eigentlichen Spinorgeschlechtern durch Nachbarbildung mit Primidealen, die keine Hauptideale sind, oder die andernfalls durch ein Element negativer Norm erzeugt werden. $\square$

4 Klassifikation

In diesem Kapitel wird das Geschlecht $\mathfrak{G}$ der geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter der Dimension 4 über einem reell–quadratischen Zahlkörper $F = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ klassifiziert und in seine eigentlichen Spinorgeschlechter unterteilt. Die Klassifikation liefert die kleinste Körperdiskriminante d, für die das Geschlecht $\mathfrak{G}$ über F ein Gitter mit einer orthogonalen Gruppe der Ordnung 2 enthält.

4.1 Klassifikationsmethode und Beispiele

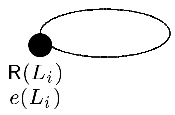
Satz 3.7 gibt die genaue Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter im Geschlecht $\mathfrak{G}$ der geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter der Dimension 4 an. In dieser Arbeit wird die Klassifikation des Geschlechts $\mathfrak{G}$ für reell–quadratische Zahlkörper bis zur Körperdiskriminante $d = 101$ durchgeführt, und somit ist die Klassenzahl des Körpers $h = 1$ oder 2. Nach Korollar 3.9 ist die Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter im Geschlecht $\mathfrak{G}$ der betrachteten Fälle gleich 1, 2 oder 4. Bei Scharlau [14] und [3] ist zu jedem reell–quadratischen Zahlkörper F mindestens ein Gitter L im Geschlecht $\mathfrak{G}$ angegeben, außer für $d \equiv 0$ modulo 24, wenn das Primideal $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q}^2 = 3\,\mathfrak{o}$ kein Hauptideal ist. In diesem Fall muß das bei Scharlau [14] unter 3.2.14 beschriebene Gitter für die allgemeinere Situation noch konstruiert werden. Dieser Fall taucht bis zur Körperdiskriminante $d = 101$ jedoch nicht auf.

Mit Hilfe von Satz 2.4 werden jetzt alle $\mathfrak{p}$–Nachbarn von L berechnet, dann deren $\mathfrak{p}$–Nachbarn, usw. Dies bricht ab, wenn keine neuen, zu den bereits bestimmten Gittern nicht isometrischen Gitter, mehr gefunden werden. Dabei ist $\mathfrak{p}$ das Primideal, welches das Ideal $2\,\mathfrak{o}$ teilt. Die Menge aller so berechneten Gitter ist nach Benham und Hsia [1] die Menge $|\mathbf{R}(L : \mathfrak{p})|$. Lemma 3.6 (ii) nach Benham und Hsia und Korollar 3.9 zeigen, daß $|\mathbf{R}(L : \mathfrak{p})|$ genau dann nur ein eigentliches Spinorgeschlecht enthält, wenn $\mathfrak{p} = \pi\,\mathfrak{o}$ ein Hauptideal ist, erzeugt durch ein total positives Element π in $\mathfrak{o}$. Somit ist die Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter in $|\mathbf{R}(L : \mathfrak{p})|$ gleich zwei sowohl in dem Fall, in dem es kein total positives Element π mit $\mathfrak{p} = \pi\,\mathfrak{o}$ gibt, als auch dann, wenn $\mathfrak{p}$ kein Hauptideal ist. Desweiteren gilt nach der Bemerkung im Anschluß an Lemma 3.6, daß alle Gitter mit gerader Distanz in demselben Geschlecht liegen.

Hat man nach der Bestimmung der Menge $|\mathbf{R}(L : \mathfrak{p})|$ noch nicht alle Gitter im Geschlecht gefunden, also auch noch nicht alle eigentlichen Spinorgeschlechter in $\mathfrak{G}$, so wählt man ein Primideal $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, für das das Idel $\mathfrak{j}(\mathfrak{q})$ weder in $J_F^L P_D$ noch in $\mathfrak{j}(\mathfrak{p}) J_F^L P_D$ liegt. Nach

Lemma 3.6 (ii) ist somit die Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter in $|\mathbf{R}(L:\mathfrak{q})|$ gleich 2, und eines der beiden darin auftretenden eigentlichen Spinorgeschlechter stimmt mit keinem der beiden in $|\mathbf{R}(L:\mathfrak{p})|$ auftretenden überein. Zu L bildet man einen geraden, unimodularen, positiv definiten $\mathfrak{q}$–Nachbar L', der zu keinem der bisher konstruierten Gitter isomorph ist. Zu L' wird wieder die Menge $|\mathbf{R}(L':\mathfrak{p})|$ berechnet, die die gleiche Anzahl von eigentlichen Spinorgeschlechtern enthält wie $|\mathbf{R}(L:\mathfrak{p})|$.
Dieses Verfahren bricht ab, wenn auf diese Weise alle eigentlichen Spinorgeschlechter in $\mathfrak{G}$ gefunden sind.
Die Berechnung aller $\mathfrak{p}$–Nachbarn eines Gitters L mit $\mathfrak{p} \mid 2\,\mathfrak{o}$ ist mit Hilfe der in Satz 2.4 beschriebenen Basis eines Nachbargitters auf dem Computer implementiert worden. Der Algorithmus des Programms wird im Anhang beschrieben.
Wir wollen nun zwei Nachbarschaftsgraphen angeben.
Dabei bezeichnen die Knoten des Graphen jeweils die Menge aller Gitter in einem Geschlecht. Eine Kante verbindet zwei Knoten,

wenn sie $\mathfrak{p}$–Nachbarn sind. Genauer ist dann L_i ein $\mathfrak{p}$–Nachbar von L_j mit $\mathfrak{p}$ Primideal und $\mathfrak{p} \mid 2\,\mathfrak{o}$. Die Knoten des Graphen werden mit dem Wurzelsystem des Gitters $\mathsf{R}(L_i)$ und der Ordnung der orthogonalen Gruppe des Gitters $e(L_i)$ beschriftet. Eine Schleife im Graphen



bedeutet, daß L_i zu sich selbst $\mathfrak{p}$–benachbart ist.

4.1.1 Beispiel: $d = 97$

Man betrachtet den Körper $F = \mathbb{Q}(\sqrt{97})$ mit der Körperdiskriminante $d = 97$. Das Geschlecht $\mathfrak{G}$ der geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter der Dimension 4 über F enthält ein Gitter mit einer orthogonalen Gruppe der Ordnung 2. Daß dies die kleinste Körperdiskriminante d ist, für die man in $\mathfrak{G}$ über einem reell–quadratischen Zahlkörper

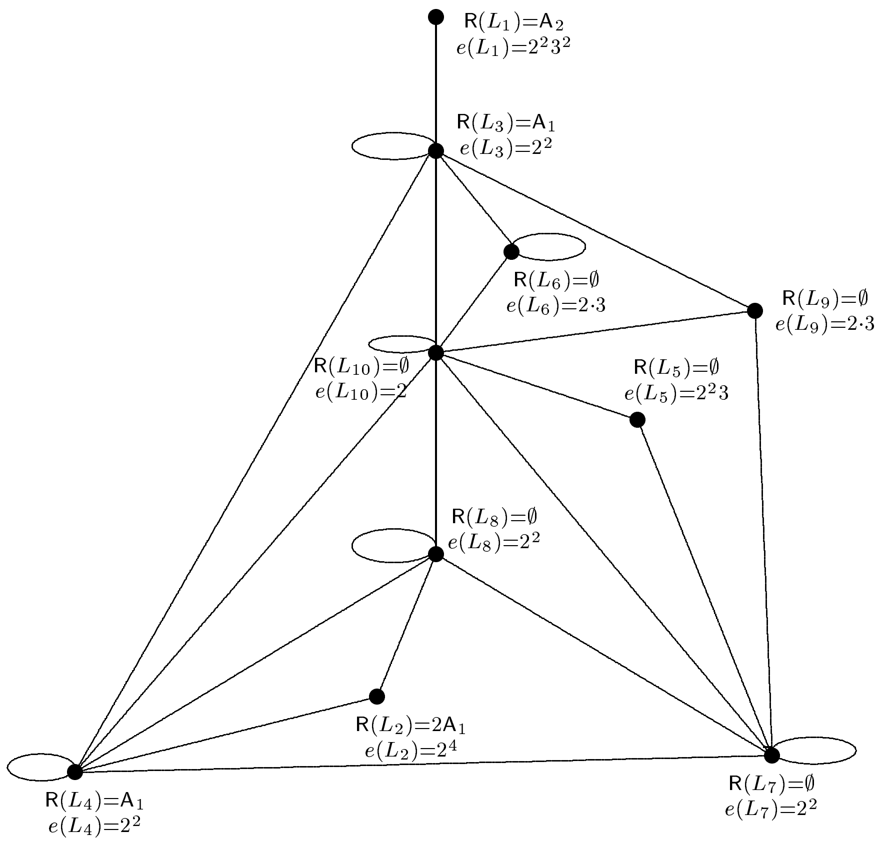
ein solches Gitter findet, wird durch die vollständige Klassifikation bis zur Körperdiskriminante $d = 101$ bewiesen.
Die Klassenzahl des Körpers ist $h = 1$,und die Norm der Grundeinheit ε ist negativ. Nach Satz 3.7 ist die Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter im Geschlecht $\mathfrak{G}$ gleich 1, so daß zu einem L in $\mathfrak{G}$ die Menge $|\mathbf{R}(L : \mathfrak{p})|$ bereits das ganze Geschlecht $\mathfrak{G}$ ist.
Sei das gerade, positiv definite Gitter $\mathfrak{o}^4$ versehen mit der Bilinearform

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\,\varrho & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2\,\varrho' \end{pmatrix}$$

und der zugehörigen Basis $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$. Dabei seien $\varrho = 9 + 2\,\omega$ und $\varrho' = 11 - 2\,\omega$, das konjugierte Element von ϱ, mit $\mathrm{Norm}(\varrho) = \mathrm{Norm}(\varrho') = \varrho\,\varrho' = 3$. Man definiert nun das gerade, unimodulare, positiv definite Gitter

$$L = L_1 := \mathfrak{o}\,z_1 + \mathfrak{o}\tfrac{1}{3}(z_1 + z_2 + \varrho'\,z_3 + \varrho\,z_4) + \mathfrak{o}\,z_3 + \mathfrak{o}\,z_4$$

im Geschlecht $\mathfrak{G}$, wie es bei Scharlau [14], 3.2.14 beschrieben ist. Das Wurzelsystem dieses Gitters ist $\mathsf{R}(L_1) = A_2$, und die Ordnung seiner orthogonalen Gruppe $e(L_1)$ ist gleich 6. Ausgehend von diesem Gitter wird die Menge $|\mathbf{R}(L_1 : \mathfrak{p})|$ aller $\mathfrak{p}$–Nachbarn berechnet. Man erhält den Graphen:



In diesem Graphen sei speziell auf das Gitter L_{10} hingewiesen. Denn L_{10} hat ein leeres Wurzelsystem und die Ordnung seiner orthogonalen Gruppe ist gleich 2.

4.1.2 Beispiel: $d = 60$

Man betrachtet den Körper $F = \mathbb{Q}(\sqrt{15})$ mit der Körperdiskriminante $d = 60$. Die Klassenzahl des Körpers ist $h = 2$, und die Norm der Grundeinheit ε ist positiv. Nach Korollar 3.9 ist die Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter im Geschlecht $\mathfrak{G}$ der geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter der Dimension 4 gleich 4. Dies ist bis zur Körperdiskriminante $d = 101$ der einzige Fall, für den es mehr als 2 eigentliche Spinorgeschlechter in $\mathfrak{G}$ gibt. Da das Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p}^2 = 2\,\mathfrak{o}$ kein Hauptideal ist, enthält die Menge $|\mathbf{R}(L:\mathfrak{p})|$ zu einem Gitter L in $\mathfrak{G}$ nach Korollar 3.9 genau zwei eigentliche Spinorgeschlechter.

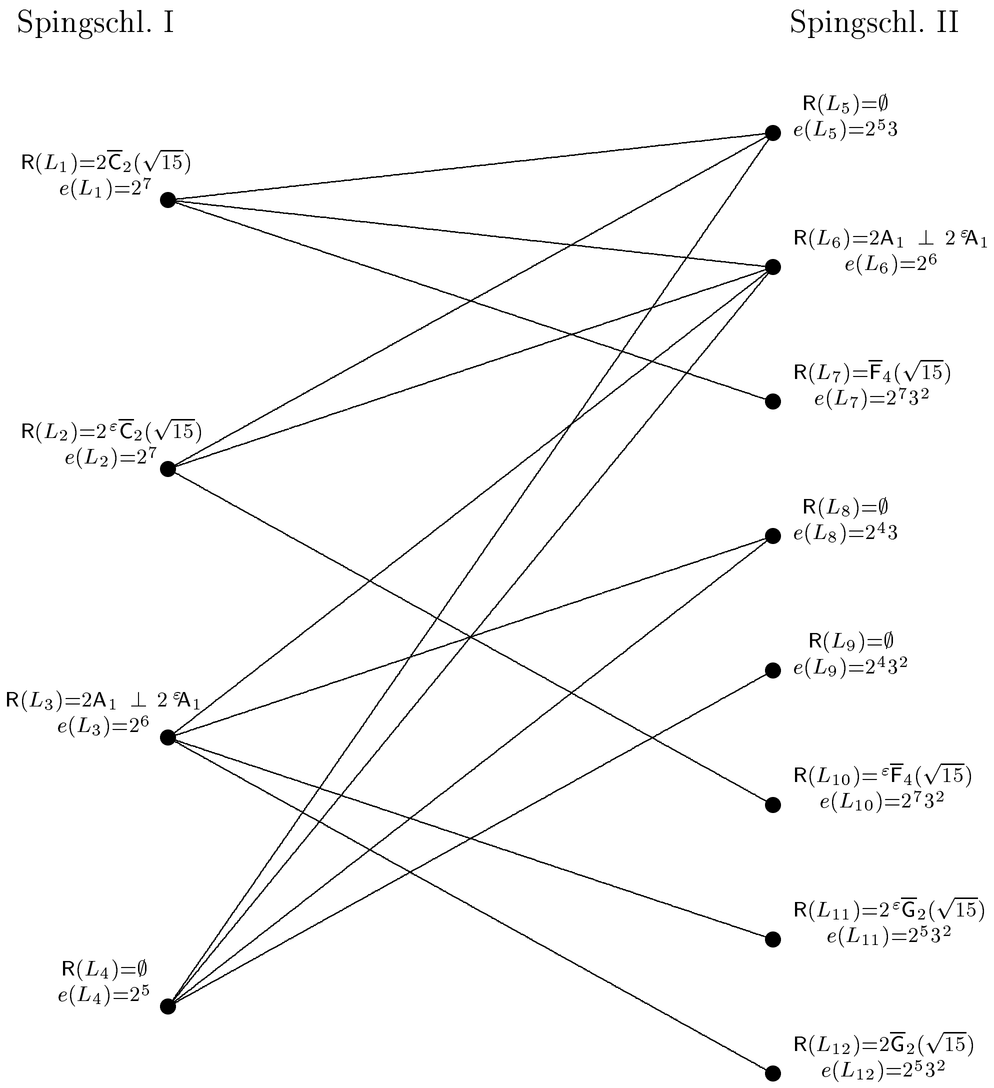
Sei das gerade, positiv definite Gitter $\mathfrak{o}^4$ versehen mit der Bilinearform

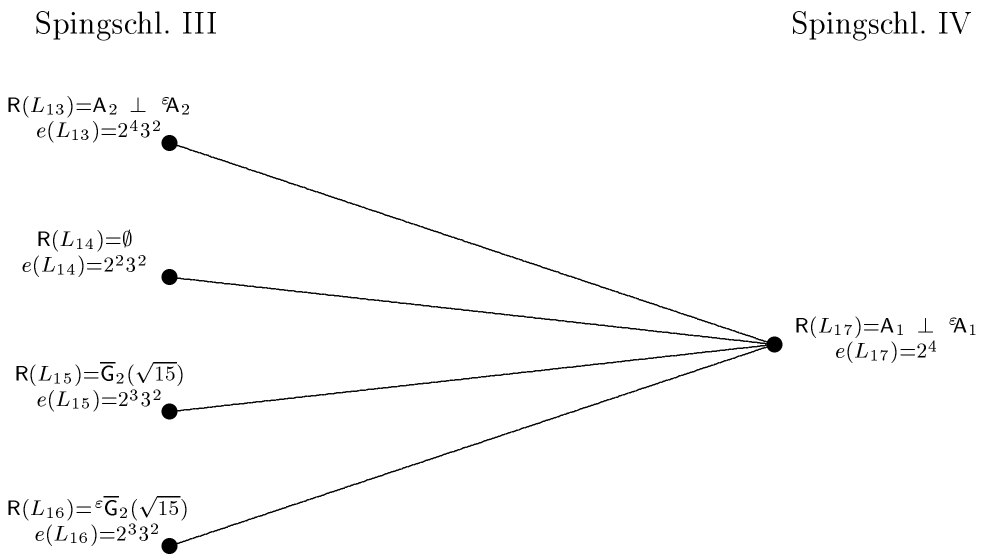
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und der zugehörigen Basis $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$. Man definiert nun das gerade, unimodulare, positiv definite Gitter

$$L = L_1 := \mathfrak{o}\tfrac{1}{2}(z_1 + \omega\, z_2) + \mathfrak{o}\, z_2 + \mathfrak{o}\tfrac{1}{2}(z_3 + \omega\, z_4) + \mathfrak{o}\, z_4$$

im Geschlecht $\mathfrak{G}$, wie es in [3] im Beweis des Satzes 4.3 beschrieben ist. Das Wurzelsystem dieses Gitters ist nach Scharlau [14] $\mathsf{R}(L_1) = 2\mathsf{C}_2(\sqrt{15})$, und die Ordnung seiner orthogonalen Gruppe $e(L_1)$ ist gleich 2^7. Ausgehend von diesem Gitter wird die Menge $|\mathbf{R}(L_1 : \mathfrak{p})|$ aller $\mathfrak{p}$–Nachbarn berechnet. Man erhält den Graphen:


Spingschl. I
Spingschl. II
$\mathsf{R}(L_1)=2\overline{\mathsf{C}}_2(\sqrt{15})$
$e(L_1)=2^7$
$\mathsf{R}(L_2)=2\,{}^{\varepsilon}\overline{\mathsf{C}}_2(\sqrt{15})$
$e(L_2)=2^7$
$\mathsf{R}(L_3)=2\mathsf{A}_1 \perp 2\,{}^{\varepsilon}\mathsf{A}_1$
$e(L_3)=2^6$
$\mathsf{R}(L_4)=\emptyset$
$e(L_4)=2^5$
$\mathsf{R}(L_5)=\emptyset$
$e(L_5)=2^5 3$
$\mathsf{R}(L_6)=2\mathsf{A}_1 \perp 2\,{}^{\varepsilon}\mathsf{A}_1$
$e(L_6)=2^6$
$\mathsf{R}(L_7)=\overline{\mathsf{F}}_4(\sqrt{15})$
$e(L_7)=2^7 3^2$
$\mathsf{R}(L_8)=\emptyset$
$e(L_8)=2^4 3$
$\mathsf{R}(L_9)=\emptyset$
$e(L_9)=2^4 3^2$
$\mathsf{R}(L_{10})={}^{\varepsilon}\overline{\mathsf{F}}_4(\sqrt{15})$
$e(L_{10})=2^7 3^2$
$\mathsf{R}(L_{11})=2\,{}^{\varepsilon}\overline{\mathsf{G}}_2(\sqrt{15})$
$e(L_{11})=2^5 3^2$
$\mathsf{R}(L_{12})=2\overline{\mathsf{G}}_2(\sqrt{15})$
$e(L_{12})=2^5 3^2$


Spingschl. III
Spingschl. IV
$\mathsf{R}(L_{13})=\mathsf{A}_2 \perp {}^{\varepsilon}\mathsf{A}_2$
$e(L_{13})=2^4 3^2$
$\mathsf{R}(L_{14})=\emptyset$
$e(L_{14})=2^2 3^2$
$\mathsf{R}(L_{15})=\overline{\mathsf{G}}_2(\sqrt{15})$
$e(L_{15})=2^3 3^2$
$\mathsf{R}(L_{16})={}^{\varepsilon}\overline{\mathsf{G}}_2(\sqrt{15})$
$e(L_{16})=2^3 3^2$
$\mathsf{R}(L_{17})=\mathsf{A}_1 \perp {}^{\varepsilon}\mathsf{A}_1$
$e(L_{17})=2^4$

Man kann zwischen den beiden Teilgraphen wechseln, indem man zu L_1 den $\mathfrak{q}$–Nachbar L_{17} bildet, wobei $\mathfrak{q}^2 = 3\,\mathfrak{o}$ ist.

4.2 Klassifikations–Tabelle

Die folgende Tabelle gibt die vollständige Klassifizierung des Geschlechts $\mathfrak{G}$ der geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter der Dimension 4 über einem reell–quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ bis zur Körperdiskriminante $d = 101$ an. Dabei ist das Maß des Geschlechts $\mathfrak{G}$ gleich $\sum_{i=1}^{h(\mathfrak{G})} \frac{1}{e(L_i)}$, wobei $h(\mathfrak{G})$ die Anzahl der Gitter in $\mathfrak{G}$ ist. t sei die Anzahl der verschiedenen Primteiler der Körperdiskriminante d, und π sei das Erzeugende des Primideals $\mathfrak{p}$, das $2\,\mathfrak{o}$ teilt, falls es ein Hauptideal ist.

d	D	h t	$\mathrm{N}(\varepsilon)$ $\mathrm{N}(\pi)$	Gitter	ε–Skal.	$\mathfrak{p}(\frac{1}{2}L)$	$\mathsf{R}(L_i)$ od. $\overline{\mathsf{R}}(L_i)$	$\mathrm{e}(L_i^d)$	$\mathrm{spn}^+(\mathfrak{G})$	$\mathrm{h}(\mathfrak{G})$	$\mathrm{Maß}(\mathfrak{G})$
5	5	1 1	-1 $+4$	L_1^5	–	–	H_4	$2^6 3^2 5^2$	I	1	$\frac{1}{2^6 3^2 5^2}$
8	2	1 1	-1 $+2$	L_1^8	–	–	Δ_4'	$2^8 3^2$	I	1	$\frac{1}{2^8 3^2}$
12	3	1	$+1$	L_1^{12}	L_1^{12}	–	$\mathsf{F}_4(\sqrt{3})$	$2^7 3^2$	I	2	$\frac{1}{2^6 3^2}$
		2	-2	L_2^{12}	L_2^{12}	–	$2\mathsf{T}_2 \,\dot\cup\, 2^\varepsilon\mathsf{T}_2$	$2^7 3^2$	II		
13	13	1 1	-1 $+4$	L_1^{13}	–	–	D_4	$2^6 3^2$	I	1	$\frac{1}{2^6 3^2}$
17	17	1 1	-1 $+2$	L_1^{17}	–	–	$2\mathsf{A}_2$	$2^4 3^2$	I	1	$\frac{1}{2^4 3^2}$

d	D	h / t	$\mathrm{N}(\varepsilon)$ / $\mathrm{N}(\pi)$	Gitter	ε–Skal.	$\mathfrak{p}(\frac{1}{2}L)$	$\mathsf{R}(L_i)$ od. $\overline{\mathsf{R}}(L_i)$	$\mathrm{e}(L_i^d)$	$\mathrm{spn}^+(\mathfrak{G})$	$\mathrm{h}(\mathfrak{G})$	$\mathrm{Maß}(\mathfrak{G})$
21	21	1 / 2	$+1$ / $+4$	L_1^{21}	L_2^{21}	–	D_4	$2^6 3^2$	I	3	$\frac{1}{2^4 3^2}$
				L_2^{21}	L_1^{21}	–	${}^{\varepsilon}\mathsf{D}_4$	$2^6 3^2$			
				L_3^{21}	L_3^{21}	–	$2\mathsf{G}_2(\sqrt{21})$	$2^5 3^2$	II		
24	6	1 / 2	$+1$ / -2	L_1^{24}	L_1^{24}	–	$\mathsf{F}_4(\sqrt{6})$	$2^7 3^2$	I	4	$\frac{1}{2^6}$
				L_2^{24}	L_2^{24}	–	$2\mathsf{G}_2(\sqrt{6})$	$2^5 3^2$			
				L_3^{24}	L_3^{24}	–	$\emptyset$	$2^5 3^2$			
				L_4^{24}	L_4^{24}	–	$2\mathsf{C}_2(\sqrt{6})$	2^7	II		
28	7	1 / 2	$+1$ / $+2$	L_1^{28}	L_1^{28}	–	$\mathsf{F}_4(\sqrt{7})$	$2^7 3^2$	I	4	$\frac{1}{2^2 3^2}$
				L_2^{28}	L_2^{28}	–	$2\mathsf{C}_2(\sqrt{7})$	2^7			
				L_3^{28}	L_3^{28}	–	$\emptyset$	$2^6 3$			
				L_4^{28}	L_4^{28}	–	$\mathsf{A}_2 \perp {}^{\varepsilon}\mathsf{A}_2$	$2^3 3^2$	II		
29	29	1 / 1	-1 / $+4$	L_1^{29}	–	–	D_4	$2^6 3^2$	I	3	$\frac{1}{2^6}$
				L_2^{29}	–	–	$2\mathsf{A}_2$	$2^4 3^2$			
				L_3^{29}	–	–	$\emptyset$	$2^4 3^2$			
33	33	1 / 2	$+1$ / -2	L_1^{33}	L_1^{33}	–	$2\mathsf{G}_2(\sqrt{33})$	$2^5 3^2$	I	4	$\frac{1}{2^4}$
				L_2^{33}	L_2^{33}	–	$\mathsf{A}_2 \perp {}^{\varepsilon}\mathsf{A}_2$	$2^3 3^2$			
				L_3^{33}	L_3^{33}	–	$\emptyset$	$2^3 3^2$			
				L_4^{33}	L_4^{33}	–	$2\mathsf{A}_1 \perp 2\,{}^{\varepsilon}\mathsf{A}_1$	2^5	II		
37	37	1 / 1	-1 / $+4$	L_1^{37}	–	–	D_4	$2^6 3^2$	I	3	$\frac{5^2}{2^6 3^2}$
				L_2^{37}	–	–	A_2	$2^2 3^2$			
				L_3^{37}	–	–	$\emptyset$	$2^3 3^2$			
40	10	2 / 2	-1 / –	L_1^{40}	–	L_1^{40}	$\overline{\mathsf{F}}_4(\sqrt{10})$	$2^7 3^2$	I	6	$\frac{7^2}{2^6 3^2}$
				L_2^{40}	–	L_2^{40}	$\overline{\mathsf{C}}_2(\sqrt{10})$	2^5			
				L_3^{40}	–	L_3^{40}	$\emptyset$	$2^5 3$			
				L_4^{40}	–	L_4^{40}	$2\overline{\mathsf{C}}_2(\sqrt{10})$	2^7	II		
				L_5^{40}	–	L_5^{40}	A_2	$2^3 3^2$			
				L_6^{40}	–	L_6^{40}	$\emptyset$	$2^4 3$			

d	D	h t	$\mathrm{N}(\varepsilon)$ $\mathrm{N}(\pi)$	Gitter	ε–Skal.	$\mathfrak{p}(\frac{1}{2}L)$	$\mathsf{R}(L_i)$ od. $\overline{\mathsf{R}}(L_i)$	$\mathrm{e}(L_i^d)$	$\mathrm{spn}^+(\mathfrak{G})$	$\mathrm{h}(\mathfrak{G})$	$\mathrm{Maß}(\mathfrak{G})$
41	41	1 1	-1 $+2$	L_1^{41}	–	–	$2\mathsf{A}_2$	$2^4 3^2$	I	3	$\frac{1}{3^2}$
				L_2^{41}	–	–	$2\mathsf{A}_1$	2^4			
				L_3^{41}	–	–	$\emptyset$	$2^3 3$			
44	11	1 2	$+1$ -2	L_1^{44}	L_1^{44}	–	$\mathsf{F}_4(\sqrt{11})$	$2^7 3^2$	I	7	$\frac{7^2}{2^6 3^2}$
				L_2^{44}	L_2^{44}	–	$\mathsf{C}_2(\sqrt{11})$	2^5			
				L_3^{44}	L_3^{44}	–	$\emptyset$	$2^5 3$			
				L_4^{44}	L_4^{44}	–	$2\mathsf{C}_2(\sqrt{11})$	2^7	II		
				L_5^{44}	L_6^{44}	–	$2\mathsf{A}_2$	$2^4 3^2$			
				L_6^{44}	L_5^{44}	–	$2\,{}^{\varepsilon}\mathsf{A}_2$	$2^4 3^2$			
				L_7^{44}	L_7^{44}	–	$\emptyset$	$2^4 3$			
53	53	1 1	-1 $+4$	L_1^{53}	–	–	D_4	$2^6 3^2$	I	6	$\frac{7^2}{2^6 3^2}$
				L_2^{53}	–	–	$2\mathsf{A}_2$	$2^4 3^2$			
				L_3^{53}	–	–	A_2	$2^2 3^2$			
				L_4^{53}	–	–	$\emptyset$	$2^3 3^2$			
				L_5^{53}	–	–	$\emptyset$	$2^2 3^2$			
				L_6^{53}	–	–	$\emptyset$	$2^4 3^2$			
56	14	1 2	$+1$ $+2$	L_1^{56}	L_1^{56}	–	$2\mathsf{C}_2(\sqrt{14})$	2^7	I	10	$\frac{5^2}{2^4 3^2}$
				L_2^{56}	L_2^{56}	–	$\emptyset$	$2^5 3$			
				L_3^{56}	L_3^{56}	–	$2\mathsf{A}_1 \perp 2\,{}^{\varepsilon}\mathsf{A}_1$	2^5			
				L_4^{56}	L_4^{56}	–	$\mathsf{F}_4(\sqrt{14})$	$2^7 3^2$			
				L_5^{56}	L_5^{56}	–	$\emptyset$	2^5			
				L_6^{56}	L_6^{56}	–	$\emptyset$	$2^6 3$			
				L_7^{56}	L_7^{56}	–	$\mathsf{C}_2(\sqrt{14})$	2^5	II		
				L_8^{56}	L_{10}^{56}	–	$2\,{}^{\varepsilon}\mathsf{A}_2$	$2^4 3^2$			
				L_9^{56}	L_9^{56}	–	$\emptyset$	$2^3 3$			
				L_{10}^{56}	L_8^{56}	–	$2\mathsf{A}_2$	$2^4 3^2$			

d	D	h t	$\mathrm{N}(\varepsilon)$ $\mathrm{N}(\pi)$	Gitter	ε–Skal.	$\mathfrak{p}(\frac{1}{2}L)$	$\mathsf{R}(L_i)$ od. $\overline{\mathsf{R}}(L_i)$	$\mathrm{e}(L_i^d)$	$\mathrm{spn}^+(\mathfrak{G})$	$\mathrm{h}(\mathfrak{G})$	$\mathrm{Maß}(\mathfrak{G})$
57	57	1 2	$+1$ -2	L_1^{57}	L_1^{57}	–	$2\mathsf{G}_2(\sqrt{57})$	$2^5 3^2$	I	7	$\frac{7^2}{2^4 3^2}$
				L_2^{57}	L_2^{57}	–	$\emptyset$	$2^3 3$			
				L_3^{57}	L_3^{57}	–	$\mathsf{A}_1 \perp {}^{\varepsilon}\mathsf{A}_1$	2^3			
				L_4^{57}	L_4^{57}	–	$2\mathsf{A}_1 \perp 2\,{}^{\varepsilon}\mathsf{A}_1$	2^5	II		
				L_5^{57}	L_5^{57}	–	$\emptyset$	$2^2 3$			
				L_6^{57}	L_7^{57}	–	${}^{\varepsilon}\mathsf{A}_2$	$2^2 3^2$			
				L_7^{57}	L_6^{57}	–	A_2	$2^2 3^2$			
60	15	2 3	$+1$ $-$	L_1^{60}	L_2^{60}	L_2^{60}	$2\overline{\mathsf{C}}_2(\sqrt{15})$	2^7	I	17	$\frac{1}{2^2}$
				L_2^{60}	L_1^{60}	L_1^{60}	$2\,{}^{\varepsilon}\overline{\mathsf{C}}_2(\sqrt{15})$	2^7			
				L_3^{60}	L_3^{60}	L_3^{60}	$2\mathsf{A}_1 \perp 2\,{}^{\varepsilon}\mathsf{A}_1$	2^6			
				L_4^{60}	L_4^{60}	L_4^{60}	$\emptyset$	2^5			
				L_5^{60}	L_5^{60}	L_5^{60}	$\emptyset$	$2^5 3$	II		
				L_6^{60}	L_6^{60}	L_6^{60}	$2\mathsf{A}_1 \perp 2\,{}^{\varepsilon}\mathsf{A}_1$	2^6			
				L_7^{60}	L_{10}^{60}	L_{10}^{60}	$\overline{\mathsf{F}}_4(\sqrt{15})$	$2^7 3^2$			
				L_8^{60}	L_8^{60}	L_8^{60}	$\emptyset$	$2^4 3$			
				L_9^{60}	L_9^{60}	L_9^{60}	$\emptyset$	$2^4 3^2$			
				L_{10}^{60}	L_7^{60}	L_7^{60}	${}^{\varepsilon}\overline{\mathsf{F}}_4(\sqrt{15})$	$2^7 3^2$			
				L_{11}^{60}	L_{12}^{60}	L_{11}^{60}	$2\,{}^{\varepsilon}\overline{\mathsf{G}}_2(\sqrt{15})$	$2^5 3^2$			
				L_{12}^{60}	L_{11}^{60}	L_{12}^{60}	$2\overline{\mathsf{G}}_2(\sqrt{15})$	$2^5 3^2$			
				L_{13}^{60}	L_{13}^{60}	L_{13}^{60}	$\mathsf{A}_2 \perp {}^{\varepsilon}\mathsf{A}_2$	$2^4 3^2$	III		
				L_{14}^{60}	L_{14}^{60}	L_{14}^{60}	$\emptyset$	$2^2 3^2$			
				L_{15}^{60}	L_{16}^{60}	L_{15}^{60}	$\overline{\mathsf{G}}_2(\sqrt{15})$	$2^3 3^2$			
				L_{16}^{60}	L_{15}^{60}	L_{16}^{60}	${}^{\varepsilon}\overline{\mathsf{G}}_2(\sqrt{15})$	$2^3 3^2$			
				L_{17}^{60}	L_{17}^{60}	L_{17}^{60}	$\mathsf{A}_1 \perp {}^{\varepsilon}\mathsf{A}_1$	2^4	IV		
61	61	1 1	-1 $+4$	L_1^{61}	–	–	D_4	$2^6 3^2$	I	6	$\frac{11^2}{2^6 3^2}$
				L_2^{61}	–	–	$\emptyset$	$2^3 3^2$			
				L_3^{61}	–	–	A_2	$2^2 3^2$			
				L_4^{61}	–	–	$\emptyset$	$2^4 3$			
				L_5^{61}	–	–	$\emptyset$	$2^2 3$			
				L_6^{61}	–	–	$2\mathsf{A}_1$	2^4			

d	D	h t	$N(\varepsilon)$ $N(\pi)$	Gitter	ε–Skal.	$\mathfrak{p}(\frac{1}{2}L)$	$\mathsf{R}(L_i)$ od. $\overline{\mathsf{R}}(L_i)$	$e(L_i^d)$	$\mathrm{spn}^+(\mathfrak{G})$	$h(\mathfrak{G})$	Maß($\mathfrak{G}$)
65	65	2 2	-1 $-$	L_1^{65}	$-$	L_4^{65}	$2\mathsf{A}_2$	$2^4 3^2$	I	8	$\frac{2^2}{3^2}$
				L_2^{65}	$-$	L_2^{65}	A_1	2^3			
				L_3^{65}	$-$	L_3^{65}	$\emptyset$	$2^2 3$			
				L_4^{65}	$-$	L_1^{65}	$\emptyset$	$2^4 3^2$			
				L_5^{65}	$-$	L_6^{65}	$2\mathsf{A}_1$	2^4	II		
				L_6^{65}	$-$	L_5^{65}	$\emptyset$	2^4			
				L_7^{65}	$-$	L_7^{65}	$\emptyset$	$2^2 3$			
				L_8^{65}	$-$	L_8^{65}	A_2	$2^3 3^2$			
69	69	1 2	$+1$ $+4$	L_1^{69}	L_6^{69}	$-$	D_4	$2^6 3^2$	I	13	$\frac{1}{2^2}$
				L_2^{69}	L_2^{69}	$-$	$\emptyset$	$2^3 3^2$			
				L_3^{69}	L_3^{69}	$-$	$\mathsf{A}_2 \perp {}^{\varepsilon}\mathsf{A}_2$	$2^3 3^2$			
				L_4^{69}	L_4^{69}	$-$	$\emptyset$	$2^2 3^2$			
				L_5^{69}	L_5^{69}	$-$	$\emptyset$	$2^3 3^2$			
				L_6^{69}	L_1^{69}	$-$	${}^{\varepsilon}\mathsf{D}_4$	$2^6 3^2$			
				L_7^{69}	L_7^{69}	$-$	$\mathsf{G}_2(\sqrt{69})$	$2^3 3^2$			
				L_8^{69}	L_8^{69}	$-$	$\emptyset$	$2^4 3^2$			
				L_9^{69}	L_9^{69}	$-$	$\emptyset$	$2^3 3^2$			
				L_{10}^{69}	L_{10}^{69}	$-$	$\emptyset$	$2^3 3^2$			
				L_{11}^{69}	L_{11}^{69}	$-$	$2\mathsf{G}_2(\sqrt{69})$	$2^5 3^2$			
				L_{12}^{69}	L_{13}^{69}	$-$	$2\,{}^{\varepsilon}\mathsf{A}_1$	2^4	II		
				L_{13}^{69}	L_{12}^{69}	$-$	$2\mathsf{A}_1$	2^4			
73	73	1 1	-1 $+2$	L_1^{73}	$-$	$-$	A_2	$2^2 3^2$	I	6	$\frac{11^2}{2^4 3^2}$
				L_2^{73}	$-$	$-$	$2\mathsf{A}_1$	2^4			
				L_3^{73}	$-$	$-$	A_1	2^2			
				L_4^{73}	$-$	$-$	$\emptyset$	2^2			
				L_5^{73}	$-$	$-$	$\emptyset$	$2 \cdot 3$			
				L_6^{73}	$-$	$-$	$\emptyset$	$2^2 3$			

d	D	h t	$\mathrm{N}(\varepsilon)$ $\mathrm{N}(\pi)$	Gitter	ε–Skal.	$\mathfrak{p}(\frac{1}{2}L)$	$\mathsf{R}(L_i)$ od. $\overline{\mathsf{R}}(L_i)$	$\mathrm{e}(L_i^d)$	$\mathrm{spn}^+(\mathfrak{G})$	$\mathrm{h}(\mathfrak{G})$	Maß($\mathfrak{G}$)
76	19	1 2	$+1$ -2	L_1^{76}	L_1^{76}	–	$2\mathsf{C}_2(\sqrt{19})$	2^7	I	13	$\frac{19^2}{2^6 3^2}$
				L_2^{76}	L_2^{76}	–	$\emptyset$	2^4			
				L_3^{76}	L_4^{76}	–	$2\,{}^{\varepsilon}\mathsf{A}_1$	2^4			
				L_4^{76}	L_3^{76}	–	$2\mathsf{A}_1$	2^4			
				L_5^{76}	L_5^{76}	–	$\emptyset$	$2^2 3$			
				L_6^{76}	L_6^{76}	–	$\emptyset$	$2^4 3$			
				L_7^{76}	L_7^{76}	–	$\mathsf{A}_2 \perp {}^{\varepsilon}\mathsf{A}_2$	$2^3 3^2$			
				L_8^{76}	L_8^{76}	–	$\emptyset$	$2^5 3$	II		
				L_9^{76}	L_9^{76}	–	$\mathsf{C}_2(\sqrt{19})$	2^5			
				L_{10}^{76}	L_{10}^{76}	–	$\mathsf{F}_4(\sqrt{19})$	$2^7 3^2$			
				L_{11}^{76}	L_{11}^{76}	–	$\emptyset$	2^3			
				L_{12}^{76}	L_{12}^{76}	–	$\mathsf{A}_1 \perp {}^{\varepsilon}\mathsf{A}_1$	2^3			
				L_{13}^{76}	L_{13}^{76}	–	$\emptyset$	$2^4 3$			
77	77	1 2	$+1$ $+4$	L_1^{77}	L_6^{77}	–	D_4	$2^6 3^2$	I	13	$\frac{1}{2^2}$
				L_2^{77}	L_2^{77}	–	$\emptyset$	$2^3 3^2$			
				L_3^{77}	L_3^{77}	–	$\mathsf{A}_2 \perp {}^{\varepsilon}\mathsf{A}_2$	$2^3 3^2$			
				L_4^{77}	L_4^{77}	–	$\emptyset$	$2^4 3$			
				L_5^{77}	L_5^{77}	–	$\emptyset$	$2^3 3$			
				L_6^{77}	L_1^{77}	–	${}^{\varepsilon}\mathsf{D}_4$	$2^6 3^2$			
				L_7^{77}	L_7^{77}	–	$2\mathsf{A}_1 \perp 2\,{}^{\varepsilon}\mathsf{A}_1$	2^5			
				L_8^{77}	L_{13}^{77}	–	$2\mathsf{A}_2$	$2^4 3^2$	II		
				L_9^{77}	L_{11}^{77}	–	A_2	$2^2 3^2$			
				L_{10}^{77}	L_{12}^{77}	–	$\emptyset$	$2^2 3^2$			
				L_{11}^{77}	L_9^{77}	–	${}^{\varepsilon}\mathsf{A}_2$	$2^2 3^2$			
				L_{12}^{77}	L_{10}^{77}	–	$\emptyset$	$2^2 3^2$			
				L_{13}^{77}	L_8^{77}	–	$2\,{}^{\varepsilon}\mathsf{A}_2$	$2^4 3^2$			

d	D	h / t	$\mathrm{N}(\varepsilon)$ / $\mathrm{N}(\pi)$	Gitter	ε–Skal.	$\mathfrak{p}(\frac{1}{2}L)$	$\mathsf{R}(L_i)$ od. $\overline{\mathsf{R}}(L_i)$	$\mathrm{e}(L_i^d)$	$\mathrm{spn}^+(\mathfrak{G})$	$\mathrm{h}(\mathfrak{G})$	$\mathrm{Maß}(\mathfrak{G})$
85	85	2 / 2	-1 / $+4$	L_1^{85}	–	L_6^{85}	D_4	$2^6 3^2$	I	14	$\frac{3^2}{2^4}$
				L_2^{85}	–	L_2^{85}	$\emptyset$	$2^3 3^2$			
				L_3^{85}	–	L_3^{85}	A_2	$2^3 3^2$			
				L_4^{85}	–	L_4^{85}	$\emptyset$	$2^3 3$			
				L_5^{85}	–	L_5^{85}	$\emptyset$	$2^2 3$			
				L_6^{85}	–	L_1^{85}	$\emptyset$	$2^6 3^2$			
				L_7^{85}	–	L_7^{85}	A_1	2^3			
				L_8^{85}	–	L_8^{85}	A_2	$2^3 3^2$	II		
				L_9^{85}	–	L_{11}^{85}	A_2	$2^2 3^2$			
				L_{10}^{85}	–	L_{10}^{85}	$\emptyset$	$2 \cdot 3^2$			
				L_{11}^{85}	–	L_9^{85}	$\emptyset$	$2^2 3^2$			
				L_{12}^{85}	–	L_{12}^{85}	$\emptyset$	$2^3 3$			
				L_{13}^{85}	–	L_{13}^{85}	$2\mathsf{A}_1$	2^5			
				L_{14}^{85}	–	L_{14}^{85}	$\emptyset$	$2^2 3$			

d	D	h / t	$\mathrm{N}(\varepsilon)$ / $\mathrm{N}(\pi)$	Gitter	ε–Skal.	$\mathfrak{p}(\frac{1}{2}L)$	$\mathsf{R}(L_i)$ od. $\overline{\mathsf{R}}(L_i)$	$\mathrm{e}(L_i^d)$	$\mathrm{spn}^+(\mathfrak{G})$	$\mathrm{h}(\mathfrak{G})$	$\mathrm{Maß}(\mathfrak{G})$
88	22	1 / 2	$+1$ / -2	L_1^{88}	L_1^{88}	–	$2\mathsf{C}_2(\sqrt{22})$	2^7	I	17	$\frac{23^2}{2^6 3^2}$
				L_2^{88}	L_2^{88}	–	$\emptyset$	2^4			
				L_3^{88}	L_3^{88}	–	$\mathsf{A}_1 \perp {}^{\varepsilon}\mathsf{A}_1$	2^3			
				L_4^{88}	L_4^{88}	–	$\emptyset$	$2^3 3$			
				L_5^{88}	L_5^{88}	–	$\emptyset$	$2 \cdot 3$			
				L_6^{88}	L_7^{88}	–	A_2	$2^2 3^2$			
				L_7^{88}	L_6^{88}	–	${}^{\varepsilon}\mathsf{A}_2$	$2^2 3^2$			
				L_8^{88}	L_8^{88}	–	$\emptyset$	$2^5 3$	II		
				L_9^{88}	L_9^{88}	–	$2\mathsf{A}_1 \perp 2\,{}^{\varepsilon}\mathsf{A}_1$	2^5			
				L_{10}^{88}	L_{10}^{88}	–	$\mathsf{F}_4(\sqrt{22})$	$2^7 3^2$			
				L_{11}^{88}	L_{11}^{88}	–	$\emptyset$	2^3			
				L_{12}^{88}	L_{12}^{88}	–	$\emptyset$	$2^4 3$			
				L_{13}^{88}	L_{13}^{88}	–	$\emptyset$	$2^4 3^2$			
				L_{14}^{88}	L_{14}^{88}	–	$\emptyset$	$2^3 3$			
				L_{15}^{88}	L_{15}^{88}	–	$\mathsf{A}_2 \perp {}^{\varepsilon}\mathsf{A}_2$	$2^3 3^2$			
				L_{16}^{88}	L_{16}^{88}	–	$\mathsf{A}_1 \perp {}^{\varepsilon}\mathsf{A}_1$	2^3			
				L_{17}^{88}	L_{17}^{88}	–	$\emptyset$	$2^2 3$			

d	D	h t	$\mathrm{N}(\varepsilon)$ $\mathrm{N}(\pi)$	Gitter	ε–Skal.	$\mathfrak{p}(\frac{1}{2}L)$	$\mathsf{R}(L_i)$ od. $\overline{\mathsf{R}}(L_i)$	$\mathrm{e}(L_i^d)$	$\mathrm{spn}^+(\mathfrak{G})$	$\mathrm{h}(\mathfrak{G})$	$\mathrm{Maß}(\mathfrak{G})$
89	89	1 1	-1 $+2$	L_1^{89}	–	–	$2\mathsf{A}_2$	$2^4 3^2$	I	10	$\frac{13^2}{2^4 3^2}$
				L_2^{89}	–	–	$2\mathsf{A}_1$	2^4			
				L_3^{89}	–	–	A_1	2^2			
				L_4^{89}	–	–	$\emptyset$	$2^2 3$			
				L_5^{89}	–	–	$\emptyset$	2^3			
				L_6^{89}	–	–	$\emptyset$	2^2			
				L_7^{89}	–	–	$2\mathsf{A}_1$	2^4			
				L_8^{89}	–	–	$\emptyset$	2^2			
				L_9^{89}	–	–	$\emptyset$	$2^3 3$			
				L_{10}^{89}	–	–	$\emptyset$	$2^3 3$			
92	23	1 2	$+1$ $+2$	L_1^{92}	L_1^{92}	–	$2\mathsf{C}_2(\sqrt{23})$	2^7	I	20	$\frac{5^2}{2^2 3^2}$
				L_2^{92}	L_2^{92}	–	$\emptyset$	$2^5 3$			
				L_3^{92}	L_3^{92}	–	$\mathsf{C}_2(\sqrt{23})$	2^5			
				L_4^{92}	L_4^{92}	–	$\mathsf{F}_4(\sqrt{23})$	$2^7 3^2$			
				L_5^{92}	L_5^{92}	–	$\emptyset$	2^5			
				L_6^{92}	L_6^{92}	–	$\emptyset$	2^5			
				L_7^{92}	L_7^{92}	–	$\mathsf{C}_2(\sqrt{23})$	2^5			
				L_8^{92}	L_8^{92}	–	$\emptyset$	2^4			
				L_9^{92}	L_{10}^{92}	–	$2\mathsf{A}_2$	$2^4 3^2$			
				L_{10}^{92}	L_9^{92}	–	$2\,{}^{\varepsilon}\mathsf{A}_2$	$2^4 3^2$			
				L_{11}^{92}	L_{11}^{92}	–	$\emptyset$	$2^3 3$			
				L_{12}^{92}	L_{12}^{92}	–	$\emptyset$	$2^3 3$			
				L_{13}^{92}	L_{13}^{92}	–	$\emptyset$	$2^4 3$			
				L_{14}^{92}	L_{14}^{92}	–	$\emptyset$	$2^6 3$			
				L_{15}^{92}	L_{15}^{92}	–	$\emptyset$	$2^5 3$			
				L_{16}^{92}	L_{16}^{92}	–	$\emptyset$	$2^4 3^2$			
				L_{17}^{92}	L_{19}^{92}	–	A_2	$2^2 3^2$	II		
				L_{18}^{92}	L_{18}^{92}	–	$\mathsf{A}_1 \perp {}^{\varepsilon}\mathsf{A}_1$	2^3			
				L_{19}^{92}	L_{17}^{92}	–	${}^{\varepsilon}\mathsf{A}_2$	$2^2 3^2$			
				L_{20}^{92}	L_{20}^{92}	–	$\emptyset$	$2 \cdot 3$			

d	D	h / t	$\mathrm{N}(\varepsilon)$ / $\mathrm{N}(\pi)$	Gitter	ε–Skal.	$\mathfrak{p}(\frac{1}{2}L)$	$\mathsf{R}(L_i)$ od. $\overline{\mathsf{R}}(L_i)$	$\mathrm{e}(L_i^d)$	$\mathrm{spn}^+(\mathfrak{G})$	$\mathrm{h}(\mathfrak{G})$	$\mathrm{Maß}(\mathfrak{G})$
93	93	1 / 2	+1 / +4	L_1^{93}	L_1^{93}	–	$2\mathsf{G}_2(\sqrt{93})$	$2^5 3^2$	I	18	$\frac{3^2}{2^4}$
				L_2^{93}	L_2^{93}	–	$\mathsf{G}_2(\sqrt{93})$	$2^3 3^2$			
				L_3^{93}	L_3^{93}	–	$\emptyset$	$2^3 3^2$			
				L_4^{93}	L_4^{93}	–	$\mathsf{A}_1 \perp {}^{\varepsilon}\mathsf{A}_1$	2^3			
				L_5^{93}	L_5^{93}	–	$\emptyset$	$2^3 3$			
				L_6^{93}	L_6^{93}	–	$\emptyset$	$2^2 3$			
				L_7^{93}	L_{18}^{93}	–	${}^{\varepsilon}\mathsf{A}_2$	$2^2 3^2$	II		
				L_8^{93}	L_{16}^{93}	–	${}^{\varepsilon}\mathsf{D}_4$	$2^6 3^2$			
				L_9^{93}	L_{15}^{93}	–	${}^{\varepsilon}\mathsf{A}_2$	$2^2 3^2$			
				L_{10}^{93}	L_{13}^{93}	–	$\emptyset$	$2^3 3^2$			
				L_{11}^{93}	L_{17}^{93}	–	$\emptyset$	$2^3 3^2$			
				L_{12}^{93}	L_{14}^{93}	–	$\emptyset$	$2 \cdot 3^2$			
				L_{13}^{93}	L_{10}^{93}	–	$\emptyset$	$2^3 3^2$			
				L_{14}^{93}	L_{12}^{93}	–	$\emptyset$	$2 \cdot 3^2$			
				L_{15}^{93}	L_9^{93}	–	A_2	$2^2 3^2$			
				L_{16}^{93}	L_8^{93}	–	D_4	$2^6 3^2$			
				L_{17}^{93}	L_{11}^{93}	–	$\emptyset$	$2^3 3^2$			
				L_{18}^{93}	L_7^{93}	–	A_2	$2^2 3^2$			
97	97	1 / 1	−1 / +2	L_1^{97}	–	–	A_2	$2^2 3^2$	I	10	$\frac{17^2}{2^4 3^2}$
				L_2^{97}	–	–	$2\mathsf{A}_1$	2^4			
				L_3^{97}	–	–	A_1	2^2			
				L_4^{97}	–	–	A_1	2^2			
				L_5^{97}	–	–	$\emptyset$	$2^2 3$			
				L_6^{97}	–	–	$\emptyset$	$2 \cdot 3$			
				L_7^{97}	–	–	$\emptyset$	2^2			
				L_8^{97}	–	–	$\emptyset$	2^2			
				L_9^{97}	–	–	$\emptyset$	$2 \cdot 3$			
				L_{10}^{97}	–	–	$\emptyset$	2			

d	D	h / t	$\mathrm{N}(\varepsilon)$ / $\mathrm{N}(\pi)$	Gitter	ε–Skal.	$\mathfrak{p}(\frac{1}{2}L)$	$\mathsf{R}(L_i)$ od. $\overline{\mathsf{R}}(L_i)$	$\mathrm{e}(L_i^d)$	$\mathrm{spn}^+(\mathfrak{G})$	$\mathrm{h}(\mathfrak{G})$	$\mathrm{Maß}(\mathfrak{G})$
101	101	1 / 1	-1 / $+4$	L_1^{101}	–	–	$2\mathsf{A}_2$	$2^4 3^2$	I	15	$\frac{19^2}{2^6 3^2}$
				L_2^{101}	–	–	A_2	$2^2 3^2$			
				L_3^{101}	–	–	$\emptyset$	$2^2 3^2$			
				L_4^{101}	–	–	D_4	$2^6 3^2$			
				L_5^{101}	–	–	$2\mathsf{A}_1$	2^4			
				L_6^{101}	–	–	$\emptyset$	$2^3 3$			
				L_7^{101}	–	–	$\emptyset$	$2^4 3$			
				L_8^{101}	–	–	$\emptyset$	$2^4 3^2$			
				L_9^{101}	–	–	$\emptyset$	$2^2 3$			
				L_{10}^{101}	–	–	$\emptyset$	$2^3 3^2$			
				L_{11}^{101}	–	–	$2\mathsf{A}_1$	2^4			
				L_{12}^{101}	–	–	$\emptyset$	$2^2 3$			
				L_{13}^{101}	–	–	$\emptyset$	$2^3 3$			
				L_{14}^{101}	–	–	$\emptyset$	$2^4 3$			
				L_{15}^{101}	–	–	$\emptyset$	2^3			

In 9 der betrachteten Fälle liefert die $\mathfrak{p}$–Nachbarbildung bzgl. des Primideals, das $2\,\mathfrak{o}$ teilt, nicht das ganze Geschlecht $\mathfrak{G}$ der geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter der Dimension 4. In diesen Fällen muß zu einem weiteren Primideal $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ ein $\mathfrak{q}$–Nachbar berechnet werden. Ein jeweils geeignetes Primideal $\mathfrak{q}$ wird in der folgenden Tabelle angegeben. Ist $\mathfrak{q}$ ein Hauptideal, so wird sein erzeugendes Element τ und dessen Norm $\mathrm{N}(\tau)$ aufgeführt.

d	D	h	$\mathrm{N}(\varepsilon)$	$\mathfrak{q}$	τ	$\mathrm{N}(\tau)$	Wechsel
21	21	1	$+1$	$\mathfrak{q}^2 = 3\,\mathfrak{o}$	$1+\omega$	-3	I $\longleftrightarrow$ II
28	7	1	$+1$	$\mathfrak{q}^2 = 7\,\mathfrak{o}$	ω	-7	I $\longleftrightarrow$ II
56	14	1	$+1$	$\mathfrak{q}^2 = 7\,\mathfrak{o}$	$7+2\,\omega$	-7	I $\longleftrightarrow$ II
60	15	2	$+1$	$\mathfrak{q}^2 = 3\,\mathfrak{o}$	–	–	I $\longleftrightarrow$ IV
69	69	1	$+1$	$\mathfrak{q}^2 = 23\,\mathfrak{o}$	$10+3\,\omega$	-23	I $\longleftrightarrow$ II
77	77	1	$+1$	$\mathfrak{q}^2 = 7\,\mathfrak{o}$	$3+\omega$	-7	I $\longleftrightarrow$ II
85	85	2	-1	$\mathfrak{q}^2 = 5\,\mathfrak{o}$	–	–	I $\longleftrightarrow$ II
92	23	1	$+1$	$\mathfrak{q}^2 = 23\,\mathfrak{o}$	ω	-23	I $\longleftrightarrow$ II
93	93	1	$+1$	$\mathfrak{q}^2 = 3\,\mathfrak{o}$	$4+\omega$	-3	I $\longleftrightarrow$ II

4.3 Folgerung

Aus der Tabelle, die die vollständige Klassifizierung bis zur Körperdiskriminante $d = 101$ darstellt, folgt der Satz:

Satz 4.1 *Sei $\mathfrak{G}$ das Geschlecht der geraden, unimodularen, positiv definiten Gitter der Dimension 4 über einem reell–quadratischen Zahlkörper F. Die Körperdiskriminante $d = 97$ ist die kleinste, für die das Geschlecht $\mathfrak{G}$ über F ein Gitter mit einer orthogonale Gruppe der Ordnung 2 enthält.*

<u>Beobachtung:</u> Sei $\sum\limits_{K \in \mathrm{spn}^+(L)} \frac{1}{e(K)}$ das Maß des eigentlichen Spinorgeschlechts von L eines Gitters im Geschlecht $\mathfrak{G}$. Ist die Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter im Geschlecht $\mathfrak{G}$ gleich 1, so ist das Maß von $\mathrm{spn}^+(L)$ offensichtlich gleich dem Maß des ganzen Geschlechts $\mathfrak{G}$. Ist die Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter im Geschlecht $\mathfrak{G}$ gleich 2, so beobachtet man, daß das Maß des eigentlichen Spinorgeschlechts $\frac{1}{2}$–mal das Maß von $\mathfrak{G}$ ist. Ist die Anzahl der eigentlichen Spinorgeschlechter in $\mathfrak{G}$ gleich 4, so beobachtet man, daß das Maß des eigentlichen Spinorgeschlechts $\frac{1}{4}$–mal das Maß von $\mathfrak{G}$ ist.

Anhang

Zum Abschluß werden noch ein paar Computerprogramme etwas genauer beschrieben. Die Programme sind speziell für Gitter über reell–quadratischen Zahlkörpern realisiert.

Folgende Programme, standen bereits zur Verfügung:

q–autom Dieses Programm berechnet nach einem Algorithmus von Souvignier und Tubbesing die Ordnung der Orthogonalen Gruppe eines Gitters und gibt ihre Erzeuger an.

q–isom Dieses Programm von Tubbesing testet zwei Gitter anhand ihrer Grammatrix auf Isometrie.

q–vek Dieses Programm von Tubbesing gibt zu einem Gitter die Vektoren einer Länge aus.

q–nvek Dieses Programm von Hohberg und Tubbesing berechnet eine möglichst kleine Liste von Vektoren in einem Gitter, die bereits zu allen $\mathfrak{p}$–Nachbarn des Gitters führen. Dabei teilt das Primideal $\mathfrak{p}$ das Ideal $2\,\mathfrak{o}$. Das Programm stellt dazu eine Liste aller Vektoren auf, die Vertreter der Elemente der Faktorgruppe $L/\mathfrak{p}L$ sind. Aus dieser Liste werden nur Vektoren oder eine geeignete Modifizierung dieser Vektoren betrachtet, deren Länge ein Element aus $2\,\mathfrak{p}^2$ ist, und die somit zu einem geraden $\mathfrak{p}$–Nachbarn von L führen. Auf dieser eingeschränkten Menge von Vertretern modulo $\mathfrak{p}L$ läßt man die orthogonale Gruppe des Gitters L, berechnet nach einem Algorithmus von q–autom, operieren. Vektoren dieser Menge, die durch eine Isometrie von L auf eine anderes Element in der Menge modulo $\mathfrak{p}L$ übergehen, führen zu isometrischen $\mathfrak{p}$–Nachbarn von L, so daß es ausreicht, einen dieser Vektoren bereitzustellen.

Die im Rahmen der Arbeit entstandenen Programme:

ein_qnachbar Dieses Programm berechnet zu einem freien Gitter L den $\mathfrak{p}$–Nachbarn zu einem Vektor v. Dabei ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, das $2\,\mathfrak{o}$ teilt, oder ein Primideal, das Hauptideal ist. Die Basis des $\mathfrak{p}$–Nachbarn wird wie in Satz 2.4 erstellt. D.h. als erstes wird der Vektor zur Nachbarbildung , wie in (2) beschrieben, modifiziert, so daß eine seiner Komponenten gleich 1 ist. Die Basis von L wird dann sortiert nach Vektoren, die mit v ein Skalarprodukt in $\mathfrak{p}$ haben, und Vektoren, die mit v ein Skalarprodukt in $\mathfrak{o} - \mathfrak{p}$ haben. Mit Hilfe einer Unterroutine, die im Körper $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ein

Element invertiert, läßt sich nun die in Satz 2.4 angegebene Basis des $\mathfrak{p}$–Nachbarn $L(v)$ aufstellen und mit Hilfe der Grammatrix des Gitters L und der Basis von $L(v)$ die Grammatrix von $L(v)$ berechnen.

alle_q_Nachbarn_eines_Gitters Dieses Programm ist ein shell–skript. Es berechnet alle $\mathfrak{p}$–Nachbarn eines Gitters L. Dabei teilt das Primideal $\mathfrak{p}$ das Ideal $2\,\mathfrak{o}$. Dazu wird im shell–skript zuerst das Programm q–nvek aufgerufen. Es berechnet eine möglichst kleine Liste von Vektoren, die bereits zu allen $\mathfrak{p}$–Nachbarn des Gitters führen. Zu jedem Vektor dieser Liste wird durch das Programm ein_qnachbar ein $\mathfrak{p}$–Nachbar von L berechnet.
Die auf diese Weise berechneten $\mathfrak{p}$–Nachbarn von L sind bis auf Isometrie bereits alle $\mathfrak{p}$–Nachbarn von L.

reduktion Dieses Programm reduziert die Einträge einer Grammatrix eines Gitters durch iteratives Anwenden der klassischen Binärreduktion auf 2–dimensionale Untermatrizen entlang der Diagonalen. Die Binärreduktion basiert im Wesentlichen auf der Berechnung von Resten in einem Ring ganzer Zahlen. Im Ring der ganzen Zahlen $\mathfrak{o}$ eines reell–quadratischen Zahlkörpers gibt es zwei Möglichkeiten, einen Rest geeignet zu wählen. Zum einen kann die Minimierung des Betrags der Norm eines Restes in $\mathbb{Z}$ ein geeignetes Auswahlkriterium sein. Im Fall der Redutkion der Einträge einer Grammatrix erweist sich die andere Möglichkeit als günstig: in der Darstellung des Restes $a + b\,\omega$, eine Zahl in $\mathfrak{o}$ mit $a, b, \in \mathbb{Z}$, wird der Betrag der Summe $a + b$ in $\mathbb{Z}$ minimiert.

skalierung Dieses Programm ist ein shell–skript. Es skaliert die Grammatrix eines Gitters mit ε, falls die Norm von ε positiv ist, wie es in Kapitel 1 beschrieben wird. Danach wird mit Hilfe des von Tubbesing geschriebenen Programms q–isom überprüft, ob die Ausgangs–Grammatrix und die skalierte Grammatrix zueinander isometrisch sind oder nicht.

konjugation Dieses Programm ist ein shell–skript. Es multipliziert die Vektoren eines Gitters mit einem Primideal $\mathfrak{p}$, das $2\,\mathfrak{o}$ teilt und kein Hauptideal ist. Dazu wird nach dem in Kapitel 2 beschriebenen Verfahren zu 2–dimensionalen Untermoduln $\mathfrak{p}\,z_i + \mathfrak{p}\,z_i$ eine $\mathfrak{o}$–Basis konstruiert, so daß man wieder eine $\mathfrak{o}$–Basis des mit $\mathfrak{p}$ multiplizierten Gitters erhält. Die Grammatrix des Ausgangs–Gitters wird mit $\frac{1}{2}$ skaliert und aus skalierter Grammatrix und neuer Basis wir die Grammatrix des neuen Gitters berechnet. Dies folgt der in Kapitel 1 beschriebenen Konstruktion, die zu einem Gitter in demselben Geschlecht führt. Danach wird mit Hilfe des Programms q–isom überprüft, ob die Ausgangs–Grammatrix und die neue Grammatrix zueinander isometrisch sind oder nicht.

Literatur

[1] Benham, J.W.; Hsia, J.S.: Spinor equivalence of quadratic forms; Journal of Number Theory, 17, 337–342 (1983)

[2] Costello, P.J.; Hsia, J.S.: Even unimodular 12–dimensional quadratic forms over $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$; Adv. Math. 64, 241–278 (1987)

[3] Habdank, B.: Gerade unimodulare Gitter in Dimension 4 über reell–quadratischen Zahlkörpern; Diplomarbeit, Bielefeld (Dezember 1990)

[4] Han Shi-an: The Classes of some Positive Definite Unimodular Lattices over $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ and $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$; East China Normal University, Dep. of Math., Preprint Series No. P84/015 (1984)

[5] Hoberg, A.: Zur Klassifikation quaternärer Gitter über reellquadratischen Zahlkörpern; Diplomarbeit, Bielefeld (Februar 1993)

[6] Hsia, J.S.: Spinor norms of local integral rotations I; Pacific Journal of Math., Vol. 57, No. 1, 199–206 (1975)

[7] Humphreys, J.E.: Introduction to lie algebras and representation theory; Springer–Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1972)

[8] Kitaoka, Y.: Class numbers of quadratic forms over real quadratic fields; Nagoya Math. J. 66, 89–98 (1977)

[9] Kneser, M.: Klassenzahlen indefiniter quadratischer Formen in drei oder mehr Veränderlichen; Arch. d. Math. 7, 323–332 (1956)

[10] Kneser, M.: Klassenzahlen definiter quadratischer Formen; Arch. d. Math. 8, 241–250 (1957)

[11] Mimura, Y.: On 2–lattices over real quadratic integers; Math. Seminar Notes 7, 327–342 (1979)

[12] O'Meara, O.T.: Introduction to quadratic forms; Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1971)

[13] Siegel, C.L.: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen III; Ann. Math. 38, 212–291 (1937)

[14] Scharlau, R.: Unimoduar lattices over real quadratic fields; Math. Z. 216, 437–452 (1994)

[15] Takada, I.: On the classification of definite unimodular lattices over the ring of integers in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; Math. Japonica 3, 423–433 (1985)

[16] Venkov, B.B.: On the classifikation of integral even unimodular 24–dimensional quadratic forms; Proc. Steklov Inst. Math. 4, 63–74 (1980)

[17] Zagier, D.B.: Zetafunktionen und quadratische Körper; Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1981)