Strategien für Systeme von zufällig entscheidenden Beratern und die Kompetenz von „3-Hirn“

Britta Schanz und Swen Osterkamp

Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
33501 Bielefeld
Germany

Zusammenfassung

Gegeben seien verschiedene Alternativen und mehrere Berater, die jeweils eine davon empfehlen. Dabei stellt sich die Frage, welche Informationen nötig sind, um den erfolgversprechendsten der Vorschläge der Berater zu bestimmen. Wir modellieren Beratung stochastisch als zufällige Entscheidung und geben Antworten für eine große Anzahl von Konstellationen.
Das 3-Hirn ist eine aus dem Schachspiel stammende Idee, drei Berater zu einem neuen zu vereinen: Für eine gegebene Schachstellung machen zwei Schachcomputer je einen Zugvorschlag. Falls die Züge übereinstimmen, muß dieser gespielt werden. Andernfalls wählt ein menschlicher Koordinator einen dieser beiden aus. Wir definieren 3-Hirn im Rahmen unseres stochastischen Modells und vergleichen die Erwartungswerte von verschiedenen 3-Hirnen. Insbesondere zeigen wir, daß bei drei identischen Beratern, von denen zwei in gewisser Weise positiv korrelieren, der dritte (von den anderen unabhängige) der Koordinator sein sollte.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Beratung durch Experten (Menschen oder Computer) wird immer wichtiger, da die Komplexität von Entscheidungen ständig zunimmt, sowohl im privaten als auch im öffentlichen Bereich. In dieser Arbeit betrachten wir nur das Resultat einer Beratung, unabhängig von dem speziellen Problem. So gesehen kann ein Berater vollständig durch eine bestimmte Anzahl relativer Häufigkeiten beschrieben werden, nämlich wie häufig sein Vorschlag tatsächlich die beste, zweitbeste, ... schlechteste Alternative ist. Diese Intuition liegt unserem Modell zugrunde. Wir definieren einen Berater als die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen auf reellen Zahlen, genannt „Gewichte". Im zweiten Kapitel entwickeln wir die Terminologie und einige Methoden zum Vergleich der verschiedenen Strategien, zwischen Vorschlägen mehrerer Berater zu entscheiden. Falls alle Berater unterschiedliche Vorschläge machen, scheint es vernünftig zu sein, demjenigen mit dem größten „Erwartungswert" zu folgen. Dies bestätigt sich leicht im Falle von insgesamt zwei Beratern, andernfalls gibt es jedoch Gegenbeispiele. Trotzdem liefert eine stärkere Relation zwischen den Wahrscheinlichkeitsverteilungen das gewünschte Ergebnis. Außerdem können wir zwischen den Vorschlägen von Beratern mit gleichem Erwartungswert den erfolgversprechenderen bestimmen, falls ihre Verteilungen über Zentrierungen zusammenhängen.

Der Ausdruck 3-Hirn wurde von Althöfer 1985 geprägt [Alt 85]. Zusammen mit unterschiedlichen Paaren etwa gleichstarker Schachcomputer nahm Althöfer als Koordinator an mehreren Turnieren und Wettkämpfen teil. Dabei war das 3-Hirn jedesmal deutlich besser (ungefähr 200 Elo-Punkte) als die Computer für sich alleine normalerweise [Alt 93] [Bau 94]. Unabhängig davon führten Weigel [Wei 88] und Mally [Mal 88] ähnliche Experimente durch. Nehonsky erprobte ein 3-Hirn im Fernschach [Neh 87].

Zwischen den legalen Zügen in einer Schachstellung auszuwählen, kann als Beratung durch einen Schachspieler aufgefaßt werden. Die Alternativen, d.h. die Züge, lassen sich mittels der Werte der entstehenden Positionen vergleichen. (Tatsächlich beruht die Zugauswahl sowohl bei Menschen als auch bei Computern auf Schätzungen dieser Werte. Als Einheit dient ein Vorsprung von einem Bauern bei ansonsten ausgeglichener Stellung.) Somit erweist sich das 3-Hirn als ein Konzept, drei Berater zu einem neuen zusammenzufassen. Der ihm gewidmete Abschnitt beginnt mit einem Vergleich zweier 3-Hirne, die sich nur in ihren Koordinatoren unterscheiden. Dadurch erhalten wir ein grobes Kriterium dafür, daß ein 3-Hirn besser als seine beiden Mitarbeiter ist. Zuletzt stellen wir verschiedene Anordnungen von drei Beratern zu einem 3-Hirn gegenüber, und zwar für Beratertripel, die bis zu einem gewissen Grad zwei Computer und einen Menschen modellieren.

Die vorliegende Arbeit basiert auf einer gekürzten und überarbeiteten Version unserer Diplomarbeit [OS 94]. Wir danken Herrn PD Dr. Ingo Althöfer für seine engagierte Unterstützung.

2 Gleichberechtigte Berater

2.1 Berater und ihre Erwartungswerte

Im Alltag ist ein Berater typischerweise jemand, der aus mehreren zur Wahl stehenden Möglichkeiten die empfiehlt, die er für die beste hält. Da er jedoch nicht weiß, welche tatsächlich die beste Möglichkeit ist, wird er sie nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit treffen. Dieses Verständnis legen wir unserem Modell zugrunde.

Wir betrachten n Alternativen, denen die Gewichte $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet sind. Es gelte $w_1 \geq w_2 \geq \ldots \geq w_n$. Einen **Berater P über n Alternativen** identifizieren wir mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung[1] auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$

$\mathrm{P} = (p_1, \ldots, p_n)$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$ und $p_i \geq 0$ für alle i.

Die p_i stehen dabei für die Wahrscheinlichkeiten, mit denen der Berater P die Alternative mit dem Gewicht w_i, also die i-t-beste, vorschlägt.

Ein Berater $\mathrm{P} = (p_1, \ldots, p_n)$ heißt
Experte, falls $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n$;
Anti-Experte, falls $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$;
Rater, falls $p_1 = p_2 \ldots = p_n = \frac{1}{n}$;
k-Halb-Experte, falls für ein $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ gilt : $p_i \geq p_j$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $j \in \{k+1, \ldots, n\}$ und
regulärer Berater, falls $p_i > 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Beispiel 2.1.1 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ ist ein Experte. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ist ein Rater.
$(\frac{5}{23}, \frac{7}{23}, \frac{6}{23}, \frac{2}{23}, \frac{3}{23})$ ist ein 3-Halb-Experte.

Im folgenden möchten wir die Erfolgsaussichten der Vorschläge der Berater miteinander vergleichen. Ein natürliches Maß dafür ist der „Gewinn“, den der Vorschlag eines Beraters erwarten läßt. Der erwartete Gewinn eines Beraters $\mathrm{P} = (p_1, \ldots, p_n)$ ist $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i\ p_i =: \mathrm{E_P}\,(\mathrm{P})$. Diese Größe nennen wir den **Erwartungswert von P**. Der Sinn der Notation wird im Abschnitt 2.2 deutlich werden.

Bemerkung 2.1.2 i) Für einen Berater P gilt $w_1 \geq \mathrm{E_P}\,(\mathrm{P}) \geq w_n$.

ii) Ist P ein Experte , Q ein Anti-Experte und R ein Rater, so ist

$$\mathrm{E_P}\,(\mathrm{P}) \geq \mathrm{E_R}\,(\mathrm{R}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} w_i \ \geq \mathrm{E_Q}\,(\mathrm{Q}).$$

[1]Mathematisch exakt wäre es, einen Berater als die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen aufzufassen. Wir werden jedoch auf jegliche Formalisierung in dieser Hinsicht verzichten, da sie zu keinerlei Erkenntnisgewinn verhelfen würde.

iii) Ist P ein Experte und P′ ein Berater, dessen Einträge eine Umordnung der Einträge von P sind, so ist der Erwartungswert von P mindestens so groß wie der von P′.

Beweis: i) folgt aus der Monotonie der Gewichte. Die beiden Ungleichungen in ii) folgen aus den Bemerkungen 2.4.3 ii) und 2.4.8. Der Beweis von iii) geht mittels Induktion.

Definition 2.1.3 Betrachten wir zwei Berater P und Q gleichzeitig, dann bezeichnen wir ihre **gemeinsame Verteilung** mit $([\mathrm{PQ}]_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$. Dabei sei $[\mathrm{PQ}]_{ij}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Berater P die Alternative i und Q die Alternative j vorschlägt. Es gilt $p_i = \sum_{j=1}^{n} [\mathrm{PQ}]_{ij}$ und $q_j = \sum_{i=1}^{n} [\mathrm{PQ}]_{ij}$. Deshalb bezeichnen wir die p_i und q_j in diesem Zusammenhang auch als Randwahrscheinlichkeiten.

P und Q heißen **unabhängig**, falls $[\mathrm{PQ}]_{ij} = p_i q_j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Die gemeinsame Verteilung von P und Q heißt **regulär**, wenn $[\mathrm{PQ}]_{ij} > 0$ für alle i, j.

Die gemeinsame Verteilung von P und Q heißt **positiv korreliert**[2],
falls $[\mathrm{PQ}]_{ii} \geq p_i q_i$ für alle i und $[\mathrm{PQ}]_{ij} \leq p_i q_j$ für alle $i \neq j$.

Analog definieren wir die ersten drei Begriffe für mehr als zwei Berater.

Großbuchstaben wie P, Q, R bezeichnen im folgenden immer Berater über n Alternativen. Für die Abschnitte 2.2 bis 2.6 legen wir fest, daß alle Berater stets voneinander unabhängig sind.

2.2 Strategien und Erwartungswertanteile

Mehrere Berater legen dem Ratsuchenden gemeinsam ein „Vorschlagtupel" vor. Aufgrund dieser Information will er seine Entscheidung treffen. Wenn einige Berater denselben Vorschlag machen, sagen wir, daß sie eine **Fraktion** bilden. Da die Zuordnung der Gewichte zu den vorgeschlagenen Alternativen dem Ratsuchenden unbekannt ist, sind für ihn verschiedene Vorschlagtupel der Berater nur als „zu einer bestimmten **Fraktionenbildung** zugehörig" wahrnehmbar. Der Ratsuchende muß sich deshalb vorab eine Strategie überlegen, wessen Vorschlag er je nach Fraktionenbildung folgen möchte.

Beispiel 2.2.1 Als Beispiel für Fraktionenbildungen betrachten wir drei Berater P, Q und R, die drei oder mehr Alternativen zur Auswahl haben. Es gibt die folgenden verschiedenen Möglichkeiten, wie sich die Berater entscheiden und Fraktionen bilden können:

[2] In der Stochastik gibt es den Standard–Begriff des positiven Korrelationskoeffizienten (siehe z.B. [CT 78]). Hier wird die positive Korrelation anders definiert.

P	a	a	a	b	a
Q	a	a	b	a	b
R	a	b	a	a	c
Fraktionenbildung	PQR	PQ$\leftrightarrow$R	PR$\leftrightarrow$Q	P$\leftrightarrow$QR	P$\leftrightarrow$Q$\leftrightarrow$R

Dabei soll ein Buchstabe, der mehrfach in einer Spalte auftritt, gleiche Vorschläge der zugehörigen Berater symbolisieren. P$\leftrightarrow$Q$\leftrightarrow$R bedeutet, daß alle drei verschiedene Vorschläge machen und ist dasselbe wie zum Beispiel Q$\leftrightarrow$P$\leftrightarrow$R.

Einige (deterministische[3]) Strategien des Ratsuchenden:

Fraktionenbildung / Strategie	PQR	PQ$\leftrightarrow$R	PR$\leftrightarrow$Q	P$\leftrightarrow$QR	P$\leftrightarrow$Q$\leftrightarrow$R
α : Folge immer	PQR	PQ	Q	QR	R
β : Folge immer	PQR	PQ	PR	QR	P
γ : Folge immer	PQR	R	Q	P	P
δ : Folge immer	PQR	PQ	PR	P	P

Um den Erwartungswert einer Strategie einführen zu können, müssen wir etwas formaler werden. Stehen n Alternativen zur Auswahl und machen m Berater Vorschläge, so ist die Menge aller möglichen Vorschlagtupel $\{1,\ldots,n\}^m =: \Omega_n^m$.

Bilden m Berater die Fraktionen $\mathrm{F}^1\leftrightarrow\mathrm{F}^2\leftrightarrow\ldots\leftrightarrow\mathrm{F}^k$, dann bezeichnen wir mit $\Omega_{\mathrm{F}^1\leftrightarrow\mathrm{F}^2\leftrightarrow\ldots\leftrightarrow\mathrm{F}^k}$ die Menge aller Vorschlagtupel aus Ω_n^m, die dieser Fraktionenbildung entsprechen.

Beispiel 2.2.2 Für drei Berater P, Q und R ist
$\Omega_{\mathrm{PQ}\leftrightarrow\mathrm{R}} = \{(i,i,j) \mid i,j \in \{1,\ldots,n\}, i \neq j\}\}$ [4].
In dieser Notation ist $\Omega_n^3 = \Omega_{\mathrm{PQR}} \cup \Omega_{\mathrm{PQ}\leftrightarrow\mathrm{R}} \cup \Omega_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{QR}} \cup \Omega_{\mathrm{PR}\leftrightarrow\mathrm{Q}} \cup \Omega_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}$.

Der Erwartungswert einer Strategie berechnet sich als
$$\mathrm{E}\ (\text{Strategie s}) = \sum_{v\ \in\ \Omega_n^m} \text{Gewicht}\ (v_X) \cdot \text{W'keit}(v),$$
wobei X ein Berater ist, dem gemäß der Strategie s in der Fraktionenbildung, zu der v gehört, gefolgt wird.

Beispiel 2.2.3 Der Erwartungswert der Strategie α aus dem Beispiel 2.2.1 ist

$$\mathrm{E}\ (\text{Strategie}\,\alpha) = \sum_{\substack{i:(i,i,i)\\ \in\Omega_{\mathrm{PQR}}}} w_i\ p_iq_ir_i + \sum_{\substack{i,j:(i,i,j)\\ \in\Omega_{\mathrm{PQ}\leftrightarrow\mathrm{R}}}} w_i\ p_iq_ir_j + \sum_{\substack{i,j:(i,j,i)\\ \in\Omega_{\mathrm{PR}\leftrightarrow\mathrm{Q}}}} w_j\ p_iq_jr_i$$
$$+ \sum_{\substack{i,j:(i,j,j)\\ \in\Omega_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{QR}}}} w_j\ p_iq_jr_j + \sum_{\substack{i,j,k:(i,j,k)\\ \in\Omega_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}}} w_k\ p_iq_jr_k\ .$$

[3] vergleiche Seite 5

[4] Die Reihenfolge in den Vorschlagtupeln entspricht immer der alphabetischen Reihenfolge der Buchstaben, mit denen die Berater symbolisiert werden.

Der Erwartungswert einer Strategie ergibt sich, wie in dem Beispiel zu erkennen, als Summe seiner Anteile in den verschiedenen Fraktionenbildungen.
Wir nennen diese Anteile **Erwartungswertanteile** und benutzen für sie die folgende suggestive Schreibweise: $\mathrm{E}_{\text{Fraktionenbildung}}(\text{Fraktion})$, z.B.

$$\mathrm{E}_{\mathrm{PQ}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{PQ}) = \sum_{\substack{i,j:(i,i,j)\\ \in\Omega_{\mathrm{PQ}\longleftrightarrow\mathrm{R}}}} w_i\, p_i q_i r_j .$$

Unter Verwendung dieser Notation schreibt sich der Erwartungswert der Strategie α wie folgt:

$$\mathrm{E}\,(\mathrm{Strat.}\alpha) = \mathrm{E}_{\mathrm{PQR}}\,(\mathrm{PQR}) + \mathrm{E}_{\mathrm{PQ}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{PQ}) + \mathrm{E}_{\mathrm{PR}\leftrightarrow\mathrm{Q}}\,(\mathrm{Q}) + \mathrm{E}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{QR}}\,(\mathrm{QR}) + \mathrm{E}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{R})\ .$$

Falls $\mathrm{E}_{\mathrm{PQ}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{PQ}) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{PQ}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{R})$ ist, sagen wir, daß die Fraktion PQ bei der Fraktionenbildung PQ$\leftrightarrow$R **erfolgversprechender** ist als die „Fraktion“ R. Dann wird eine optimale Strategie bei PQ$\leftrightarrow$R der Fraktion PQ folgen. In unserer Sprechweise ist eine Strategie also optimal, wenn sie in jeder möglichen Fraktionenbildung der Fraktion mit dem größten Erwartungswertanteil, d.h. der erfolgversprechendsten, folgt.
Darin liegt auch gleichzeitig die Begründung dafür, daß es genügt, sich auf deterministische Strategien zu beschränken, denn zu jeder nichtdeterministischen Strategie gibt es eine gleich gute oder bessere deterministische Strategie:
Betrachten wir zum Beispiel die nichtdeterministische Strategie, die in der Situation PQ$\leftrightarrow$R der Fraktion PQ mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.3 und R mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.7 folgt. Falls $\mathrm{E}_{\mathrm{PQ}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{PQ}) > \mathrm{E}_{\mathrm{PQ}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{R})$, dann ist die Strategie, die in der Situation PQ$\leftrightarrow$R immer PQ folgt, erfolgversprechender.

Bemerkung 2.2.4 $\mathrm{F}^1\leftrightarrow\ldots\leftrightarrow\mathrm{F}^k$ sei eine Fraktionenbildung der Berater $\mathrm{P}^1,\ldots,\mathrm{P}^m$. $\mathrm{F}^i\mathrm{S}$ stehe abkürzend dafür, daß sich alle Berater aus der Fraktion F^i und S gleich entscheiden. Für $1 \leq i \leq k$ gilt:
$\mathrm{E}_{\mathrm{F}^1\leftrightarrow\ldots\leftrightarrow\mathrm{F}^k}\,(\mathrm{F}^i) = \mathrm{E}_{\mathrm{F}^1\mathrm{S}\leftrightarrow\ldots\leftrightarrow\mathrm{F}^k}\,(\mathrm{F}^i) + \ldots + \mathrm{E}_{\mathrm{F}^1\leftrightarrow\ldots\leftrightarrow\mathrm{F}^i\mathrm{S}\leftrightarrow\ldots\leftrightarrow\mathrm{F}^k}\,(\mathrm{F}^i\mathrm{S}) + \ldots +$
$+\ \mathrm{E}_{\mathrm{F}^1\leftrightarrow\ldots\leftrightarrow\mathrm{F}^k\mathrm{S}}\,(\mathrm{F}^i) + \mathrm{E}_{\mathrm{F}^1\leftrightarrow\ldots\leftrightarrow\mathrm{F}^k\leftrightarrow\mathrm{S}}\,(\mathrm{F}^i)\ .$

Beweis: Wir führen den Beweis exemplarisch für die Berater P, Q und R in der Fraktionenbildung PQ$\leftrightarrow$R vor.

$$\mathrm{E}_{\mathrm{PQS}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{PQS}) + \mathrm{E}_{\mathrm{PQ}\leftrightarrow\mathrm{RS}}\,(\mathrm{PQ}) + \mathrm{E}_{\mathrm{PQ}\leftrightarrow\mathrm{R}\leftrightarrow\mathrm{S}}\,(\mathrm{PQ})$$

$$= \sum_{\substack{i,j:(i,i,j,i)\\ \in\Omega_{\mathrm{PQS}\longleftrightarrow\mathrm{R}}}} w_i\, p_i q_i r_j s_i + \sum_{\substack{i,j:(i,i,j,j)\\ \in\Omega_{\mathrm{PQ}\longleftrightarrow\mathrm{RS}}}} w_i\, p_i q_i r_j s_j + \sum_{\substack{i,j,k:(i,i,j,k)\\ \in\Omega_{\mathrm{PQ}\longleftrightarrow\mathrm{R}\longleftrightarrow\mathrm{S}}}} w_i\, p_i q_i r_j s_k$$

$$= \sum_{\substack{i,j:(i,i,j)\\ \in\Omega_{\mathrm{PQ}\longleftrightarrow\mathrm{R}}}} w_i\, p_i q_i r_j (s_i + s_j + \sum_{\substack{k=1\\ i\neq k\neq j}}^{n} s_k) = \sum_{\substack{i,j:(i,i,j)\\ \in\Omega_{\mathrm{PQ}\longleftrightarrow\mathrm{R}}}} w_i\, p_i q_i r_j = \mathrm{E}_{\mathrm{PQ}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{PQ})\ .$$

□

Folgerung 2.2.5 Seien $\mathrm{P}^1, \ldots, \mathrm{P}^k$ Berater, $k \geq 1$. Dann gilt für alle $1 \leq i \leq k$:
E (Strategie: Folge immer P^i) $= \mathrm{E}_{\mathrm{P}^i}(\mathrm{P}^i)$.

Beweis: Wir beweisen dies für drei Berater P, Q und R.

Durch zweifache Anwendung von Bemerkung 2.2.4 ergibt sich

E (Strategie: Folge immer P)

$$= \{\mathrm{E}_{\mathrm{PQR}}(\mathrm{PQR}) + \mathrm{E}_{\mathrm{PQ}\leftrightarrow\mathrm{R}}(\mathrm{PQ})\} + \{\mathrm{E}_{\mathrm{PR}\leftrightarrow\mathrm{Q}}(\mathrm{PR}) + \mathrm{E}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{QR}}(\mathrm{P}) + \mathrm{E}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}(\mathrm{P})\}$$

$$= \mathrm{E}_{\mathrm{PQ}}(\mathrm{PQ}) + \mathrm{E}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}}(\mathrm{P}) \;=\; \mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{P})\;.$$

□

2.3 Fraktionsverteilungen

Im folgenden wird es oft zum besseren Verständnis beitragen, die Verteilungen mehrerer Berater, die eine Fraktion bilden, zu einer Verteilung zusammenzuziehen; diese bezeichnen wir als Fraktionsverteilung. Ihre Einträge sind nichts anderes als die bedingten Wahrscheinlichkeiten dafür, daß „die Berater sich alle für eine bestimmte Alternative i entscheiden, unter der Bedingung, daß sich alle gleich entscheiden“.

Definition 2.3.1 Seien P^1, P^2, …, P^m Berater mit positiver Wahrscheinlichkeit, sich gleich zu entscheiden, d.h. $\sum\limits_{j=1}^{n}[\mathrm{P}^1\mathrm{P}^2\ldots\mathrm{P}^m]_{j\ldots j} \neq 0$.

Dann nennen wir $\langle\, \mathrm{P}^1\mathrm{P}^2\ldots\,\mathrm{P}^m\,\rangle$ die **Fraktionsverteilung** der P^j. Ihre Einträge sind

$$\langle\, \mathrm{P}^1\mathrm{P}^2\ldots\,\mathrm{P}^m\,\rangle_i \;=\; \frac{[\mathrm{P}^1\mathrm{P}^2\ldots\mathrm{P}^m]_{i\ldots i}}{\sum\limits_{j=1}^{n}[\mathrm{P}^1\mathrm{P}^2\ldots\mathrm{P}^m]_{j\ldots j}}.$$

Beispiel 2.3.2

1. Sei $\mathrm{P} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$, $\mathrm{Q} = (\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ und $\mathrm{R} = (\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$.
   Dann ist $\langle\,\mathrm{PQR}\,\rangle = (\frac{36}{41}, \frac{4}{41}, \frac{1}{41})$.
2. Sei $\mathrm{P} = (\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10})$, $\mathrm{Q} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10})$. Dann ist $\langle\,\mathrm{PQ}\,\rangle = (\frac{20}{33}, \frac{10}{33}, \frac{3}{33})$.
3. Sei $\mathrm{P} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$. Dann ist $\langle\,\mathrm{PP}\,\rangle = (\frac{9}{14}, \frac{4}{14}, \frac{1}{14})$.

Bemerkung 2.3.3

i) $\langle\,\mathrm{PQ}\,\rangle = \langle\,\mathrm{QP}\,\rangle$.

ii) $\langle\,\mathrm{P}\langle\,\mathrm{QR}\,\rangle\,\rangle = \langle\,\langle\,\mathrm{PQ}\,\rangle\mathrm{R}\,\rangle$.

iii) Im allgemeinen ist $\langle\,\mathrm{PP}\,\rangle \neq \mathrm{P}$.

iv) Ist R ein Rater, dann ist $\langle \mathrm{PR} \rangle \equiv \mathrm{P}$.

v) Sind P und Q Experten, so ist $\langle \mathrm{PQ} \rangle$ ebenfalls ein Experte.

Aber auch die Fraktionsverteilung zweier Berater, die keine Experten sind, kann ein Experte sein, wie das obige Beispiel 2.3.2 2. zeigt.

Der Nutzen des Begriffs Fraktionsverteilung liegt in der folgenden Bemerkung: Wenn die Berater m Fraktionen $\mathrm{F}^1, \ldots, \mathrm{F}^m$ bilden, sind die Erwartungswertanteile bis auf einen Faktor identisch mit den entsprechenden Erwartungswertanteilen für die Berater $\langle \mathrm{F}^1 \rangle, \ldots, \langle \mathrm{F}^m \rangle$.

Bemerkung 2.3.4 Seien endlich viele Berater gegeben, die die Fraktionen $\mathrm{F}^1, \ldots, \mathrm{F}^m$ bilden. Dann gibt es eine Konstante $\mathrm{K}_{\mathrm{F}^1-\ldots-\mathrm{F}^m}$, so daß für alle $1 \le r \le m$ gilt:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{F}^1\leftrightarrow\ldots\leftrightarrow\mathrm{F}^m}(\mathrm{F}^r) = \mathrm{K}_{\mathrm{F}^1-\ldots-\mathrm{F}^m} \cdot \mathrm{E}_{\langle\mathrm{F}^1\rangle\leftrightarrow\ldots\leftrightarrow\langle\mathrm{F}^m\rangle}(\langle\mathrm{F}^r\rangle) \, .$$

$\mathrm{K}_{\mathrm{F}^1-\ldots-\mathrm{F}^m}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich in jeder der Fraktionen $\mathrm{F}^1, \ldots, \mathrm{F}^m$ alle ihr angehörenden Berater gleich entscheiden.

Beweis:
Wir führen den Beweis exemplarisch für die Fraktionenbildung PQ$\leftrightarrow$RS$\leftrightarrow$T vor:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{PQ}\leftrightarrow\mathrm{RS}\leftrightarrow\mathrm{T}}(\mathrm{PQ}) = \sum_{\substack{i,j,k\,:\,(i,i,j,j,k)\\ \in\Omega_{\mathrm{PQ}\longleftrightarrow\mathrm{RS}\longleftrightarrow\mathrm{T}}}} w_i\; p_i q_i\; r_j s_j\; t_k$$

$$= (\sum_{l=1}^{n} p_l q_l)\;(\sum_{l=1}^{n} r_l s_l)\;(\sum_{l=1}^{n} t_l) \sum_{\substack{i,j,k\,:\,(i,i,j,j,k)\\ \in\Omega_{\mathrm{PQ}\longleftrightarrow\mathrm{RS}\longleftrightarrow\mathrm{T}}}} w_i\; \frac{p_i q_i}{\sum_{l=1}^{n} p_l q_l}\; \frac{r_j s_j}{\sum_{l=1}^{n} r_l s_l}\; \frac{t_k}{\sum_{l=1}^{n} t_l}$$

$$= (\sum_{l=1}^{n} p_l q_l)\;(\sum_{l=1}^{n} r_l s_l)\;(\sum_{l=1}^{n} t_l) \sum_{\substack{i,j,k\,:\,(i,i,j,j,k)\\ \in\Omega_{\mathrm{PQ}\longleftrightarrow\mathrm{RS}\longleftrightarrow\mathrm{T}}}} w_i\; \langle\mathrm{PQ}\rangle_i\; \langle\mathrm{RS}\rangle_j\; \langle\mathrm{T}\rangle_k$$

$$= \underbrace{(\sum_{l=1}^{n} p_l q_l)\;(\sum_{l=1}^{n} r_l s_l)\;(\sum_{l=1}^{n} t_l)}_{=:\mathrm{K}_{\mathrm{PQ}-\mathrm{RS}-\mathrm{T}}}\, \mathrm{E}_{\langle\mathrm{PQ}\rangle\leftrightarrow\langle\mathrm{RS}\rangle\leftrightarrow\langle\mathrm{T}\rangle}(\langle\mathrm{PQ}\rangle) \, .$$

□

Folgerung 2.3.5

Seien $\mathrm{F}^1, \ldots, \mathrm{F}^k$ Fraktionen von Beratern und R sei ein Rater. Dann gilt für $1 \le i \le k$:

i) $\mathrm{E}_{\mathrm{F}^1\mathrm{R}\leftrightarrow\mathrm{F}^2\leftrightarrow\ldots\leftrightarrow\mathrm{F}^k}(\mathrm{F}^i) = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{E}_{\mathrm{F}^1\leftrightarrow\ldots\leftrightarrow\mathrm{F}^k}(\mathrm{F}^i)$.

ii) $\mathrm{E}_{\mathrm{F^1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow F^k \leftrightarrow R}}\ (\mathrm{F}^i) \ = \ (1 - \dfrac{k}{n})\ \mathrm{E}_{\mathrm{F^1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow F^k}}\ (\mathrm{F}^i)\ .$

Beweis:

zu i) Nach Bemerkung 2.3.4 ist

$\mathrm{E}_{\mathrm{F^1R \leftrightarrow F^2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow F^k}}\ (\mathrm{F}^i) = (\sum_{j=1}^{n} \langle\, \mathrm{F}^1 \rangle_{\mathrm{j}} \mathrm{r_j})\ \mathrm{E}_{\langle\, \mathrm{F^1R} \rangle \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow \mathrm{F^k}}\ (\mathrm{F}^i).$

Da nach Bemerkung 2.3.3 $\langle\, \mathrm{F^1R} \rangle \equiv \langle\, \mathrm{F}^1 \rangle$, ist dies

$= \frac{1}{n}\ (\sum_{j=1}^{n} \langle\, \mathrm{F}^1 \rangle_{\mathrm{j}})\ \mathrm{E}_{\langle\, \mathrm{F}^1 \rangle \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow \mathrm{F^k}}\ (\mathrm{F}^i) = \frac{1}{\mathrm{n}}\ \mathrm{E}_{\mathrm{F^1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow F^k}}\ (\mathrm{F}^i)\ .$

zu ii) Unter Benutzung der Bemerkung 2.2.4 gilt

$\mathrm{E}_{\mathrm{F^1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow F^k}}\ (\mathrm{F}^i)$

$= \mathrm{E}_{\mathrm{F^1R \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow F^k}}\ (\mathrm{F}^i) + \ldots + \mathrm{E}_{\mathrm{F^1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow F^kR}}\ (\mathrm{F}^i) + \mathrm{E}_{\mathrm{F^1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow F^k \leftrightarrow R}}\ (\mathrm{F}^i)\ ,$

und dies ist aufgrund von i)

$= \frac{1}{n}\ \mathrm{E}_{\mathrm{F^1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow F^k}}\ (\mathrm{F}^i) + \ldots + \frac{1}{n}\ \mathrm{E}_{\mathrm{F^1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow F^k}}\ (\mathrm{F}^i) + \mathrm{E}_{\mathrm{F^1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow F^k \leftrightarrow R}}\ (\mathrm{F}^i)\ .$

$\square$

2.4 Vergleichskriterien für Berater

Zum Vergleich von Beratern haben wir bereits den Erwartungswert zur Verfügung. Wir definieren drei weitere Vergleichskriterien „mächtiger“, „Schur-besser“ und „Zentrierung“ und untersuchen ihre Beziehungen zueinander.

Definition 2.4.1 P heißt **mächtiger** als Q, wenn für alle Paare (i, j) mit $i < j$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $[\mathrm{PQ}]_{ij} \geq [\mathrm{PQ}]_{ji}$.

Da P und Q unabhängig voneinander sind, ist dies äquivalent zu $p_i q_j \geq p_j q_i$.

Beispiel 2.4.2 $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ ist mächtiger als $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$.
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ ist weder mächtiger als $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6})$ noch umgekehrt.

Bemerkung 2.4.3

i) Ist Q regulär, dann gilt: P ist mächtiger als Q, gdw. $\frac{p_1}{q_1} \geq \frac{p_2}{q_2} \geq \ldots \geq \frac{p_n}{q_n}$.

ii) Ein Experte ist mächtiger als ein Anti-Experte.

iii) $\mathrm{P}^1, \ldots, \mathrm{P}^k$ und $\mathrm{Q}^1, \ldots, \mathrm{Q}^k$ seien Berater.
Falls für alle $r \in \{1, \ldots, k\}$ P^r mächtiger ist als Q^r, dann ist auch die Fraktionsverteilung der Fraktion $\mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^k$ mächtiger als die der Fraktion $\mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^k$.

Beweis: i) und ii) folgen aus den Definitionen.

Zu iii) Wir schreiben $(\mathrm{P}^r)_i$ für die Wahrscheinlichkeit, daß der Berater P^r sich für die Alternative i entscheidet. Für alle $i < j$ $(i, j \in \{1, \ldots n\})$ und alle $\mathrm{r} \in \{1, \ldots k\}$ gilt:

$(\mathrm{P}^r)_i\ (\mathrm{Q}^r)_j\ \geq\ (\mathrm{P}^r)_j\ (\mathrm{Q}^r)_i$ und damit auch für die Produkte

$$\prod_{r=1}^{k} (\mathrm{P}^r)_i\ (\mathrm{Q}^r)_j\ \geq\ \prod_{r=1}^{k} (\mathrm{P}^r)_j\ (\mathrm{Q}^r)_i\ .$$

Durch Erweitern erhalten wir

$$\frac{\prod_{r=1}^k\ (\mathrm{P}^r)_i}{\sum_{\nu=1}^n \prod_{r=1}^k (\mathrm{P}^r)_\nu} \frac{\prod_{r=1}^k\ (\mathrm{Q}^r)_j}{\sum_{\nu=1}^n \prod_{r=1}^k (\mathrm{Q}^r)_\nu} \geq \frac{\prod_{r=1}^k\ (\mathrm{P}^r)_j}{\sum_{\nu=1}^n \prod_{r=1}^k (\mathrm{P}^r)_\nu} \frac{\prod_{r=1}^k\ (\mathrm{Q}^r)_i}{\sum_{\nu=1}^n \prod_{r=1}^k (\mathrm{Q}^r)_\nu}\ ,$$

und dies ist gleichbedeutend mit

$$\langle\, \mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^k \,\rangle_i\ \langle\, \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^k \,\rangle_j\ \geq\ \langle\, \mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^k \,\rangle_j\ \langle\, \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^k \,\rangle_i\ .$$

$\square$

Bemerkung 2.4.4
Ist P mächtiger als Q und Q mächtiger als R, so ist auch P mächtiger als R.

Beweis: Für alle $i < j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ist zu zeigen :

Aus $p_i\ q_j \geq p_j\ q_i$ und $q_i\ r_j \geq q_j\ r_i$ folgt $p_i\ r_j \geq p_j\ r_i$.

Sei also $i < j$ gegeben. Falls $q_i \neq 0 \neq q_j$, forme die Terme um:

Da $q_i, q_j > 0$, gilt $p_i \geq \frac{p_j q_i}{q_j}$ und $r_j \geq \frac{q_j r_i}{q_i}$, und damit $p_i r_j \geq \frac{p_j q_i}{q_j} \frac{q_j r_i}{q_i} = p_j r_i$.

Falls $q_i = 0$ oder $q_j = 0$, folgt $p_j\ r_i = 0$:

1. Fall : $q_i \neq 0$, $q_j = 0$. Nach Voraussetzung ist $0 = p_i q_j \geq p_j q_i$, also $p_j = 0$.

Die übrige Fälle gehen analog. $\square$

Definition 2.4.5
P heißt **Schur-besser**[5] als Q, wenn für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i \geq \sum\limits_{i=1}^{k} q_i$.

Bemerkung 2.4.6

i) Ist P Schur-besser als Q, so folgt $p_1 \geq q_1$ und $p_n \leq q_n$.

[5] Es gibt auch den Begriff der Schur-Monotonie, der im Zusammenhang mit Schur-konvexen Funktionen verwendet wird. Dort wird dasselbe Kriterium angewandt, vorher werden jedoch die Einträge der Wahrscheinlichkeitstupel ihrer Größe nach geordnet (vgl. [MO 79]).

ii) Falls $\mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{P}) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{Q})$ für beliebige Gewichte mit $w_1 \geq w_2 \geq \ldots \geq w_n$, dann ist P auch Schur-besser als Q.

iii) Ist P ein Experte, so ist er Schur-besser als jeder Berater P′, dessen Einträge eine Umordnung der Einträge von P sind.

Beweis: i) folgt aus der Definition für $k = 1$ und $k = n - 1$.

zu ii) Es gilt $\sum_{i=1}^{k} w_i p_i \geq \sum_{i=1}^{k} w_i q_i$ für beliebige $w_1 \geq w_2 \geq \ldots w_n$ und k, also auch für $1 = w_1 = \ldots = w_k > w_{k+1} = \ldots w_n = 0$ und alle $k \in \{1, \ldots, n\}$.
Damit folgt $\sum_{i=1}^{k} p_i \geq \sum_{i=1}^{k} q_i$ für alle k.

zu iii) Nach Bemerkung 2.1.2 ist $\mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{P}) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{P}'}(\mathrm{P}')$ für beliebige Gewichte w_i mit $w_1 \geq w_2 \geq \ldots \geq w_n$. Nach ii) folgt hieraus, daß P Schur-besser ist als P′.

□

Beispiel 2.4.7

1. $(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7})$ ist Schur-besser als $(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7})$.
2. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ ist Schur-besser als $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6})$,
   aber keiner von beiden ist mächtiger als der andere.
3. Sei $\mathrm{P} = (\frac{5}{12}, \frac{5}{12}, \frac{1}{6})$ und $\mathrm{Q} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6})$. Dann ist $\langle\, \mathrm{PP}\, \rangle_3$ größer als $\langle\, \mathrm{QQ}\, \rangle_3$:
   $\langle\, \mathrm{PP}\, \rangle_3 = \frac{2}{27}$, $\langle\, \mathrm{QQ}\, \rangle_3 = \frac{2}{28}$.
   $\langle\, \mathrm{PP}\, \rangle$ kann also nach Bemerkung 2.4.6 nicht Schur-besser sein als $\langle\, \mathrm{QQ}\, \rangle$, obwohl P Schur-besser ist als Q (vergleiche auch Bemerkung 2.4.3).

Die nächste Bemerkung zeigt die Hierarchie der bisher definierten Vergleichskriterien für Berater:

Bemerkung 2.4.8 i) Falls P mächtiger ist als Q, so ist P Schur-besser als Q.

ii) Wenn P Schur-besser ist als Q, so ist $\mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{P}) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{Q})$.

Beweis:

zu i) Sei P mächtiger als Q. Dann gilt für $1 \leq k \leq n$:

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \; - \; \sum_{i=1}^{k} q_i \; = \; \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (p_i\; q_j - p_j\; q_i)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (p_i\; q_j - p_j\; q_i)}_{=0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} (p_i\; q_j - p_j\; q_i)}_{\geq 0 \text{ , da } i<j} \geq 0 \, .$$

zu ii) Sei P Schur-besser als Q. Da $w_1 \geq w_2 \geq \ldots \geq w_n$ ist, ergibt sich durch Umschreiben zu einer Ziehharmonikasumme:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{P}) - \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{Q}) = \sum_{k=1}^{n} w_k \, (p_k - q_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(w_k - w_{k+1})}_{\geq 0} \; \underbrace{(\sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=1}^{k} q_i)}_{\geq 0 \text{ , per Voraussetzung}} + w_n \; \underbrace{(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} q_i)}_{=0} \geq 0 \, .$$

□

Beträgt die Anzahl der Alternativen zwei, so sind alle drei Kriterien äquivalent. Die Umkehrungen gelten im allgemeinen aber nicht.

Bemerkung 2.4.9 Die Gewichte der Alternativen seien streng monoton fallend, d.h. $w_1 > w_2 > \ldots > w_n$. Dann gilt: Hat P den gleichen Erwartungswert wie Q und ist P Schur-besser oder mächtiger als Q, so sind P und Q identisch verteilt.

Beweis: Wenn P mächtiger ist als Q, dann ist P auch Schur-besser als Q gemäß Bemerkung 2.4.8 i). Sei also P Schur-besser als Q.

Analog zum Beweis der Bemerkung 2.4.8 ii) ist

$$0 = \mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{P}) - \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{Q}) = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(w_k - w_{k+1})}_{>0} \; \underbrace{(\sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=1}^{k} q_i)}_{\geq 0} .$$

Damit folgt $\sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=1}^{k} q_i = 0$ für alle k und somit $p_i = q_i$ für alle i. □

Beträgt die Anzahl der Alternativen mehr als zwei, können auch nicht identisch verteilte Berater gleiche Erwartungswerte haben:

Beispiel 2.4.10

Die Berater $\mathrm{P} = (\frac{6}{11}, \frac{2}{11}, \frac{3}{11})$ und $\mathrm{P}' = (\frac{5}{11}, \frac{4}{11}, \frac{2}{11})$ haben für $w_1 = 3, w_2 = 2$ und $w_3 = 1$ beide den Erwartungswert $\mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{P}) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}'}(\mathrm{P}') = \frac{25}{11}$.

Wie in diesem Beispiel entsteht allgemein bei Beratern über drei Alternativen mit gleichen Erwartungswerten einer aus dem anderen durch Stärken der Wahrscheinlichkeit der Alternative mittleren Gewichts und Schwächen der beiden anderen Wahrscheinlichkeiten; allerdings nur, wenn die Gewichte w_i verschieden sind. Wir sagen dazu, daß der eine Berater sich als Zentrierung des anderen schreiben läßt. (P′ ist im obigen Beispiel eine Zentrierung von P.)
Es erweist sich als interessant, diese Beziehung zwischen den Verteilungen von Beratern auch dann zu betrachten, wenn der Zentrierte einen größeren Erwartungswert besitzt, und auch für Berater über beliebig vielen Alternativen, die sich an genau drei Einträgen unterscheiden.

Definition 2.4.11
P und P′ seien Berater über n Alternativen mit streng monoton fallenden Gewichten $w_1 > w_2 > \ldots > w_n$. Sei $\varepsilon_i = p'_i - p_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$.

P′ heißt **Zentrierung** von P an den Stellen $a_1 < a_2 < a_3$, falls
$\varepsilon_{a_1} \leq 0, \varepsilon_{a_2} \geq 0, \varepsilon_{a_3} \leq 0$ und $\varepsilon_i = 0$ für alle $i \notin \{a_1, a_2, a_3\}$.

Falls $\mathrm{E}_{\mathrm{P}'}(\mathrm{P}') \geq \mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{P})$, nennen wir die Zentrierung eine **verbessernde**, falls $\mathrm{E}_{\mathrm{P}'}(\mathrm{P}') = \mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{P})$, sagen wir **echte** Zentrierung.

Sei Q ein Berater.
Eine Zentrierung an den Stellen $a_1 < a_2 < a_3$ heißt **Zentrierung bezüglich Q**, falls $q_{a_1} \geq q_{a_2} \geq q_{a_3}$.
Sie heißt **zu Q passende Zentrierung**, falls $w_{a_1} \geq \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{Q}) \geq w_{a_3}$.

Beispiel 2.4.12 Sei $w_1 = 4, w_2 = 3, w_3 = 2, w_4 = 1$ und $\mathrm{P} = (\frac{8}{25}, \frac{4}{25}, \frac{4}{25}, \frac{9}{25})$.

$\mathrm{P}' = (\frac{7}{25}, \frac{4}{25}, \frac{7}{25}, \frac{7}{25})$ ist eine echte Zentrierung von P an den Stellen 1, 3 und 4.

$\mathrm{P}'' = (\frac{6}{25}, \frac{6}{25}, \frac{6}{25}, \frac{7}{25})$ ist eine echte Zentrierung von P′ an den Stellen 1, 2 und 3 und damit praktisch eine doppelte echte Zentrierung von P an den Stellen 1, 3, 4 und 1, 2, 3.

Sei $\mathrm{Q} = (\frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10})$.
P′ ist eine Zentrierung von P bezüglich Q an den Stellen 1, 3 und 4, da $q_1 \geq q_3 \geq q_4$.
P″ aber ist eine Zentrierung von P′ an den Stellen 1, 2 und 3; da $q_1 < q_2$, ist dies also keine Zentrierung bezüglich Q.

$\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{Q}) = 2.9$ liegt zwischen $w_1 = 4$ und $w_3 = 2$, deshalb ist P″ eine zu Q passende Zentrierung von P′.

Bemerkung 2.4.13

i) Ist P′ eine echte Zentrierung des Beraters P an den Stellen $a_1 < a_2 < a_3$, so gibt es ein $\varepsilon \geq 0$ mit
$p'_{a_1} = p_{a_1} - (w_{a_2} - w_{a_3})\varepsilon$, $p'_{a_2} = p_{a_2} + (w_{a_1} - w_{a_3})\varepsilon$ und $p'_{a_3} = p_{a_3} - (w_{a_1} - w_{a_2})\varepsilon$.

ii) Die Varianz V(P) eines Beraters P läßt sich in Analogie zu dem entsprechenden stochastischen Begriff definieren: $\mathrm{V}(\mathrm{P}) := \sum_{i=1}^{n} p_i(w_i - \mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{P}))^2$.
Ist P′ eine echte Zentrierung von P an $a_1 < a_2 < a_3$, dann ist $\mathrm{V}(\mathrm{P}') \leq \mathrm{V}(\mathrm{P})$.

iii) Es gibt Berater über n $\geq$ 4 Alternativen, die nicht durch mehrere echte oder verbessernde Zentrierungen auseinander hervorgehen.

Beweis:

zu i) Sei $\varepsilon_i = p'_i - p_i$ für alle i. Da $\sum_{i=1}^{n} p'_i = \sum_{i=1}^{n} p_i$, muß $\varepsilon_{a_1} + \varepsilon_{a_2} + \varepsilon_{a_3} = 0$ sein.
Da P und P′ den gleichen Erwartungswert haben, ist außerdem
$w_{a_1}\varepsilon_{a_1} + w_{a_2}\varepsilon_{a_2} + w_{a_3}\varepsilon_{a_3} = 0$.
Sei $\varepsilon := -\frac{\varepsilon_{a_1}}{(w_{a_2} - w_{a_3})}$. Da $w_{a_2} > w_{a_3}$ und $\varepsilon_{a_1} \leq 0$, ist $\varepsilon \geq 0$ und die Behauptung folgt.

zu ii) Durch Einsetzen ergibt sich

$$\mathrm{V}(\mathrm{P}') - \mathrm{V}(\mathrm{P}) = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{a_i} \left(w_{a_i}^2 - 2w_{a_i}\mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{P}) + (\mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{P}))^2\right) = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{a_i}\, w_{a_i}^2$$
$$= -\varepsilon(w_{a_1} - w_{a_2})(w_{a_1} - w_{a_3})(w_{a_2} - w_{a_3}) \leq 0,$$

da $w_{a_1} > w_{a_2} > w_{a_3}$.

zu iii) Seien z.B. $\mathrm{P} = (0.4\,, 0.3\,, 0.2\,, 0.1)$, $\mathrm{Q} = (0.5\,, 0\,, 0.5\,, 0)$ und $w_1 = 4$, $w_2 = 3$, $w_3 = 2$, $w_4 = 1$.

Dann ist $\mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{P}) = \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{Q}) = 3$ und $\mathrm{V}(\mathrm{P}) = \mathrm{V}(\mathrm{Q}) = 1$.

Gäbe es nun mehrere Zentrierungen, so daß P aus Q hervorgeht (oder umgekehrt), so müßten dies alles echte Zentrierungen sein, da sich der Erwartungswert sonst vergrößern würde, weil die Gewichte alle verschieden sind, wäre nach Punkt ii) $\mathrm{V}(\mathrm{P}) < \mathrm{V}(\mathrm{Q})$ (da P und Q nicht identisch sind).
Dies ist ein Widerspruch, denn $\mathrm{V}(\mathrm{P}) = \mathrm{V}(\mathrm{Q})$. □

2.5 Zwei Fraktionen

Die einfachste Situation – außer der trivialen – ist die, in der insgesamt nur zwei verschiedene Vorschläge gemacht werden. Wir zeigen, daß hier der Vorschlag der Fraktion erfolgversprechender ist, deren Fraktionsverteilung den größeren Erwartungswert hat.

Anschließend untersuchen wir, wie der Erwartungswert einer Fraktionsverteilung von den Eigenschaften der Fraktionsmitglieder abhängt, um speziellere Bedingungen dafür anzugeben, wann eine der Fraktionen erfolgversprechender ist.

Bemerkung 2.5.1 $\mathrm{E}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}}(\mathrm{P}) - \mathrm{E}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}}(\mathrm{Q}) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{P}) - \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{Q})$.

Beweis: Durch Anwenden der Bemerkung 2.2.5 auf P und auf Q ergibt sich:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{P}) - \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{Q}) = \{\mathrm{E}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}}(\mathrm{P}) + \mathrm{E}_{\mathrm{PQ}}(\mathrm{PQ})\} - \{\mathrm{E}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}}(\mathrm{Q}) + \mathrm{E}_{\mathrm{PQ}}(\mathrm{PQ})\}$$

$$= \mathrm{E}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}}(\mathrm{P}) - \mathrm{E}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}}(\mathrm{Q})\ .$$ □

Folgerung 2.5.2 In der Situation $\mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^k \leftrightarrow \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l$ ist die Fraktion $\mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^k$ genau dann erfolgversprechender als die Fraktion $\mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l$, wenn

$$\mathrm{E}_{\langle \mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^k \rangle}(\langle \mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^k \rangle) \geq \mathrm{E}_{\langle \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l \rangle}(\langle \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l \rangle)\ .$$

Beweis: Nach Bemerkung 2.3.4 ist
$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^k \leftrightarrow \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l}(\mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^k) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^k \leftrightarrow \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l}(\mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l)$ äquivalent zu
$\mathrm{E}_{\langle \mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^k \rangle \leftrightarrow \langle \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l \rangle}(\langle \mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^k \rangle) \geq \mathrm{E}_{\langle \mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^k \rangle \leftrightarrow \langle \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l \rangle}(\langle \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l \rangle)$.
Da es sich um zwei Berater handelt, ist dies nach Bemerkung 2.5.1 äquivalent zu
$\mathrm{E}_{\langle \mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^k \rangle}(\langle \mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^k \rangle) \geq \mathrm{E}_{\langle \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l \rangle}(\langle \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l \rangle)$. □

Bemerkung 2.5.3 Folgende Bedingungen implizieren die Ungleichung $\mathrm{E}_{\langle \mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^k \rangle}(\langle \mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^k \rangle) \geq \mathrm{E}_{\langle \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l \rangle}(\langle \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l \rangle)$ aus der Folgerung 2.5.1 :

i) $\langle \mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^k \rangle$ ist mächtiger als $\langle \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l \rangle$.

ii) Jedem Berater Q^i kann eineindeutig ein Berater P^j zugeordnet werden, der mächtiger ist als er. Dazu fülle gegebenenfalls vorher die kleinere Fraktion mit Ratern auf, so daß beide Fraktionen gleich viele Mitglieder haben.

iii) $\langle \mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^k \rangle$ ist Schur-besser als $\langle \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l \rangle$.

iv) Es gibt j und r, so daß $w_j \geq \mathrm{E}_{\langle \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l \rangle}(\langle \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l \rangle) \geq w_{j+1}$,
$\mathrm{E}_{\langle \mathrm{P}^{r+1} \ldots \mathrm{P}^k \rangle}(\langle \mathrm{P}^{r+1} \ldots \mathrm{P}^k \rangle) \geq \mathrm{E}_{\langle \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l \rangle}(\langle \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l \rangle)$ und
$\langle \mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^r \rangle$ ein j-Halb-Experte ist.

Beweis: i) und iii) folgen aus der Bemerkung 2.4.8.

zu ii) Sei oBdA $k > l$. Setze also $\mathrm{Q}^{l+1} \equiv \ldots \equiv \mathrm{Q}^k$ als Rater.

Benenne die P^i so um, daß nun für alle $r \in \{1, \ldots, k\}$ P^r mächtiger ist als Q^r. Nach Bemerkung 2.4.3 ist dann der Berater $\langle \mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^k \rangle$ mächtiger als $\langle \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l \ldots \mathrm{Q}^k \rangle$. Da sich eine Fraktionsverteilung durch Hinzufügen von Ratern aber nicht ändert (Bemerkung 2.3.3), ist $\langle \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l \ldots \mathrm{Q}^k \rangle \equiv \langle \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l \rangle$.

zu iv) Dies folgt aus dem Satz 2.5.4, den wir als nächstes zeigen werden.

Dazu setze $\mathrm{P} = \langle \mathrm{P}^1 \ldots \mathrm{P}^r \rangle$, $\mathrm{Q} = \langle \mathrm{P}^{r+1} \ldots \mathrm{P}^k \rangle$ und $\mathrm{R} = \langle \mathrm{Q}^1 \ldots \mathrm{Q}^l \rangle$. □

Satz 2.5.4 Seien $\mathrm{E}_\mathrm{Q}(\mathrm{Q}) \geq \mathrm{E}_\mathrm{R}(\mathrm{R})$ und $\mathrm{k} \in \{1, \ldots, n-1\}$ so, daß $w_k \geq \mathrm{E}_\mathrm{R}(\mathrm{R}) \geq w_{k+1}$ und P ein k-Halb-Experte ist. Dann gilt $\mathrm{E}_{\mathrm{PQ} \leftrightarrow \mathrm{R}}(\mathrm{PQ}) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{PQ} \leftrightarrow \mathrm{R}}(\mathrm{R})$.

Beweis: Nach der Folgerung aus Bemerkung 2.5.1 ist

$\mathrm{E}_{\mathrm{PQ} \leftrightarrow \mathrm{R}}(\mathrm{PQ}) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{PQ} \leftrightarrow \mathrm{R}}(\mathrm{R})$ äquivalent zu $\mathrm{E}_{\langle \mathrm{PQ} \rangle}(\langle \mathrm{PQ} \rangle) \geq \mathrm{E}_\mathrm{R}(\mathrm{R})$.

Es ist $\mathrm{E}_{\langle \mathrm{PQ} \rangle}(\langle \mathrm{PQ} \rangle) - \mathrm{E}_\mathrm{R}(\mathrm{R}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i q_i}{\sum_{i=1}^n p_i q_i} w_i - \mathrm{E}_\mathrm{R}(\mathrm{R})$.

Also gilt der Satz genau dann, wenn $\sum_{i=1}^{n} p_i\, q_i\, (w_i - \mathrm{E}_\mathrm{R}(\mathrm{R})) \geq 0$ ist.

Sei σ eine Permutation von $\{1, \ldots, n\}$, die P absteigend ordnet; dabei bilde σ die Menge $\{1, \ldots, k\}$ auf sich ab. Da P ein k-Halb-Experte ist, gibt es ein solches σ.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, q_i\, (w_i - \mathrm{E}_\mathrm{R}(\mathrm{R})) = \sum_{i=1}^{n} p_{\sigma(i)}\, q_{\sigma(i)}\, (w_{\sigma(i)} - \mathrm{E}_\mathrm{R}(\mathrm{R})) .$$

Durch Übergang zu einer Ziehharmonikasumme bezüglich der $p_{\sigma(i)}$ wird dies zu

$$\sum_{j=1}^{n-1} (p_{\sigma(j)} - p_{\sigma(j+1)}) \underbrace{\left\{\sum_{i=1}^{j} q_{\sigma(i)} \, (w_{\sigma(i)} - \mathrm{E}_{\mathrm{R}}(\mathrm{R}))\right\}}_{=: A_j} + p_{\sigma(n)} \underbrace{\left\{\sum_{i=1}^{n} q_{\sigma(i)} \, (w_{\sigma(i)} - \mathrm{E}_{\mathrm{R}}(\mathrm{R}))\right\}}_{=: A_n} .$$

Da nach Definition von σ gilt: $p_{\sigma(i)} \geq p_{\sigma(i+1)}$ für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$,
genügt es zu zeigen, daß

$$A_j := \sum_{i=1}^{j} q_{\sigma(i)}(w_{\sigma(i)} - \mathrm{E}_{\mathrm{R}}(\mathrm{R})) \geq 0 \text{ ist für alle } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

• Sei $j \in \{1, \ldots, k\}$: Weil die w_i absteigend geordnet sind
und $\sigma(\{1, \ldots, k\}) = \{1, \ldots, k\}$, ist $w_{\sigma(i)} \geq w_k \geq \mathrm{E}_{\mathrm{R}}(\mathrm{R})$ für alle $i \leq j$. Also ist

$A_j = \sum_{i=1}^{j} q_{\sigma(i)} \, (w_{\sigma(i)} - \mathrm{E}_{\mathrm{R}}(\mathrm{R})) \; \geq 0$.

• $j \in \{k+1, \ldots, n\}$: Analog ist $\mathrm{E}_{\mathrm{R}}(\mathrm{R}) \geq w_{k+1} \geq w_{\sigma(i)}$ für alle $i \geq j$, also

$$\begin{aligned} A_j &= A_n - \textstyle\sum_{i=j+1}^{n} q_{\sigma(i)}(w_{\sigma(i)} - \mathrm{E}_{\mathrm{R}}(\mathrm{R})) \\ &= \underbrace{\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{Q}) - \mathrm{E}_{\mathrm{R}}(\mathrm{R})}_{\geq 0} + \textstyle\sum_{i=j+1}^{n} q_{\sigma(i)} \underbrace{(\mathrm{E}_{\mathrm{R}}(\mathrm{R}) - w_{\sigma(i)})}_{\geq 0} \; \geq \; 0 \; . \end{aligned}$$ □

Bemerkung 2.5.5 P′ sei mächtiger als P, und es gelte: $\mathrm{E}_{\langle \mathrm{PQ} \rangle}(\langle \mathrm{PQ} \rangle) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{R}}(\mathrm{R})$.
Dann folgt $\mathrm{E}_{\mathrm{P'Q} \leftrightarrow \mathrm{R}}(\mathrm{P'Q}) \; \geq \; \mathrm{E}_{\mathrm{P'Q} \leftrightarrow \mathrm{R}}(\mathrm{R})$.

Beweis: Mit der Bemerkung 2.4.3 iii) folgt aus „P′ ist mächtiger als P“, daß $\langle \mathrm{P'Q} \rangle$ mächtiger ist als $\langle \mathrm{PQ} \rangle$.
Wegen der Bemerkung 2.4.8 folgt daraus zusammen mit der zweiten Voraussetzung:
$\mathrm{E}_{\langle \mathrm{P'Q} \rangle}(\langle \mathrm{P'Q} \rangle) \geq \mathrm{E}_{\langle \mathrm{PQ} \rangle}(\langle \mathrm{PQ} \rangle) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{R}}(\mathrm{R})$.
Dies impliziert nach Bemerkung 2.5.1 die Behauptung. □

Als Folgerung erhalten wir einen einfacheren Beweis des Satzes 2.5.4 für den Fall, daß es sich bei dem hinzukommenden Berater um einen Experten handelt.

Folgerung 2.5.6
Sei $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{Q}) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{R}}(\mathrm{R})$ und P′ ein Experte. Dann gilt $\mathrm{E}_{\mathrm{P'Q} \leftrightarrow \mathrm{R}}(\mathrm{P'Q}) \; \geq \; \mathrm{E}_{\mathrm{P'Q} \leftrightarrow \mathrm{R}}(\mathrm{R})$.

Beweis:
Sei P ein Rater. Da P′ ein Experte ist, ist er mächtiger als P (siehe Bem. 2.4.3 ii).
Außerdem gilt: $\langle \mathrm{PQ} \rangle \equiv \mathrm{Q}$, und damit $\mathrm{E}_{\langle \mathrm{PQ} \rangle}(\langle \mathrm{PQ} \rangle) = \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{Q}) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{R}}(\mathrm{R})$.
Die Voraussetzungen der letzten Bemerkung sind also erfüllt, und es folgt die Behauptung. □

Folgerung 2.5.7 Sind $P^1, \ldots, P^k$, $Q^1, \ldots, Q^l$ identisch verteilte Experten, dann ist die Fraktion $P^1 \ldots P^k$ genau dann erfolgversprechender als die Fraktion $Q^1 \ldots Q^l$, wenn k größer ist als l.

Beweis:

Sei $k > l$. Setze $P = \langle P^1 \ldots P^{k-l} \rangle$, $Q = \langle P^{k-l+1} \ldots P^k \rangle$ und $R = \langle Q^1 \ldots Q^l \rangle$.

Dann ist zu zeigen: $E_{PQ \leftrightarrow R}(PQ) \geq E_{PQ \leftrightarrow R}(R)$.

Aufgrund der Identität der Berater gilt $Q \equiv R$ und damit auch $E_Q(Q) = E_R(R)$.

Da alle Berater Experten sind, ist P ebenfalls ein Experte (Bemerkung 2.3.3). Die Voraussetzungen der Folgerung 2.5.6 sind somit erfüllt, und es folgt die Behauptung.

$\square$

2.6 Mehr als zwei Fraktionen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Situation, in der die Berater drei oder mehr verschiedene Vorschläge machen. Eine naive Vermutung, die schon in der Einleitung geäußert wurde, lautet: Der Vorschlag des Beraters mit dem größten Erwartungswert ist am erfolgversprechendsten. Diese Vermutung bestätigt sich aber nicht, wie das nächste Beispiel zeigt.

Beispiel 2.6.1 Sei $w_1 = 3, w_2 = 2$ und $w_3 = 1$.

Betrachte $P = (0.25, 0.7, 0.05)$, $Q = (0.05, 0.9, 0.05)$ und $R = (0.6, 0.1, 0.3)$.

Dann ist $E_P(P) = 2.2$, $E_Q(Q) = 2$ und $E_R(R) = 2.3$.

R hat den größten Erwartungswert, ist aber in der Situation $P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R$ am wenigsten erfolgversprechend:

$E_{P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R}(P) = 0.2965 > E_{P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R}(Q) = 0.2435 > E_{P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R}(R) = 0.225$.

Bemerkung 2.6.2 $F(R^1, \ldots, R^m)$ stehe für eine Fraktionenbildung der Berater $R^1, \ldots, R^m$. Dann gilt:

Ist P mächtiger als Q, so ist $E_{P \leftrightarrow Q \leftrightarrow F(R^1,\ldots,R^m)}(P) \geq E_{P \leftrightarrow Q \leftrightarrow F(R^1,\ldots,R^m)}(Q)$.

Beweis: Wir führen den Beweis beispielhaft für die Berater P, Q, R, S und T in der Fraktionenbildung $P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R \leftrightarrow ST$ vor:

$$E_{P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R \leftrightarrow ST}(P) - E_{P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R \leftrightarrow ST}(Q) = \sum_{\substack{i,j,k,l:\,(i,j,k,l,l) \\ \in \Omega_{P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R \leftrightarrow ST}}} (w_i - w_j)\, p_i\, q_j\, r_k\, s_l\, t_l$$

$$= \sum_{\substack{i,j,k,l \text{ mit } i<j:\,(i,j,k,l,l) \\ \in \Omega_{P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R \leftrightarrow ST}}} (w_i - w_j)\,(p_i\, q_j - p_j\, q_i)\, r_k\, s_l\, t_l .$$

Wenn P mächtiger als Q ist, gilt $p_i\ q_j \geq p_j\ q_i$ für alle $i < j$.

Da außerdem $w_i \geq w_j$ für $i < j$, sind alle Summanden nichtnegativ. □

Folgerung 2.6.3 Falls P ein Experte und Q ein Anti-Experte ist, dann ist für einen beliebigen Berater R bei der Fraktionenbildung P↔Q↔R der Berater P erfolgversprechender als Q.
Dies gilt, da nach Bemerkung 2.4.3 ein Experte mächtiger ist als ein Anti-Experte.

Transformationsaussagen

Bisher haben wir immer nur eine einzige Konstellation von Beratern betrachtet und untersucht, welche der Fraktionen erfolgversprechender ist. Nun wollen wir einen anderen Standpunkt einnehmen. Wir setzen für einige Konstellationen als bekannt voraus, welche der Fraktionen den erfolgversprechendsten Vorschlag macht. Daraus leiten wir Aussagen über andere Konstellationen ab.

Der folgende Satz besagt, daß bei drei verschiedenen Vorschlägen die Eigenschaft eines Beraters, erfolgversprechender zu sein, erhalten bleibt, wenn der Berater auf gewisse Art zentriert wird und sein Erwartungswert dabei genauso groß bleibt oder wächst.

Satz 2.6.4 Sei P′ eine zu Q passende, verbessernde Zentrierung von P an den Stellen $a_1 < a_2 < a_3$, d.h. $p'_{a_1} \leq p_{a_1}, p'_{a_2} \geq p_{a_2}, p'_{a_3} \leq p_{a_3}$ und $p'_i = p_i$ für alle übrigen i mit $\mathrm{E}_{\mathrm{P}'}(\mathrm{P}') \geq \mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{P})$ und $w_{a_1} \geq \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{Q}) \geq w_{a_3}$.
P′ sei gleichzeitig eine Zentrierung bezüglich R, d.h. $r_{a_1} \geq r_{a_2} \geq r_{a_3}$. Dann gilt:
Falls $\mathrm{E}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}(\mathrm{P}) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}(\mathrm{Q})$, dann ist auch $\mathrm{E}_{\mathrm{P}'\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}(\mathrm{P}') \geq \mathrm{E}_{\mathrm{P}'\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}(\mathrm{Q})$.

Beweis: Wir setzen $\Delta = \mathrm{E}_{\mathrm{P}'}(\mathrm{P}') - \mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{P})$ und $\varepsilon_i = p'_i - p_i$ für alle i.
Da P′ eine verbessernde Zentrierung von P ist, gilt $\Delta \geq 0$.

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}'\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}(\mathrm{P}') - \mathrm{E}_{\mathrm{P}'\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}(\mathrm{Q})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} r_i \sum_{k \neq i} w_k \{p'_k(1-q_i-q_k) - q_k(1-p'_i-p'_k)\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} r_i \sum_{k \neq i} w_k \{p_k(1-q_i) - q_k(1-p_i)\} + \sum_{i=1}^{n} r_i \{\sum_{k \neq i} w_k \{\varepsilon_k(1-q_i) + q_k\varepsilon_i\}$$

$$= \mathrm{E}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}(\mathrm{P}) - \mathrm{E}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}(\mathrm{Q}) + \sum_{i=1}^{n} r_i \{\sum_{k=1}^{n} w_k \{\varepsilon_k(1-q_i) + q_k\varepsilon_i\} - w_i \{\varepsilon_i(1-q_i) + q_i\varepsilon_i\}\}$$

$$= \mathrm{E}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}(\mathrm{P}) - \mathrm{E}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}(\mathrm{Q}) + \sum_{i=1}^{n} r_i\{(1-q_i)\Delta + \varepsilon_i(\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{Q}) - w_i)\}\ .$$

Die Differenz $E_{P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R}(P) - E_{P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R}(Q)$ ist nach Voraussetzung nichtnegativ. Zum Beweis des Satzes genügt es also zu zeigen, daß auch der Rest $\sum_{i=1}^{n} r_i\{\ldots\}$ nichtnegativ ist. Da P′ eine Zentrierung an den Stellen a_1, a_2 und a_3 ist, gilt
$\varepsilon_{a_1} \leq 0, \varepsilon_{a_2} \geq 0, \varepsilon_{a_3} \leq 0$, und $\varepsilon_i = 0$ für $i \notin \{a_1, a_2, a_3\}$.
Durch Übergang zu einer Ziehharmonikasumme wird der Restterm

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\{(1-q_i)\Delta + \varepsilon_i(E_Q(Q) - w_i)\} = \sum_{i=1}^{n} r_i \; (1-q_i)\Delta + \sum_{j=1}^{3} r_{a_j} \; \varepsilon_{a_j}(E_Q(Q) - w_{a_j})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} r_i(1-q_i)\Delta + \; (r_{a_1} - r_{a_2})\varepsilon_{a_1}(E_Q(Q) - w_{a_1})$$

$$+ \; (r_{a_2} - r_{a_3})\{\varepsilon_{a_1}(E_Q(Q) - w_{a_1}) + \varepsilon_{a_2}(E_Q(Q) - w_{a_2})\}$$

$$+ r_{a_3}\{\varepsilon_{a_1}(E_Q(Q) - w_{a_1}) + \varepsilon_{a_2}(E_Q(Q) - w_{a_2}) + \varepsilon_{a_3}(E_Q(Q) - w_{a_3})\} \; .$$

Da $\sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{a_j} = 0$ und $\sum_{j=1}^{3} w_{a_j}\varepsilon_{a_j} = \Delta$, ist der Faktor von r_{a_3}

$$\varepsilon_{a_1}(E_Q(Q) - w_{a_1}) + \varepsilon_{a_2}(E_Q(Q) - w_{a_2}) + \varepsilon_{a_3}(E_Q(Q) - w_{a_3})$$

$$= E_Q(Q) \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{a_j} - \sum_{j=1}^{3} w_{a_j}\varepsilon_{a_j} = -\Delta \; .$$

Also ist der Restterm

$$= \sum_{i=1}^{n} r_i(1-q_i)\Delta + (r_{a_1} - r_{a_2})\varepsilon_{a_1}(E_Q(Q) - w_{a_1})$$

$$+ (r_{a_2} - r_{a_3})\{-\Delta + \varepsilon_{a_3}(w_{a_3} - E_Q(Q))\} + r_{a_3}\{-\Delta\}$$

$$= (r_{a_1} - r_{a_2})\varepsilon_{a_1}(E_Q(Q) - w_{a_1}) + (r_{a_2} - r_{a_3})\varepsilon_{a_3}(w_{a_3} - E_Q(Q)) + \Delta\{[\sum_{i=1}^{n} r_i(1-q_i)] - r_{a_2}\} \; .$$

Da $\varepsilon_{a_1} \leq 0, \varepsilon_{a_2} \geq 0, \varepsilon_{a_3} \leq 0, r_{a_1} \geq r_{a_2} \geq r_{a_3}$ und $w_{a_1} \geq E_Q(Q) \geq w_{a_3}$, ist dies

$$\geq \Delta \; \{[\sum_{i=1}^{n} r_i(1-q_i)] - r_{a_2}\}$$

$$\geq \Delta \; \{r_{a_1}(1-q_{a_1}) + r_{a_2}(1-q_{a_2}) - r_{a_2}\} \geq \Delta \; r_{a_2}(1 - q_{a_1} - q_{a_2}) \geq 0 \; .$$

□

Folgerung 2.6.5 Sei P′ eine zu Q passende verbessernde Zentrierung von Q und gleichzeitig eine verbessernde Zentrierung bezüglich R, jeweils an den Stellen a_1, a_2 und a_3. Dann ist $\mathrm{E}_{\mathrm{P'}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{P'}) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{P'}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{Q})$.

Dies folgt aus Satz 2.6.4 durch Identifizieren von P und Q.

Folgerung 2.6.6 P′ entstehe aus Q durch mehrere echte Zentrierungen bezüglich R, die alle zu Q passend sind, d.h. es existieren Berater $\mathrm{P}^1, \ldots, \mathrm{P}^k$, für die gilt: $\mathrm{P}^1 \equiv \mathrm{Q}$, $\mathrm{P}^k \equiv \mathrm{P'}$, und für alle $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ ist P^{i+1} eine zu P^i passende echte Zentrierung von P^i, die auch eine Zentrierung bezüglich R ist.

Dann ist $\mathrm{E}_{\mathrm{P'}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{P'}) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{P'}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{Q})$.

Beweis: Aufgrund der Folgerung 2.5.7 gilt für alle i:

$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^{i+1}\leftrightarrow\mathrm{P}^i\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{P}^{i+1}) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{P}^{i+1}\leftrightarrow\mathrm{P}^i\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{P}^i)$.

Da P^{i+2} eine echte Zentrierung von P^{i+1} ist und sie zu P^i paßt (weil $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\,(\mathrm{Q}) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^i}\,(\mathrm{P}^i)$), folgt aus Satz 2.5.4:

$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^{i+2}\leftrightarrow\mathrm{P}^i\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{P}^{i+2}) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{P}^{i+2}\leftrightarrow\mathrm{P}^i\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{P}^i)$.

Die mehrfache Anwendung dieser Argumente ergibt

$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^k\leftrightarrow\mathrm{P}^1\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{P}^k) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{P}^k\leftrightarrow\mathrm{P}^1\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{P}^1)$. □

Beachte: Da es Beispiele für gleich gute Berater gibt, von denen weder der eine durch mehrere echte Zentrierungen aus dem anderen entsteht, noch umgekehrt (siehe Bemerkung 2.4.13), liefert die Folgerung 2.6.6 nicht für beliebige Berater mit gleichem Erwartungswert eine Aussage über den erfolgversprechenderen Vorschlag bei drei Fraktionen.

Satz 2.6.7 Wenn P′, P und Q den gleichen Erwartungswert haben, gilt die folgende Transitivität:

Falls $\mathrm{E}_{\mathrm{P'}\leftrightarrow\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{P'}) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{P'}\leftrightarrow\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{P})$ und $\mathrm{E}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{P}) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{Q})$,

dann folgt $\mathrm{E}_{\mathrm{P'}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{P'}) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{P'}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{Q})$.

Beweis: Es gilt:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P'}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{P'}) - \mathrm{E}_{\mathrm{P'}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\,(\mathrm{Q}) = \sum_{\substack{i,j,k:(k,j,i)\\ \in\Omega_{\mathrm{P'}\longleftrightarrow\mathrm{Q}\longleftrightarrow\mathrm{R}}}} w_k\; p'_k q_j r_i \;-\; \sum_{\substack{i,j,k:(j,k,i)\\ \in\Omega_{\mathrm{P'}\longleftrightarrow\mathrm{Q}\longleftrightarrow\mathrm{R}}}} w_k\; p'_j q_k r_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} r_i \sum_{k\neq i} w_k\{p'_k(1-q_i-q_k) - q_k(1-p'_i-p'_k)\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} r_i \sum_{k=1}^{n} w_k\{p'_k - p'_k q_i - q_k - q_k p'_i\} - w_i\{p'_i - p'_i q_i - q_i - q_i p'_i\}$$

$$= \mathrm{E}_{\mathrm{P'}}\,(\mathrm{P'}) - \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\,(\mathrm{Q}) + \sum_{i=1}^{n} r_i\{p'_i(\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\,(\mathrm{Q}) - w_i) - q_i(\mathrm{E}_{\mathrm{P'}}\,(\mathrm{P'}) - w_i)\}$$

Da P′, P und Q den gleichen Erwartungswert haben, ist dies

$$= \sum_{i=1}^{n} r_i\{(p'_i - q_i)(\mathrm{E}_{\mathrm{P'}}\,(\mathrm{P'}) - w_i)\}$$

$= \ \{E_{P'\leftrightarrow P\leftrightarrow R}(P') - E_{P'\leftrightarrow P\leftrightarrow R}(P)\} + \{E_{P\leftrightarrow Q\leftrightarrow R}(P) - E_{P\leftrightarrow Q\leftrightarrow R}(Q)\}$,
weil dieselben Umformungen für P' und P bzw. P und Q gelten.
Damit folgt die Behauptung. □

Bevor wir in Abschnitt 2.7 auf abhängige Berater eingehen, geben wir hier einen Überblick über die wichtigsten Ergebnisse für unabhängige Berater.

Übersichtstabellen 2.6.8 In der folgenden Tabelle geben wir an, unter welchen Zusatzbedingungen P erfolgversprechender ist als Q. Alle Berater könnten dabei auch für Fraktionsverteilungen stehen.

Fraktionenbildung Für P und Q gilt	$P\leftrightarrow Q$	$P\leftrightarrow Q\leftrightarrow R$	$P\leftrightarrow Q\leftrightarrow R\leftrightarrow S^1\leftrightarrow\ldots\leftrightarrow S^m$
P ist mächtiger als Q	immer Bem.2.4.8 und 2.5.1	immer Bem.2.6.2	immer Bem.2.6.2
$E_P(P) > E_Q(Q)$	immer Bem. 2.5.1	P ist verbessernde Zentrierung von Q, die zu Q passend und eine Zentrierung bezüglich R ist. Bem.2.6.5	
$E_P(P) = E_Q(Q)$	beide Erwartungswertanteile sind gleich groß Bem. 2.5.1	P entsteht durch mehrere echte Zentrierungen aus Q, die zu Q passend und Zentrierungen bezüglich R sind. Bem.2.6.6	

In der nächsten Tabelle fassen wir die Transformationsaussagen dieses Kapitels zusammen.

	Voraussetzungen	Folgerung
Zwei Fraktionen	P' ist mächtiger als P und $E_{PQ\leftrightarrow R}(PQ) \geq E_{PQ\leftrightarrow R}(R)$ $\{\Leftrightarrow E_{\langle PQ\rangle}(\langle PQ\rangle) \geq E_R(R)\}$	$E_{P'Q\leftrightarrow R}(P'Q) \geq E_{P'Q\leftrightarrow R}(R)$ Bem. 2.5.5 (interpretiert als Transformationsaussage)
Drei Fraktionen	P' ist verbessernde Zentrierung von P bezüglich R, die zu Q paßt und $E_{P\leftrightarrow Q\leftrightarrow R}(P) \geq E_{P\leftrightarrow Q\leftrightarrow R}(Q)$	$E_{P'\leftrightarrow Q\leftrightarrow R}(P') \geq E_{P'\leftrightarrow Q\leftrightarrow R}(Q)$ Satz 2.6.4
	$E_{P'}(P') = E_P(P) = E_Q(Q)$ und $E_{P'\leftrightarrow Q\leftrightarrow R}(P') \geq E_{P'\leftrightarrow Q\leftrightarrow R}(Q)$ $E_{P\leftrightarrow Q\leftrightarrow R}(P) \geq E_{P\leftrightarrow Q\leftrightarrow R}(Q)$	$E_{P'\leftrightarrow Q\leftrightarrow R}(P') \geq E_{P'\leftrightarrow Q\leftrightarrow R}(Q)$ Satz 2.6.7

2.7 Abhängige Berater

In den Abschnitten 2.2 bis 2.6 haben wir stets vorausgesetzt, daß alle auftretenden Berater unabhängig voneinander sind. In der Praxis wird dies jedoch häufig nicht der Fall sein. Wir zeigen in tabellarischer Form auf, welche Aussagen, gegebenenfalls mit Zusatzvoraussetzungen, auch für abhängige Berater gelten. Zu den Aussagen, die nicht übertragbar sind, geben wir größtenteils Gegenbeispiele an.
Anschließend stellen wir einige spezielle Ergebnisse für drei Berater vor, von denen nur einer von den beiden anderen unabhängig ist.

In den Gegenbeispielen sind die Gewichte immer $w_1 = 3, w_2 = 2$ und $w_3 = 1$.

Übersicht 2.7.1

Abschn.2.2 — Die Begriffe und Bemerkungen des Abschnitts „Strategien und Erwartungswertanteile“ sind direkt übertragbar und gültig.

Bem. 2.3.3 — i) Ist [PQ] symmetrisch, so folgt: $\langle \mathrm{PQ} \rangle = \langle \mathrm{QP} \rangle$.

ii) Im Gegensatz zu $\langle \mathrm{PQR} \rangle$ ist die Schachtelung $\langle \langle \mathrm{PQ} \rangle \mathrm{R} \rangle$ nicht definiert für abhängige Berater P, Q und R, denn für die gemeinsame Verteilung von $\langle \mathrm{PQ} \rangle$ und R wäre die Beziehung zwischen den Randwahrscheinlichkeiten $\langle \mathrm{PQ} \rangle_i$ und r_i und der gemeinsamen Verteilung (siehe Definition 2.1.3) nicht erfüllt.

iii) Auch hier ist im allgemeinen $\langle \mathrm{PP} \rangle \neq \mathrm{P}$.

iv) Im allgemeinen ist $\langle \mathrm{PR} \rangle \neq \mathrm{P}$. Beispiel:

$$[\mathrm{PR}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{2}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{12} & \frac{1}{12} & \frac{2}{12} \end{pmatrix}$$

Dann ist $\mathrm{P} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12})$ und $\mathrm{R} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ein Rater, aber $\langle \mathrm{PR} \rangle = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}) \neq \mathrm{P}$.

v) Im allgemeinen ist die Fraktionsverteilung zweier Experten kein Experte. Beispiel:

$$[\mathrm{P'Q}] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Dann ist $\mathrm{P'} \equiv \mathrm{Q} = (\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10})$ und $\langle \mathrm{P'Q} \rangle = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, also kein Experte.

Bem. 2.3.4 — gilt unter einer zusätzlichen Voraussetzung („fraktionsweise Unabhängigkeit“) an die gemeinsamen Verteilungen der verschiedenen Fraktionen. Seien z.B. P, Q, R, S und T Berater, für deren gemeinsame Verteilungen gilt:
$[\mathrm{PQRST}]_{iijjk} = [\mathrm{PQ}]_{ii} \cdot [\mathrm{RS}]_{jj} \cdot [\mathrm{T}]_k$ für alle $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$.
Dann gibt es eine Konstante $\mathrm{K}_{\mathrm{PQ-RS-T}}$, so daß für alle Fraktionen F aus $\mathrm{PQ}\leftrightarrow\mathrm{RS}\leftrightarrow\mathrm{T}$ gilt:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{PQ}\leftrightarrow\mathrm{RS}\leftrightarrow\mathrm{T}}\ (\mathrm{F}) = \underbrace{(\sum_{l=1}^{n} p_l q_l)\ (\sum_{l=1}^{n} r_l s_l)\ (\sum_{l=1}^{n} t_l)}_{\mathrm{K}_{\mathrm{PQ-RS-T}}} \mathrm{E}_{\langle \mathrm{PQ} \rangle \leftrightarrow \langle \mathrm{RS} \rangle \leftrightarrow \langle \mathrm{T} \rangle}\ (\langle \mathrm{F} \rangle)\ .$$

Folg. 2.3.5 i) gilt, wenn der Rater von allen gemeinsamen Verteilungen der Fraktionen unabhängig ist.
ii) gilt, falls zusätzlich die gemeinsamen Verteilungen aller Fraktionen dieselbe Unabhängigkeitsbedingung erfüllen, die zur Übertragung der Bemerkung 2.3.4 erforderlich ist.

Bem. 2.4.3 i) gilt nicht, weil $[\mathrm{PQ}]_{ij} \geq [\mathrm{PQ}]_{ji}$ nicht äquivalent ist zu $p_i q_j \geq p_j q_i$.
ii) Im allgemeinen ist ein Experte nicht mächtiger als ein Anti-Experte, Beispiel:

$$[\mathrm{PQ}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & \frac{4}{10} \\ 0 & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{2}{10} & 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist $\mathrm{P} = (\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3})$ ein Experte und $\mathrm{Q} = (\frac{1}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2})$ ein Anti-Experte, aber $[\mathrm{PQ}]_{23} < [\mathrm{PQ}]_{32}$.

iii) gilt entsprechend.
Bem. 2.4.4,2.4.8, 2.4.9, Bem 2.4.13 und 2.5.1 gelten entsprechend.

Folg. 2.5.2 gilt nur, wenn die gemeinsamen Verteilungen beider Fraktionen dieselbe Unabhängigkeitsbedingung erfüllen, die zur Übertragung der Bemerkung 2.3.4 erforderlich ist.

Bem. 2.5.3 i) bis iii) gelten entsprechend.
iv) gilt nicht, siehe Gegenbeispiel zu 2.5.6.

Satz 2.5.4 Dieser Satz läßt sich nicht mit den dortigen Voraussetzungen übertragen, siehe Gegenbeispiel zu 2.5.6.

Folg. 2.5.6 gilt nicht, Beispiel:
P′, Q und R seien identisch verteilte Experten:
Sei $\mathrm{R} = (\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10})$ und $[\mathrm{P'Q}]$ wie oben in 2.3.3.
Dann ist $\langle \mathrm{P'Q} \rangle = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\mathrm{E_R}(\mathrm{R}) = 2.1$ und $\mathrm{E}_{\langle \mathrm{P'Q} \rangle}(\langle \mathrm{P'Q} \rangle) = 1.5$, damit sind die Voraussetzungen an die Folgerung 2.5.6 erfüllt:
$\mathrm{E_Q}(\mathrm{Q}) = \mathrm{E_R}(\mathrm{R})$ und P′ Experte.
Aber dennoch ist $\mathrm{E}_{\langle \mathrm{P'Q} \rangle}(\langle \mathrm{P'Q} \rangle) < \mathrm{E_R}(\mathrm{R})$ und somit
$\mathrm{E}_{\mathrm{P'Q} \leftrightarrow \mathrm{R}}(\mathrm{P'Q}) < \mathrm{E}_{\mathrm{P'Q} \leftrightarrow \mathrm{R}}(\mathrm{R})$ (nach Bemerkung 2.3.4).

Folg. 2.5.7 gilt nicht, siehe Gegenbeispiel zu 2.5.6.

Bem. 2.6.2 gilt, falls die gemeinsamen Verteilungen die folgenden Bedingungen erfüllen:
$[\mathrm{PQR}^1, \ldots, \mathrm{R}^m]_{ijk_1 \ldots k_m} = [\mathrm{PQ}]_{ij} \cdot [\mathrm{R}^1, \ldots, \mathrm{R}^m]_{k_1 \ldots k_m}$
für $i, j, k_1, \ldots, k_m$ mit $i \neq j$ und $i, j \notin \{k_1, \ldots, k_m\}$.

Folg. 2.6.3 gilt nicht, da ein Experte nicht unbedingt mächtiger ist als ein Anti-Experte, wenn die beiden abhängig sind (siehe Bemerkung 2.4.3).

Satz 2.6.4 gilt nicht, siehe Gegenbeispiel zu Folgerung 2.6.6.

Folg. 2.6.5 gilt nicht, siehe Gegenbeispiel zu Folgerung 2.6.6.

Folg. 2.6.6 gilt nicht, Beispiel: Sei $\mathrm{R} = (1, 0, 0)$ und

$$[\mathrm{P'Q}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Dann ist $\mathrm{P'} = (\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5})$ und $\mathrm{Q} = (\frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10})$.

P′ ist also eine echte Zentrierung von Q, da $w_1 = 3$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1$, aber $\mathrm{E}_{\mathrm{P'} \leftrightarrow \mathrm{Q} \leftrightarrow \mathrm{R}}(\mathrm{P'}) - \mathrm{E}_{\mathrm{P'} \leftrightarrow \mathrm{Q} \leftrightarrow \mathrm{R}}(\mathrm{P'}) = [\mathrm{P'Q}]_{23} - [\mathrm{P'Q}]_{32} < 0$.

Satz 2.6.7 gilt nicht.

Spezielle Ergebnisse

Wir benutzen die folgenden Abkürzungen:

$\mathrm{E}^{\mathrm{unabh}}_{\mathrm{Fraktionenbildung}}(\mathrm{Fraktion})$, falls für die gemeinsame Verteilung von P und Q die „unabhängige Verteilung“ $(p_i\, q_j)_{i,j\,\in\{1,\ldots,n\}}$ zugrunde gelegt wird.

$\mathrm{E}^{\mathrm{abh}}_{\mathrm{Fraktionenbildung}}(\mathrm{Fraktion})$ benutzen wir, wenn die tatsächliche gemeinsame Verteilung von P und Q eingesetzt wird, z.B:

$$\mathrm{E}^{\mathrm{unabh}}_{\mathrm{PR}\leftrightarrow\mathrm{Q}}\ (\mathrm{PR}) = \sum_{\substack{i,j:(i,j,i)\\ \in\Omega_{\mathrm{PR}\longleftrightarrow\mathrm{Q}}}} w_i\, p_i q_j r_i \quad \text{und} \quad \mathrm{E}^{\mathrm{abh}}_{\mathrm{PR}\leftrightarrow\mathrm{Q}}\ (\mathrm{PR}) = \sum_{\substack{i,j:(i,j,i)\\ \in\Omega_{\mathrm{PR}\longleftrightarrow\mathrm{Q}}}} w_i\, [\mathrm{PQ}]_{ij} r_i.$$

Bemerkung 2.7.2 R sei von P und Q unabhängig.

i) Ist R ein Experte und ist die gemeinsame Verteilung von P und Q symmetrisch, dann folgt $\mathrm{E}^{\mathrm{abh}}_{\mathrm{PR}\leftrightarrow\mathrm{Q}}\ (\mathrm{PR}) \geq \mathrm{E}^{\mathrm{abh}}_{\mathrm{PR}\leftrightarrow\mathrm{Q}}\ (\mathrm{Q})$.

ii) R sei ein Experte und es gebe ein $\varepsilon \geq 0$ mit $[\mathrm{PQ}]_{ij} = p_i q_j - \varepsilon$ für alle $i \neq j$. Dann gilt:

   (a) Aus $\mathrm{E}^{\mathrm{unabh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{QR}}\ (\mathrm{P}) \geq \mathrm{E}^{\mathrm{unabh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{QR}}\ (\mathrm{QR})$ folgt $\mathrm{E}^{\mathrm{abh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{QR}}\ (\mathrm{P}) \geq \mathrm{E}^{\mathrm{abh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{QR}}\ (\mathrm{QR})$.

   (b) Aus $\mathrm{E}^{\mathrm{unabh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\ (\mathrm{P}) \geq \mathrm{E}^{\mathrm{unabh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\ (\mathrm{R})$ folgt $\mathrm{E}^{\mathrm{abh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\ (\mathrm{P}) \geq \mathrm{E}^{\mathrm{abh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\ (\mathrm{R})$.

iii) Für alle i, j gelte $[\mathrm{PQ}]_{ij} - [\mathrm{PQ}]_{ji} = p_i q_j - p_j q_i$. Dann ist
$\mathrm{E}^{\mathrm{unabh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\ (\mathrm{P}) - \mathrm{E}^{\mathrm{unabh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\ (\mathrm{Q}) = \mathrm{E}^{\mathrm{abh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\ (\mathrm{P}) - \mathrm{E}^{\mathrm{abh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\ (\mathrm{Q})$.

Beweis:

zu i) $\mathrm{E}^{\mathrm{abh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{QR}}\ (\mathrm{QR}) - \mathrm{E}^{\mathrm{abh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{QR}}\ (\mathrm{P}) = \displaystyle\sum_{\substack{i<j\,:\,(i,j,j)\\ \in\,\Omega_{\mathrm{P}\longleftrightarrow\mathrm{QR}}}} (w_j - w_i)\, [\mathrm{PQ}]_{ij}\, (r_j - r_i)$.

Da R ein Experte ist, sind alle Summanden positiv.

zu ii) a) $\mathrm{E}^{\mathrm{abh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{QR}}\ (\mathrm{P}) - \mathrm{E}^{\mathrm{abh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{QR}}\ (\mathrm{QR}) = \displaystyle\sum_{\substack{i,j,j\,:\,(i,j,j)\\ \in\,\Omega_{\mathrm{P}\longleftrightarrow\mathrm{QR}}}} (w_i - w_j)\, (p_i q_j - \varepsilon)\, r_j$

$$= \mathrm{E}^{\mathrm{unabh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{QR}}\ (\mathrm{P}) - \mathrm{E}^{\mathrm{unabh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{QR}}\ (\mathrm{QR})\ + \sum_{\substack{i<j\,:\,(i,j,j)\\ \in\,\Omega_{\mathrm{P}\longleftrightarrow\mathrm{QR}}}} \underbrace{(w_i - w_j)}_{\geq 0}\, \underbrace{(-\varepsilon)}_{\leq 0}\, \underbrace{(r_j - r_i)}_{\leq 0}.$$

zu ii) b) $\mathrm{E}^{\mathrm{abh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\ (\mathrm{P}) - \mathrm{E}^{\mathrm{abh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\ (\mathrm{R})$

$$= \sum_{\substack{i,j,k\,:\,(i,j,k)\\ \in\,\Omega_{\mathrm{P}\longleftrightarrow\mathrm{Q}\longleftrightarrow\mathrm{R}}}} (w_i - w_k)\, p_i\, q_j\, r_k + \sum_{\substack{i,j,k\,:\,(i,j,k)\\ \in\,\Omega_{\mathrm{P}\longleftrightarrow\mathrm{Q}\longleftrightarrow\mathrm{R}}}} (w_i - w_k)\, (-\varepsilon)\, r_k$$

$$= \mathrm{E}^{\mathrm{unabh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\ (\mathrm{P}) - \mathrm{E}^{\mathrm{unabh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\ (\mathrm{R}) \ + \sum_{\substack{i,j,k \text{ mit } i<k: \\ (i,j,k)\in\Omega_{\mathrm{P}\longleftrightarrow\mathrm{Q}\longleftrightarrow\mathrm{R}}}} \underbrace{(w_i - w_k)}_{\geq 0}\ \underbrace{(-\varepsilon)}_{\leq 0}\ \underbrace{(r_k - r_i)}_{\leq 0} .$$

zu iii) $$\mathrm{E}^{\mathrm{abh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\ (\mathrm{P}) - \mathrm{E}^{\mathrm{abh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\ (\mathrm{Q}) = \sum_{\substack{i,j,k \text{ mit } i<j: \\ (i,j,k)\in\Omega_{\mathrm{P}\longleftrightarrow\mathrm{Q}\longleftrightarrow\mathrm{R}}}} (w_i - w_j)\,([\mathrm{PQ}]_{ij} - [\mathrm{PQ}]_{ji})\, r_k$$

$$= \sum_{\substack{i,j,k \text{ mit } i<j: \\ (i,j,k)\in\Omega_{\mathrm{P}\longleftrightarrow\mathrm{Q}\longleftrightarrow\mathrm{R}}}} (w_i - w_j)\,(p_i q_j - p_j q_i)\, r_k = \mathrm{E}^{\mathrm{unabh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\ (\mathrm{P}) - \mathrm{E}^{\mathrm{unabh}}_{\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R}}\ (\mathrm{Q}) .$$

□

3 Das 3-Hirn - Zwei Berater mit Koordinator

3.1 Einführung

Das 3-Hirn vereinigt in sich zwei Schachcomputer und einen Menschen zu einem Schachspieler. Hier beschreiben wir noch einmal kurz seine Funktionsweise.
Ist das 3-Hirn in einer Partie am Zug, agiert es wie folgt: Der Mensch läßt beide Computer einen Zugvorschlag berechnen. Schlagen sie denselben Zug vor, zieht der Mensch diesen; schlagen sie zwei verschiedene Züge vor, so führt er den aus, der seiner Meinung nach der bessere von beiden ist.
Setzen wir voraus, daß ein Schachspieler (Mensch oder Computer), sich in einer gegebenen Stellung mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten für den besten, zweitbesten, drittbesten, ... Zug entscheidet, dann stellt er damit einen Berater gemäß der Definition in Kapitel 2 dar.
Mit dem 3-Hirn ist gleichzeitig auch ein allgemeines Schema gegeben, um drei Berater zu einem neuen zusammenzuschließen. In diesem Sinne wollen wir das 3-Hirn mit den Begriffen aus Kapitel 2 mathematisch betrachten und behandeln folgende Fragen: Wie ändert sich die Verteilung des 3-Hirns, wenn sich die Verteilung des Koordinators ändert? Welches ist die erfolgversprechendste Art, aus drei gegebenen Beratern ein 3-Hirn zu bilden, d.h. welcher Berater sollte am besten die Koordination übernehmen?

Definition des 3-Hirns als Berater

Durch die Entscheidungsfindung des 3-Hirns als Schachspieler wird die folgende Definition der Verteilung eines 3-Hirns nahegelegt:
Sei die gemeinsame Verteilung
$([\mathrm{KPQ}]_{ijk})_{1\leq i,j,k\leq n}$ regulär, d.h. sie besitze nur positive Einträge.
Die Wahrscheinlichkeit, daß K aus den Alternativen i und j die Alternative i wählt, unter der Bedingung, daß P die Alternative i und Q die Alternative j vorschlägt, ist

$$\frac{[\mathrm{KPQ}]_{iij}}{[\mathrm{KPQ}]_{iij} + [\mathrm{KPQ}]_{jij}} .$$

Deshalb setzen wir für die Wahrscheinlichkeit, daß sich das 3-Hirn $\binom{\mathrm{K}}{\mathrm{PQ}}$ für die i-te Alternative entscheidet:

$$\binom{\mathrm{K}}{\mathrm{PQ}}_i = \sum_{j=1}^{n} \left\{ [\mathrm{PQ}]_{ij} \frac{[\mathrm{KPQ}]_{iij}}{[\mathrm{KPQ}]_{iij} + [\mathrm{KPQ}]_{jij}} + [\mathrm{PQ}]_{ji} \frac{[\mathrm{KPQ}]_{iji}}{[\mathrm{KPQ}]_{iji} + [\mathrm{KPQ}]_{jji}} \right\}.$$

Die beiden 3-Hirne $\binom{\mathrm{K}}{\mathrm{PQ}}$ und $\binom{\mathrm{K}}{\mathrm{QP}}$ sind also identisch verteilt.

Wenn K, P und Q unabhängige Berater sind, vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$\binom{\mathrm{K}}{\mathrm{PQ}}_i = \sum_{j=1}^{n} p_i q_j \frac{k_i}{k_i + k_j} + p_j q_i \frac{k_i}{k_i + k_j} = \sum_{j=1}^{n} (p_i q_j + p_j q_i) \frac{k_i}{k_i + k_j} .$$

K nennen wir den **Koordinator**, P und Q die **Mitarbeiter** des 3-Hirns $\binom{\mathrm{K}}{\mathrm{PQ}}$.

Beispiel 3.1.1 K, P und Q seien voneinander unabhängige Berater.

1. Ist $\mathrm{K} \equiv \mathrm{P} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ und Q ein Rater, dann ist $\binom{\mathrm{K}}{\mathrm{PQ}} = \binom{\mathrm{P}}{\mathrm{KQ}} = \binom{\mathrm{Q}}{\mathrm{KP}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$.
2. Ist K ein Rater, $\mathrm{P} = (\frac{5}{11}, \frac{4}{11}, \frac{2}{11})$ und $\mathrm{Q} = (\frac{3}{11}, \frac{2}{11}, \frac{6}{11})$, so ist $\binom{\mathrm{K}}{\mathrm{PQ}} = (\frac{4}{11}, \frac{3}{11}, \frac{4}{11})$.
3. Ist $\mathrm{K} \equiv \mathrm{P} \equiv \mathrm{Q} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$, dann ist $\binom{\mathrm{K}}{\mathrm{PQ}} = (0.57\,, 0.32\,, 0.11)$.

Bemerkung 3.1.2 i) Ist der Koordinator K ein von den Mitarbeitern P und Q unabhängiger Rater, dann ist

$\binom{\mathrm{K}}{\mathrm{PQ}}_i = \sum_{j=1}^{n} ([\mathrm{PQ}]_{ij} + [\mathrm{PQ}]_{ji}) \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{p_i + q_i}{2}$ für alle i.

ii) Der Koordinator und ein Mitarbeiter P seien identisch verteilt. Ist der Mitarbeiter Q ein Rater und sind alle drei Teilnehmer unabhängig voneinander, dann ist die Verteilung des 3-Hirns identisch mit der von P und K:

$\binom{\mathrm{K}}{\mathrm{PQ}}_i = \sum_{j=1}^{n} (p_i \frac{1}{n} + p_j \frac{1}{n}) \frac{p_i}{p_i + p_j} = p_i$ für alle i.

iii) Ist P ein Berater und R ein Rater, so ist $\binom{\mathrm{R}}{\mathrm{PP}} \equiv \binom{\mathrm{P}}{\mathrm{RP}} \equiv \binom{\mathrm{P}}{\mathrm{PR}}$.

Dies folgt aus i) und ii).

Wir setzen im folgenden stets voraus, daß die gemeinsame Verteilung von Beratern, die wir zu einem 3-Hirn zusammenfassen, regulär ist.

3.2 Vergleich verschiedener 3-Hirne

Zunächst zeigen wir, daß ein mächtigerer Koordinator ein erfolgversprechenderes 3-Hirn garantiert. Dazu beweisen wir, daß die Verteilung des einen 3-Hirns Schur-besser als die des anderen ist. Denn wie wir in der Beobachtung 2.4.8 gesehen haben, hat ein Berater, der Schur-besser ist, einen größeren Erwartungswert.

Bemerkung 3.2.1 K und K$'$ seien jeweils unabhängig von P und Q. Dann gilt:
Ist K mächtiger als K$'$, so ist $\binom{\mathrm{K}}{\mathrm{PQ}}$ Schur-besser als $\binom{\mathrm{K}'}{\mathrm{PQ}}$.

Beweis: Für $1 \leq l \leq n$ gilt

$$\sum_{i=1}^{l} \left\{ \binom{\mathrm{K}}{\mathrm{PQ}}_i - \binom{\mathrm{K}'}{\mathrm{PQ}}_i \right\} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} ([\mathrm{PQ}]_{ij} + [\mathrm{PQ}]_{ji}) \left(\frac{k_i}{k_i + k_j} - \frac{k'_i}{k'_i + k'_j} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1, j>i}^{l} ([\mathrm{PQ}]_{ij} + [\mathrm{PQ}]_{ji}) \underbrace{\frac{(k_i k'_j - k_j k'_i) + (k_j k'_i - k_i k'_j)}{(k_i + k_j)(k'_i + k'_j)}}_{=0}$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=l+1}^{n} ([\mathrm{PQ}]_{ij} + [\mathrm{PQ}]_{ji}) \frac{k_i k'_j - k_j k'_i}{(k_i + k_j)(k'_i + k'_j)} \geq 0 ,$$

denn da K mächtiger ist als K$'$, gilt für alle $i < j : k_i k'_j - k_j k'_i \geq 0$. □

Folgerung 3.2.2 Sei K ein Experte, der unabhängig von den Beratern P und Q ist.
Dann gilt $\mathrm{E}_{\binom{\mathrm{K}}{\mathrm{PQ}}} \binom{\mathrm{K}}{\mathrm{PQ}} \geq \frac{\mathrm{E_P\,(P) + E_Q\,(Q)}}{2}$.
Insbesondere ist dann $\mathrm{E}_{\binom{\mathrm{K}}{\mathrm{KK}}} \binom{\mathrm{K}}{\mathrm{KK}} \geq \mathrm{E_K\,(K)}$ und $\mathrm{E}_{\binom{\mathrm{K}}{\mathrm{PP}}} \binom{\mathrm{K}}{\mathrm{PP}} \geq \mathrm{E_P\,(P)}$.

Beispiel 3.2.3

1. Seien K = (0.6 , 0.3 , 0.1), P = (0.5 , 0.3 , 0.2) und Q = (0.4 , 0.3 , 0.3) unabhängige Berater. Dann ist $\binom{\mathrm{K}}{\mathrm{PQ}}$ = (0.58 , 0.29 , 0.13).
   $\binom{\mathrm{K}}{\mathrm{PQ}}$ ist also Schur-besser als P und Q, aber nicht Schur-besser als K.
2. Es gibt aber auch 3-Hirne, die Schur-besser als alle ihre Teilnehmer sind.
   Ist K = (0.4 , 0.3 , 0.3) und P ≡ Q = (0.5 , 0.3 , 0.2),
   so ist $\binom{\mathrm{K}}{\mathrm{PQ}}$ = (0.54 , 0.28 , 0.18).

Bemerkung 3.2.4 P, Q und R seien Berater über zwei Alternativen mit beliebigen gemeinsamen Verteilungen. Dann sind alle 3-Hirne, die aus diesen gebildet werden können, identisch verteilt:

$$\binom{\mathrm{P}}{\mathrm{QR}} \equiv \binom{\mathrm{Q}}{\mathrm{RP}} \equiv \binom{\mathrm{R}}{\mathrm{PQ}}.$$

Beweis: Da n = 2 ist, genügt es zu zeigen, daß $\binom{\mathrm{P}}{\mathrm{QR}}_1 = \binom{\mathrm{Q}}{\mathrm{RP}}_1 = \binom{\mathrm{R}}{\mathrm{PQ}}_1$.

$\binom{\mathrm{P}}{\mathrm{QR}}_1 = [\mathrm{PQR}]_{111} + [\mathrm{PQR}]_{211} + [\mathrm{PQR}]_{112} + [\mathrm{PQR}]_{121}$.

Da $[\mathrm{QRP}]_{ijk} = [\mathrm{PQR}]_{jki}$ und $[\mathrm{RPQ}]_{ijk} = [\mathrm{PQR}]_{kij}$ ist, folgt die Behauptung.

□

Für mehr als zwei Alternativen führen die verschiedenen Anordnungen der Mitglieder eines 3-Hirns im allgemeinen zu verschiedenen Verteilungen.

Satz 3.2.5 P, Q und R seien identisch verteilte Experten mit den Randwahrscheinlichkeiten $(p_1, \ldots, p_n)$. R sei unabhängig von P und Q und es gebe ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$ so, daß $[\mathrm{PQ}]_{ij} = p_i p_j (1-\varepsilon)$ für alle Paare (i,j) mit $i \neq j$ (dann ist $[\mathrm{PQ}]_{ii} = p_i(p_i(1-\varepsilon)+\varepsilon)$).

Falls $\varepsilon \geq 0$, ist $\binom{\mathrm{R}}{\mathrm{PQ}}$ Schur-besser als $\binom{\mathrm{P}}{\mathrm{QR}}$; ist $\varepsilon \leq 0$, so ist $\binom{\mathrm{P}}{\mathrm{QR}}$ Schur-besser als $\binom{\mathrm{R}}{\mathrm{PQ}}$.

Beweis: Setze S = $\binom{\mathrm{P}}{\mathrm{QR}}$, T = $\binom{\mathrm{R}}{\mathrm{PQ}}$ und $x_{ij} = [\mathrm{PQ}]_{ij}$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.
Nach Voraussetzung ist $x_{ij} = p_i p_j (1-\varepsilon) = x_{ji}$ falls $i \neq j$
und $x_{ii} = p_i(p_i(1-\varepsilon)+\varepsilon) = p_i^2 + p_i\varepsilon(1-p_i)$.

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} p_i p_j \left(\frac{x_{ij}}{x_{jj}+x_{ij}} + \frac{x_{ii}}{x_{ii}+x_{ji}} \right) = p_i^2 + p_i \left\{ \sum_{j=1, j\neq i}^{n} p_j \; \frac{2p_i(1-\varepsilon)+\varepsilon}{(p_i+p_j)(1-\varepsilon)+\varepsilon} \right\},$$

$$t_i = \sum_{j=1}^{n} (x_{ij}+x_{ji}) \; \frac{p_i}{p_i+p_j} = x_{ii} + p_i \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{2x_{ij}}{p_i+p_j} = p_i^2 + p_i \left\{ \sum_{j=1, j\neq i}^{n} p_j \frac{2p_i + \varepsilon(p_j-p_i)}{p_i+p_j} \right\} ,$$

$$t_i - s_i = p_i^2 - p_i^2 + p_i \left\{ \sum_{j=1, j\neq i}^{n} p_j \left(\frac{2p_i + \varepsilon\ (p_j-p_i)}{p_i+p_j} - \frac{2p_i(1-\varepsilon)+\varepsilon}{(p_i+p_j)(1-\varepsilon)+\varepsilon} \right) \right\}$$

$$= \varepsilon\ (1-\varepsilon) \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \underbrace{\frac{p_i p_j (1-(p_i+p_j))(p_i-p_j))}{(p_i+p_j)((p_i+p_j)(1-\varepsilon)+\varepsilon)}}_{=:\,\alpha_{ij}} \; .$$

Per Definition ist $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$.

Da P ≡ Q ≡ R Experten sind, gilt außerdem $\alpha_{ij} \geq 0$ für $i < j$.

Also ist für $1 \leq k \leq n-1$

$$\sum_{i=1}^{k} t_i - \sum_{i=1}^{k} s_i == \varepsilon\ (1-\varepsilon) \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \{ \sum_{j=1, j>i}^{k} (\alpha_{ij} - \alpha_{ji}) + \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_{ij} \}}_{\geq 0} .$$

Es gilt: $1-\varepsilon \geq 0$, denn sonst wären die $[\mathrm{PQ}]_{ij} < 0$. Also ist für jedes k dieser Ausdruck genau dann nichtnegativ, wenn ε nichtnegativ ist. □

Beispiel 3.2.6 Für beliebige positiv korrelierte gemeinsame Verteilungen von P und Q ist die Behauptung aus Satz 3.2.5 nicht richtig:

$\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q} \equiv \mathrm{R} = (0.39\,,\, 0.38\,,\, 0.23)$ und

$$[\mathrm{PQ}] = \begin{pmatrix} 0.31 & 0.01 & 0.07 \\ 0.01 & 0.30 & 0.07 \\ 0.07 & 0.07 & 0.09 \end{pmatrix}.$$

Die „unabhängige gemeinsame Verteilung" von P und Q wäre

$$(p_i \cdot q_j) = \begin{pmatrix} 0.152 & 0.148 & 0.090 \\ 0.148 & 0.144 & 0.088 \\ 0.090 & 0.088 & 0.052 \end{pmatrix},\quad \text{P und Q sind also positiv korreliert.}$$

Aber $\binom{\mathrm{P}}{\mathrm{QR}}$ ist Schur-besser als $\binom{\mathrm{R}}{\mathrm{PQ}}$:

$\binom{\mathrm{P}}{\mathrm{QR}} = (0.413\,,\, 0.402\,,\, 0.186)$ und $\binom{\mathrm{R}}{\mathrm{PQ}} = (0.408\,,\, 0.397\,,\, 0.195)$.

Übersicht über die Ergebnisse

Abschließend fassen wir die Ergebnisse dieses Kapitels zusammen.

Die folgende Tabelle enthält Voraussetzungen an die gemeinsamen Verteilungen der 3-Hirn-Teilnehmer, unter denen das 3-Hirn D_1 Schur-besser ist als D_2.

D_1	D_2	Abhängigkeits-beziehungen	zusätzliche Bedingungen an die Teilnehmer der 3-Hirne	siehe
$\binom{\mathrm{K}}{\mathrm{PQ}}$	$\binom{\mathrm{K}'}{\mathrm{PQ}}$	K und K$'$ sind unabhängig von P,Q	K ist mächtiger als K$'$	Bem. 3.2.1
$\binom{\mathrm{R}}{\mathrm{PQ}}$	$\binom{\mathrm{P}}{\mathrm{QR}}$	R ist unabhängig von P und Q	$\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q} \equiv \mathrm{R}$ sind Experten und $[\mathrm{PQ}]_{ij} = p_i p_j (1-\varepsilon)$ für alle i,j; $i \neq j$ und $\varepsilon \geq 0$	Satz 3.2.5

Wenn drei Berater P, Q und R folgendermaßen definiert sind, dann sind alle verschiedenen 3-Hirnanordnungen identisch verteilt:

1. P, Q und R sind Berater über zwei Alternativen (Bem. 3.2.4).

2. P und Q sind identisch verteilt und R ist ein Rater (Bem. 3.1.2 iii)).

4 Ausblick

In diesem Abschnitt geben wir einen Überblick über offen gebliebene und weitergehende Fragen und Vermutungen. Zum Schluß stellen wir ein anderes Entscheidungsmodell vor.

Offene Fragen und Vermutungen

Wir beginnen mit Vermutungen über Verallgemeinerungen bewiesener Aussagen.

1. Vermutung : (vgl. Satz 2.6.7)

Es gilt auch ohne die Voraussetzung $E_P(P) = E_Q(Q) = E_R(R)$:
Falls $E_{P\leftrightarrow Q\leftrightarrow S}(P) \geq E_{P\leftrightarrow Q\leftrightarrow S}(Q)$ und $E_{Q\leftrightarrow R\leftrightarrow S}(Q) \geq E_{Q\leftrightarrow R\leftrightarrow S}(R)$,
folgt $E_{P\leftrightarrow R\leftrightarrow S}(P) \geq E_{P\leftrightarrow R\leftrightarrow S}(R)$.

2. Vermutung : (vgl. Bemerkung 2.5.5)
Falls P' mächtiger ist als P, folgt aus $E_{PQ\leftrightarrow R\leftrightarrow S}(PQ) \geq E_{PQ\leftrightarrow R\leftrightarrow S}(R)$, daß $E_{P'Q\leftrightarrow R\leftrightarrow S}(P'Q) \geq E_{P'Q\leftrightarrow R\leftrightarrow S}(R)$.
Diese Vermutung folgt, falls die erste Vermutung richtig ist, denn:
Da P' mächtiger ist als P, folgt, daß auch $\langle P'Q \rangle$ mächtiger ist als $\langle PQ \rangle$.
Nach Bemerkung 2.4.3 ist also $E_{\langle P'Q\rangle\leftrightarrow\langle PQ\rangle\leftrightarrow S}(\langle P'Q\rangle) \geq E_{\langle P'Q\rangle\leftrightarrow\langle PQ\rangle\leftrightarrow S}(\langle PQ\rangle)$.
Da nach Voraussetzung gilt: $E_{\langle PQ\rangle\leftrightarrow R\leftrightarrow S}(\langle PQ\rangle) \geq E_{\langle PQ\rangle\leftrightarrow R\leftrightarrow S}(R)$, folgt die Behauptung aus der Vermutung in 1.
Hieraus wiederum folgt das Analogon zur Folgerung 2.5.7 für drei verschiedene Vorschläge: Sei P ein Experte und es gelte $E_{Q\leftrightarrow R\leftrightarrow S}(Q) \geq E_{Q\leftrightarrow R\leftrightarrow S}(R)$,
dann gilt auch $E_{PQ\leftrightarrow R\leftrightarrow S}(PQ) \geq E_{PQ\leftrightarrow R\leftrightarrow S}(R)$.

3. Vermutung : Wenn P mächtiger ist als P', folgt, daß $\binom{K}{PQ}$ Schur-besser ist als $\binom{K}{P'Q}$, sofern P und P' unabhängig sind von K und Q (dies ist ein Analogon zu der Bemerkung 3.2.1 für Mitarbeiter).

4. Offene Frage: Wann ist $\binom{K}{PQ}$ Schur-besser als K ?
Vermutung : Die Bedingung „P ist mächtiger als K, und Q ist Experte“ ist ebenfalls hinreichend.
Dies folgt aus der dritten Vermutung zusammen mit der Transitivität von „Schur-besser“ und $\binom{K}{KR} \equiv K$ für einen Rater R.

Die folgende Vermutung zu der Fragestellung „Welches ist die beste Anordnung von drei Beratern zu einem Dreihirn?“ bestätigt sich nicht: Ist P mächtiger als Q und als R , dann folgt, daß $\binom{P}{QR}$ Schur-besser ist als $\binom{Q}{PR}$ und als $\binom{R}{PQ}$.
Gegenbeispiel: Sei $P = (0.4\,,\,0.3\,,\,0.3)$, Q und R Rater.
Dann sind $\binom{Q}{PR} \equiv \binom{R}{PQ} = (\frac{22}{60}\,,\,\frac{19}{60}\,,\,\frac{19}{60})$ sogar Schur-besser als $\binom{P}{RQ} = (\frac{23}{63}\,,\,\frac{20}{63}\,,\,\frac{20}{63})$.

Neue Fragestellungen

Vermutung : Betrachte drei Berater P, Q und R und die Dreihirne $\substack{P\\QR}$, $\substack{Q\\PR}$ und $\substack{R\\PQ}$. Eines der Dreihirne ist erfolgversprechender als die optimale Strategie, falls P, Q und R voneinander unabhängige Experten und alle drei „ungefähr gleich gut“ sind.
Beispiel: Sei $P \equiv Q \equiv R = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$. Dann ist $\binom{P}{QR} = (0.57\,,\,0.32\,,\,0.11)$.
Eine Strategie für drei identisch verteilte Experten ist optimal, wenn sie bei zwei verschiedenen Vorschlägen immer der Mehrheit folgt. Machen die drei Berater verschiedene Vorschläge, dann sind ohnehin alle Erwartungswertanteile gleich.
Der Erwartungswert einer solchen optimalen Strategie S_{opt} ist deshalb gemäß der Folgerung 2.2.5

$$\begin{aligned} E\,(\text{Strategie } S_{opt}) &= E\,(\text{Folge immer } P) + \{-E_{P\leftrightarrow QR}(P) + E_{P\leftrightarrow QR}(QR)\} \\ &= E_P(P) + \{-E_{P\leftrightarrow QR}(P) + E_{P\leftrightarrow QR}(QR)\}. \end{aligned}$$

Für $w_1 = 3, w_2 = 2$ und $w_3 = 1$ ist $\mathrm{E}_{\binom{\mathrm{P}}{\mathrm{QR}}}(\binom{\mathrm{P}}{\mathrm{QR}}) = 2.47 > 2.43 = \mathrm{E}$ (Strategie $\mathrm{S_{opt}}$).

6. Offene Frage: Wie gut sind bei mehr als drei Beratern Vielhirne im Vergleich zur optimalen Strategie bei gleichberechtigtem Einsatz dieser Berater?
Und wie erfolgversprechend sind Mischformen?
Vergleiche z.B. bei fünf Beratern P, Q, R, S und T die verschiedenen Strategien bei einem Dreihirn $\binom{\mathrm{P}}{\mathrm{QR}}$ und zwei Beratern S und T mit den verschiedenen „Fünfhirnen“ oder mit der optimalen Strategie bei gleichberechtigten Beratern P, Q, R, S und T.

7. Ein anderer Ansatz zu dem Problem, ohne präzise Kenntnis der Verteilungen der Berater zu Aussagen zu gelangen, ist der folgende: Für einen Berater ist pro Eintrag seiner Verteilung ein Intervall gegeben, in dem die entsprechende Wahrscheinlichkeit liegt. Sei z.B. ein Berater P so, daß $p_1 \in [0.5, 0.7]$, $p_2 \in [0.2, 0.4]$, $p_3 \in [0, 0.2]$. Ein Berater, der dies erfüllt, ist (0.7 , 0.3 , 0). Hier lautet eine „Minimax“-Fragestellung: Seien mehrere Berater (d.h. n-Tupel von Intervallen) gegeben; welches ist die beste Strategie, einem der Vorschläge zu folgen, wenn anschließend die Verteilungen der Berater exakt so ungünstig wie möglich festgelegt werden? Für die Bestimmung der optimalen Strategie sind in diesem Modell auch nichtdeterministische Strategien relevant.

Literatur

[Alt 85] I. Althöfer: Das Dreihirn – Entscheidungsteilung im Schach, CSS, Dezember 1985, S. 20–22.

[Alt 88] I. Althöfer: Das Dreihirn-Konzept, MODUL, Dezember 1988, S. 42–46.

[Alt 93] I. Althöfer: Das Dreihirn – eine Zwischenbilanz, CSS, April 1993, S. 49–52.

[Bau 94] K. Bauermeister: Bericht über das Mensch-Computer-Schachturnier in Clodra 1994. CSS, February 1995, S. 29–32.

[CT 78] Y. S. Chow, H. Teicher: Probability Theory, Springer, New York, 1978.

[Mal 88] T.Mally: Vielhirn II, MODUL, März 1988, S. 23–25.

[MO 79] A. W. Marshall, I. Olkin: Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications, Mathematics in Science and Engineering, Volume 143, Academic Press, New York, 1979.

[Neh 87] H.Nehonsky: Schachcomputer im Fernschach – Ein Dreihirn-Experiment, MODUL, März 1987, S. 15–17.

[OS 94] S. Osterkamp, B. Schanz: Strategien für zufällig entscheidende Beratersysteme und die Kompetenz von Dreihirnen, Diplomarbeit, Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, April 1994.

[Wei 88] H.Weigel: Best of four, MODUL, Januar 1988, S. 21–23.

Weitere Literatur zum Thema 3-Hirn

I. Althöfer:	A Prize for Symbiosis, ICCA Journal 10, 1987, S. 55.
I. Althöfer:	Das Dreihirn – Eine Symbiose Mensch/Maschine, Schachmagazin 64, Januar 1988, S. 54–55.
I. Althöfer:	Das Dreihirn in der Turnier-Arena, CSS, April 1988, S. 19–22.
I. Althöfer:	Bericht über den Wettkampf „Dreihirn – IM Dr. Reefschläger", MODUL, März 1990, S. 42–43.
I. Althöfer:	Je mehr, desto besser? Mehrheitssysteme im Computerschach und der Yazgaz-Test, MODUL, Juni 1990, S. 54–61.
I. Althöfer:	Selective trees and majority systems: two experiments with commercial chess computers, Advances in Computer Chess 6 (Ed. D. F. Beal), Ellis Horwood, Chichester, 1991, S. 37–59.
I. Althöfer:	Bericht über den zweiten Wettkampf „Dreihirn – IM Dr. Reefschläger", MODUL, März 1992, S. 3–4.
I. Althöfer:	Een experiment met Dreihirn, Computerschaak 13, Oktober 1993, S. 186–189.
D. Mc Cracken:	Man + Computer: A New Symbiosis, Communications of the ACM, Vol.22 No. 11, November 1979, S. 587–588.

Benutzte Abkürzungen und Eigennamen:

Computerschaak	Niederländisches Computerschach-Magazin
CSS	deutsches Magazin für „ComputerSchach & Spiele"
ICCA	International Computer Chess Association
MODUL	Österreichisches Computerschach-Magazin