Ultrafiltres
et théorie de Ramsey

Anne SIEGEL

Ecole Normale Supérieure de Lyon
46 allée d'Italie
69364 Lyon cedex 07, FRANCE

Effectué sous la direction de M. Walter DEUBER

Contents

On note N l'ensemble des entiers naturels.

1 Introduction

La partie de la théorie de Ramsey considérée dans ce rapport englobe les résultats portant sur les partitions finies d'un ensemble, généralement N ou N^k. Ainsi, si on considère une partition de N en r classes, d'une part il existe x et y tels que x, y et $x+y$ appartiennent à la même classe (SCHUR, 1917); d'autre part une des classes contient des suites arithmétiques de longueur arbitrairement grande (VAN DER WAERDEN, 1927). Par ailleurs, selon un résultat de RAMSEY(1930), pour toute partition de $[N^k]$ en un nombre fini de classe, il existe un ensemble infini $A \subset N$ tel que $[A^k]$ soit entièrement contenu dans une seule classe.

Les preuves classiques de ces théorèmes sont de nature combinatoire. Or, dans les années 1970, GALVIN et HINDMAN ont montré que la notion d'ultrafiltre est liée aux théorèmes de partition. Ainsi, nous verrons comment la notion d'ultrafiltre permet de prouver de manière algébrique les théorèmes énoncés ci-dessus, ainsi que leurs extensions.

La partie 2 est consacrée à une présentation succinte des ultrafiltres. La partie 3 expose certains lemmes algébriques intervenant dans les preuves des résultats classiques de la théorie de Ramsey, ces preuves étant exposées dans la partie 4. La partie 5 traite de quelques généralisations du théorème de Hindman en dimension supérieure à 1. Enfin, la partie 6 expose des résultats relatifs aux solutions de systèmes d'équations linéaires à plusieurs variables. Les démonstrations des théorèmes énoncés dans cette dernière partie font l'objet d'un mémoire, placé en annexe.

2 Ultrafiltres

2.1 Géneralités

2.1.1 Définitions

Soit X un ensemble. On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

Définition 1 *Soit X un ensemble. Une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ vérifie la propriété d'intersection finie si et seulement si l'intersection d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{A}$ est toujours non vide.*

Définition 2 *Soit X un ensemble. Une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ est appelée ultrafiltre sur X si et seulement si $\mathcal{A}$ est maximale parmi les sous ensembles de $\mathcal{P}(X)$ qui vérifient la propriété d'intersection finie.*

De cette définition se déduisent un certain nombre de propriétés :

Théorème 1 *Soit X un ensemble et $\mathcal{A}$ un ultrafiltre sur X. Alors :*

1. *L'ensemble vide n'appartient pas à $\mathcal{A}$.*

2. X appartient à $\mathcal{A}$.

3. $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie.

4. $\mathcal{A}$ est filtrant sur X : si $B \in \mathcal{A}$ et $B \subset C$, alors $C \in \mathcal{A}$.

5. Si $\bigcup_{i=1}^{r} D_i$ appartient à $\mathcal{A}$, alors au moins un des D_i appartient à $\mathcal{A}$.

Preuve. Si l'ensemble vide appartenait à $\mathcal{A}$, il existerait une partie finie de $\mathcal{A}$ dont l'intersection serait vide, ce qui est impossible. D'où (1).

(2), (3) et (4) se déduisent de la maximalité de $\mathcal{A}$. En effet, si $\mathcal{A}$ vérifie la propriété d'intersection finie, si $A_1, \cdots, A_r \in \mathcal{A}$ et $B \subset C$, $B \in \mathcal{A}$, alors $\mathcal{A} \cup \{X\}$, $\mathcal{A} \cup \{\bigcap_{i=1}^{r} A_i\}$, et $\mathcal{A} \cup \{C\}$ vont aussi vérifier cette propriété. Par maximalité, on obtient (2), (3) et (4).

Enfin, si $D_i \notin \mathcal{A}$ pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, alors, par maximalité de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \cup \{D_i\}$ ne vérifie pas la propriété d'intersection finie. Puisque $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie, il existe donc $A_i \in \mathcal{A}$ tel que $A_i \cap D_i = \emptyset$ pour tout $i \leq r$. Alors : $\bigcup_{i=1}^{r} D_i \cap \bigcap_{i=1}^{r} A_i = \emptyset$. Puisque $\bigcap_{i=1}^{r} A_i \in \mathcal{A}$, on obtient ainsi que $\bigcup_{i=1}^{r} D_i$ n'appartient pas à $\mathcal{A}$. Ce qui montre (5). $\diamondsuit$

On obtient alors une caractérisation des ultrafiltres sur un ensemble :

Théorème 2 *Soit X un ensemble. Une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant la propriété d'intersection finie est un ultrafiltre si et seulement si pour tout $A \subset X$, A ou $X \backslash A$ appartient à $\mathcal{A}$.*

Preuve Si $\mathcal{A}$ est un ultrafiltre sur X, selon le théorème 1, $X \in \mathcal{A}$. Or, si $A \subset X$, on a : $X = A \cup (X \backslash A)$. Selon le même théorème, un de ces deux ensembles appartient donc à $\mathcal{A}$.

Réciproquement, supposons que pour tout $A \subset X$, A ou $X \backslash A$ appartient à $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ vérifiant la propriété d'intersection finie. Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{B}$ vérifiant aussi la propriété d'intersection finie, alors pour tout $B \in \mathcal{B}$, B ou $X \backslash B$ appartient à $\mathcal{A}$. Si $X \backslash B \in \mathcal{A}$, alors $X \backslash B \in \mathcal{B}$, et $\mathcal{B}$ ne vérifie plus la propriété d'intersection finie. D'où $B \in \mathcal{A}$, et donc $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Ainsi, $\mathcal{A}$ est un ultrafiltre. $\diamondsuit$

2.1.2 Ultrafiltres principaux

Un exemple trivial d'ultrafiltre sur un ensemble X est $\{A \in X \ : \ a \in A\}$, pour a fixé dans X. Le problème est de savoir s'il existe d'autres ultrafiltres.

Définition 3 *Soit X un ensemble. Un ultrafiltre $\mathcal{A}$ sur X est dit principal si et seulement si il existe $a \in X$ tel que $\mathcal{A} = \{A \in X \ : \ a \in A\}$.*

Remarque. Les ultrafiltres principaux sont les ultrafiltres qui contiennent une partie finie de X. En effet, si $F = \{a_1, \cdots, a_r\} \in \mathcal{A}$, alors selon le théorème 1, un des $\{a_i\}$ appartient à $\mathcal{A}$, qui est par ailleurs filtrant. $\mathcal{A}$ est donc l'ultrafiltre principal engendré par a_i.

Lemme 1 *Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant la propriété d'intersection finie. Il existe un ultrafiltre $\mathcal{A}_1$ sur X qui contient $\mathcal{A}$.*

Preuve. Grâce au lemme de Zorn, on peut considérer un élément $\mathcal{A}_1$ maximal parmi les parties de $\mathcal{P}(X)$ qui contiennent $\mathcal{A}$ et qui vérifient la propriété d'intersection finie. $\mathcal{A}_1$ est alors maximal parmi les parties vérifiant la propriété d'intersection finie. $\mathcal{A}_1$ est donc un ultrafiltre contenant $\mathcal{A}$. $\diamondsuit$

Théorème 3 *Soit $A \subset X$, A infini. Il existe un ultrafiltre non principal $\mathcal{A}$ tel que A appartient à $\mathcal{A}$.*

Preuve. Soit $\mathcal{A}_1$ le filtre Frechet associé à A : $\mathcal{A}_1 = \{B \subset X \ : \ A \backslash B \text{ fini}\}$. A étant infini, $\mathcal{A}_1$ vérifie la propriété d'intersection finie. Selon le lemme 3, il existe $\mathcal{A}$ qui contient $\mathcal{A}_1$, ce qui implique que A appartient à $\mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ était principal, il existerait a tel que tous les éléments de $\mathcal{A}_1$ contiennent a. Mais, $A\backslash\{a\}$ appartient à $\mathcal{A}_1$ et ne contient pas a. $\mathcal{A}$ n'est donc pas principal. $\diamondsuit$

2.1.3 Lien avec la théorie de Ramsey

La plupart des théorèmes de partition ont pour objet un ensemble X et une classe $\mathcal{C}$ de sous-ensembles de X, et établissent que pour toute partition de X en un nombre fini de classes, une de ces classes contient un élément de $\mathcal{C}$. Hindman montra dans [7] le lien unissant de tels résultats et la notion d'ultrafiltre, lien que Galvin avait auparavant établit à propos du théoreème de Hindman sur les sommes finies (théorème 12).

Théorème 4 (Hindman) *Soit X un ensemble et $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour toute partition finie de X : $X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i$, il existe $A \in \mathcal{C}$ et $i_0 \leq r$ tels que X_{i_0} contient A.*

2. *Il existe un ultrafiltre p sur X tel que tout élément de p contient un élément de $\mathcal{C}$.*

Preuve. Si il existe un ultrafiltre p sur X dont tous les éléments contiennent un élément de $\mathcal{C}$, alors, selon le théorème 1, un des X_i appartient à p et contient donc un élément de $\mathcal{C}$. Ainsi, (2) implique (1).

Réciproquement, supposons que (1) est vrai. On peut supposer que $\emptyset \notin \mathcal{C}$ (sinon, le théorème est évident). Soit $\mathcal{A} = \{A \in X \ : \ A \cap C \neq \emptyset\, ,\ \forall\, C \in \mathcal{C}\}$. Alors $\mathcal{A}$ vérifie la propriété d'intersection finie : en effet, si $\bigcap_{i \in F} A_i = \emptyset$, alors $X = \bigcup_{i \in F} X \backslash A_i$. Selon (1), il existe i_0 et $C \in \mathcal{C}$ tels que $C \subset X \backslash A_{i_0}$. C'est à dire que $A_{i_0} \notin \mathcal{A}$, ce qui est impossible.
Considérons alors un ultrafiltre p sur X contenant $\mathcal{A}$, et $B \in p$. Si B ne contenait aucun élément de C, on aurait : $X \backslash B \in \mathcal{A} \subset p$, c'est à dire que $B \notin p$. p vérifie donc (2). $\diamondsuit$

2.2 Compactification de Stone-Cech d'un semigroupe

Soit $(S,+)$ un semigroupe. Bien que l'opération sur S soit notée $+$, on ne suppose en aucun cas que cette opération est commutative.

Définition 4 *On note βS l'ensemble des ultrafiltres sur S.*

On munit βS d' une topologie qui va le rendre compact (partie 2.3), et d'une structure de semigroupe étendant la structure de semigroupe de S (2.4).

2.3 Topologie sur βS

Définition 5 *Soit $A \subset S$. On pose $\overline{A} = \{p \in \beta S \; : \; A \in p\}$.*

En fait, lorsque la topologie sur βS sera définie, et grâce à une injection de S dans βS, $\overline{A}$ représentera l'adhérence de A dans βS.

Lemme 2 *Pour tout $A,\ B \subset S$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.*

Preuve. Si $A \cap B$ appartient à p, p étant filtrant, alors A et B appartiennent à p. De plus, du fait de la propriété d'intersection finie, si $A, B \in p$, alors $A \cap B \in p$, ce qui prouve la première égalité. Enfin, si $A \cup B$ appartient à p, selon le théorème 1, A ou B appartient à p. Ceci, ajouté au caractère filtrant de p, prouve la deuxième égalité. $\diamondsuit$

Théorème 5 $\mathcal{A} = \left\{\overline{A},\ A \subset S\right\}$ *est la base d'une topologie sur βS, dont les ouverts sont les fermés.*

Preuve. D'après le lemme 2, toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{A}$. Il en est de même pour toute union d'éléments de $\mathcal{A}$. De plus, $\emptyset = \overline{\emptyset}$ et $\beta S = \overline{X}$ sont eux aussi des éléments de $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ est donc bien la base d'une topologie sur βS.

Par ailleurs, si $p \in \beta S$ et $A \in p$, alors $X \backslash A \notin p$, puisque p vérifie la propriété d'intersection finie. Ceci ajouté au théorème 2 montre que $\beta S \backslash \overline{A} = \overline{S \backslash A}$. Les ouverts de la topologie en sont donc aussi les fermés. $\diamondsuit$

Théorème 6 *L'ensemble βS muni de la topologie ainsi définie est un espace compact (donc séparé). De plus, S s'injecte dans βS selon une application ϕ dont l'image est dense dans βS.*

Preuve.

- Soient p et q deux éléments distincts de βS. Par maximalité, p et q ne sont pas comparables pour l'inclusion. Soit $A \in p \backslash q$. Alors, $p \in \overline{A}$ et $q \notin \overline{A}$. De plus, $S \backslash A$ appartient à q et pas à p (du fait du théorème 2 et de la propriété d'intersection finie). Ainsi : $q \in \overline{S \backslash A}$ et $p \notin \overline{S \backslash A}$.
  Enfin, $\overline{A} \cap \overline{S \backslash A} = \emptyset$ (théorème 2). Ce qui prouve que βS est séparé.

- Soit $\beta S = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ un recouvrement ouvert de βS. Dans l'hypothèse où il n'existerait pas de recouvrement fini de βS par les $\overline{A_i}$, $\mathcal{A} = \{S \backslash A_i,\ i \in I\}$ vérifierait la propriété d'intersection finie (sinon, $\emptyset = \cap_{i \in F} S \backslash A_i$, c'est à dire que $S = \cup_{i \in F} A_i$ et $\overline{S} = \cup_{i \in F} \overline{A_i}$ admet un recouvrement fini.). Selon le lemme 1, il existerait donc $p \in \beta S$ qui contient $\mathcal{A}$. Ainsi, si $i_0 \in I$ est tel que $p \in \overline{A_{i_0}}$, A_{i_0} appartiendrait alors à p et p ne pourrait pas contenir $S \backslash A_{i_0}$. Une contradiction. βS est donc compact.

- On considère l'application $\phi : S \to \beta S$ qui à $x \in S$ associe l'idéal principal $\{A \subset S,\ x \in A\} = \overline{\{x\}}$. Cette application est une injection puisque, pour tout $x \neq y$, $\{x\} \in \phi(x) \backslash \phi(y)$.
  De plus, si $\overline{A}$, $A \subset S$, est un ouvert non vide de βS, soit $x \in A$. On a : $A \in \overline{A} \cap \overline{\{x\}}$. L'image de S par ϕ rencontre donc tout ouvert de βS. Ce qui revient à dire que $\phi(S)$ est dense dans βS. $\diamondsuit$

Ainsi, βS est une compactification de S.

2.4 Structure de semigroupe sur βS

Définition 6 *Soit $A \subset S$. Soit $x \in S$. On définit la composition par $-x$:*

$$-x + A = \{y \in S,\ x + y \in A\}.$$

De plus, on définit l'opération $+$ sur βS: pour tout p, $q \in \beta S$,

$$p + q = \{A \subset S\ :\ \{x \in S\ :\ -x + A \in q\} \in p\}$$

Définition 7 *Soit $(S, +)$ un semigroupe muni d'une topologie. On dit que $(S, +)$ est un semigroupe topologique à droite lorsque pour tout $s \in S$, la fonction $\rho_s : S \to S$ définie par $\rho_s(x) = x + s$ est continue.*

Définition 8 *Soit $(S, +)$ un semigroupe topologique à droite. On appelle centre topologique de S l'ensemble des éléments s de S tels que la fonction $\lambda_s : S \to S$ définie par $\lambda_s(x) = s + x$ est continue.*

Théorème 7 *Muni de cette opération, βS est un semigroupe topologique à droite dont le centre topologique contient S.*

Preuve

- Soient p, $q \in \beta S$. Alors $p + q$ appartient lui aussi à βS. En effet, $p + q$ vérifie la propriété d'intersection finie (puisque q vérifie cette propriété et que $\{x \in S,\ -x + \cap_{i \in F} A_i \in p\} = \cap_{i \in F} \{x \in S,\ -x + A_i \in p\}$), et pour tout $A \subset S$, A ou $S \backslash A$ appartient à $p + q$ (puisque c'est le cas pour p et q).

- Un calcul montre que $+$ est associative. $(\beta S, +)$ est donc un semigroupe.

- $+$ étend l'opération $+$ sur S puisque $A \in \phi(x) + \phi(y)$ si et seulement si $x + y \in A$, c'est à dire que $\phi(x) + \phi(y) = \phi(x + y)$.

- Soient p et q deux ultrafiltres fixés sur S. Soit U un voisinage de $p+q$. Il existe $A \in p+q$ tel que $\overline{A} \subset U$. Alors : $B = \{x \in S,\ -x+A \in q\} \ \in\ p$. Soit $r \in \overline{B}$. Alors $B \in r$, ce qui montre que A appartient à $r+q$. De ce fait, $\overline{B}$ est un voisinage de p inclus dans ${\rho_q}^{-1}\left(\overline{A}\right)$. Ainsi, la préimage par ρ_q de tout voisinage de $p+q$ est un voisinage de p, ceci pour tout p. ρ_q est donc continue et βS est un semigroupe topologique à droite.
- Enfin, si $x \in S$ et $q \in \beta S$, on a : ${\lambda_{\phi(x)}}^{-1}(\overline{A}) = \{r \in \beta S,\ -x+A \in r\} = \overline{-x+A}$, qui est un voisinage de q dès que $q \in \overline{A}$. Le centre topologique de βS contient donc S. $\diamondsuit$

Remarque. En fait, la topologie définie sur βS est telle que toute application f partant de S et à valeur dans un espace compact se prolonge de manière continue sur βS.

Ceci permet de montrer qu'il existe une opération associative sur βS, telle que ρ_p est continue pour tout $p \in \beta S$, et telle que λ_x est continue pour tout $x \in S$. On obtient ainsi l'existence sur βS d'une structure de semigroupe topologique à droite dont le centre topologique contient S. De plus, cette structure est unique. L'opération qui vient d'être définie ci-dessus est donc la seule opération qui vérifie ces propriétés.

Par contre, si on omet la dernière propriété (à propos du centre topologique), il existe d'autres opérations sur βS qui conviennent.

Une présentation plus complète de ces résultats se trouve dans [7].

3 Propriétés algébriques des semigroupes compacts topologiques à droite

Tout semigroupe compact topologique à droite possède un idempotent, idempotent sur lequel on définit une opération *shift*. Cette opération va entrer en jeu dans la démonstration des théorèmes portant sur les sommes finies d'éléments distincts.

Par ailleurs, si S est un semigroupe compact topologique à droite, si E est un sous-semigroupe de $S^r = S \times \cdots \times S$ rencontrant la diagonale de S^r, et si I est un idéal de E, alors I rencontre lui aussi la diagonale de S^r (3.2). Ce résultat est en fait le lemme qui permet de montrer les théorèmes relatifs aux progressions arithmétiques.

3.1 Idempotents

3.1.1 Existence

Lemme 3 *Soit $(S,+)$ un semigroupe compact topologique à droite. Alors S contient un idempotent, c'est à dire qu'il existe $x \in S$ tel que $x+x=x$.*

Preuve. Soit $\mathcal{A} = \{B \subset S,\ B \text{ fermé non vide},\ B+B \subset B\}$. Puisque toute suite décroissante de compacts non vide est un compact non vide, $\mathcal{A}$ est inductif. Soit B_0 un élement minimal de $\mathcal{A}$ et $x \in B_0$.

ρ_x étant continue, B_0+x est un compact, donc fermé, de S. De plus, les faits que $x \in B_0$ et $B_0 + B_0 \subset B_0$ impliquent que $B_0 + x$ est stable pour l'addition et est contenu dans B_0. Par minimalité, on a donc : $B_0 = B_0 + x$. Ce qui montre l'existence de $y \in B_0$ tel que $y + x = x$.

Considérons maintenant $B_1 = \{y \in B_0\,,\ y + x = x\}$. Alors B_1 est non vide selon ce qui vient d'être vu. De plus, B_1 est fermé en tant qu'intersection de B_0 et de $(\rho_x)^{-1}(\{x\})$. Enfin, on vérifie que $B_1 + B_1 \subset B_1$. Ce qui montre que B_1 appartient à $\mathcal{A}$ et est inclus, du fait de sa définition, dans B_0. Ainsi, $B_1 = B_0$, et $x \in B_1$. C'est à dire que $x + x = x$. $\diamondsuit$

3.1.2 Une opération sur ces idempotents

Lemme 4 *Soit $(S,+)$ un semigroupe compact topologique à droite. Soit p un idempotent de βS. Soit B un élément de p.*
Définissons $B^* = \{x \in B\ :\ -x + B \in p\}$.
Alors $B^* \in p$. De plus, pour tout $b \in B^*$, $-b + B^* \in p$.

Preuve. p étant un idempotent, on a : $\{x \in S, -x + A \in p\} \in p$ pour tout $A \in p$. De ce fait, B^* appartient à p, puisque intersection de deux éléments de p.
Par ailleurs, si $b \in B^*$, on vérifie que $-b + B^* = (-b + B)^*$. Or $-b + B \in p$ par propriété de B^*. Selon ce qui vient d'être vu, on a donc : $-b + B^* \in p$. $\diamondsuit$

3.2 Idéaux à gauche minimaux

Définition 9 *Soit (S,+) un semigroupe.*

Une partie I de S est un idéal à gauche de S si et seulement si $S + I \subset I$, On définit de même les idéaux à droite. On appelle idéal bilatère tout I qui est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite.

Un idéal à gauche I est dit minimal si et seulement si I ne contient strictement aucun idéal à gauche non vide.

On trouvera en annexe (partie B.1), les démonstrations des lemmes suivants :

Lemme 5 *Soit $(S,+)$ un semigroupe compact topologique à droite. Alors tout idéal à gauche de S contient un idéal à gauche minimal. De plus, les idéaux à gauche minimaux de S sont fermés.*

Définition 10 *Soit $(S,+)$ un semigroupe compact topologique à droite. On pose : $M(S) = \bigcup\{L\ ,\ L$ idéal à gauche minimal dans $S\}$.*

Lemme 6 *Soit $(S,+)$ un semigroupe compact topologique à droite. Soit I un idéal bilatère de S. Alors, $M(S) \neq \emptyset$ et $M(S) \subset I$.*

On munit S^r de la topologie produit induite par celle de S, et de l'addition coordonnée par coordonnée. Si S est un semigroupe compact topologique à droite, alors S^r est lui-même un semigroupe compact topologique à droite.

Lemme 7 *Soit $(S,+)$ un semigroupe compact topologique à droite. Soit $r \in N$ et E un sous-semigroupe compact de S^r. Soit $x \in M(S)$ tel que le r-uplet $(x,\cdots,x)$ appartient à E. Alors pour tout idéal bilatère I de E, $(x,\cdots,x)$ appartient à I.*

4 Les résultats classiques de la théorie de Ramsey

Dans cette partie vont être présentées les preuves algébriques des théorèmes de Ramsey, Van der Waerden, Hales-Jewett et Hindman. Les preuves originales de ces théorèmes, de nature combinatoire, sont exposées dans [6] ou [11].

4.1 Partitions d'ensembles

Le théorème le plus *simple* de la théorie de Ramsey est le théorème de Ramsey, qui généralise en dimension finie le fait que si on divise un ensemble infini en un nombre fini de classes, alors une de ces classes est infinie.

La preuve de ce théorème au moyen des ultrafiltres reproduit en fait la démonstration combinatoire usuelle, si ce n'est que la notion d'ensemble infini est remplacée par la notion d'ultrafiltre.

Notation. Si X est un ensemble, on note $[X^n]$ l'ensemble des parties à n élements de X.

Théorème 8 (Ramsey) *Soit X un ensemble infini et $n \in N$. Alors, pour toute partition de $[X^n]$ en un nombre fini de classes, il existe $A \subset X$ infini tel que $[A^n]$ est entièrement contenu dans une seule classe.*

Preuve. On considère un ultrafiltre sur X non principal : p (théorème 3). Soit $[X^n] = \bigcup_{i=1}^r C_i$ une partition finie de $[X^n]$.

Soit $(x_1,\cdots,x_{n-1}) \in [X^{n-1}]$, $1 \le k \le n$ et $1 \le i \le r$. On définit par récurrence les ensembles :

$$A_i^1(x_1,\cdots,x_{n-1}) = \{y \in X \ : \ (x_1,\cdots,x_{n-1},y) \in C_i\},$$
$$A_i^k(x_1,\cdots,x_{n-k}) = \Big\{y \in X \ : \ A_i^{k-1}(x_1,\cdots,x_{n-k},y) \in p\Big\},$$

(remarque : A_i^n ne dépend pas des x_i).

On montre alors par récurrence sur k que, pour tout $k \in \{1,\cdots,n\}$ et tout $(x_1,\cdots,x_{n-k}) \in [X^{n-k}]$, on a : $\bigcup_{i=1}^r A_i^k(x_1,\cdots,x_{n-k}) = X\backslash\{x_1,\cdots,x_{n-k}\}$.

- si $k=1$, pour tout $(x_1,\cdots,x_{n-1},y) \in [X^n]$, les C_i formant une partition de $[X^n]$, il existe i_0 tel que $(x_1,\cdots,x_{n-1},y) \in C_{i_0}$.
  Ainsi, $y \in A_{i_0}^1(x_1,\cdots,x_{n-1})$, ce qui prouve que :
  $\bigcup_{i=1}^r A_i^1(x_1,\cdots,x_{n-1}) = X\backslash\{x_1,\cdots,x_{n-1}\}$.
- Supposons l'hypothèse vérifiée à l'ordre $k-1$, $k \le n$.
  Soit $(x_1,\cdots,x_{n-k-1},y) \in [X^{n-k}]$. Alors, par hypothèse :
  $\bigcup_{i=1}^r A_i^k(x_1,\cdots,x_{n-k-1},y) = X\backslash\{x_1,\cdots,x_{n-k-1},y\}$.
  Puisque p n'est pas principal, $X\backslash\{x_1,\cdots,x_{n-k-1},y\} \in p$.
  Cet ensemble étant recouvert par un nombre fini de sous-ensembles, selon

le théorème 1, il existe i_0 tel que $A_{i_0}^k(x_1, \cdots, x_{n-k-1}, y) \in p$. Ce qui implique que $y \in A_{i_0}^{k+1}(x_1, \cdots, x_{n-k-1})$.
Ainsi : $\bigcup_{i=1}^r A_i^{k+1}(x_1, \cdots, x_{n-k-1}) = X \backslash \{x_1, \cdots, x_{n-k-1}\}$. L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée à l'ordre $k+1$.

En particulier, pour $k = n$, on obtient : $\bigcup_{i=1}^r A_i^n = X$. Il existe donc i_0 tel que $A_{i_0}^n$ appartient à p. Soit $x_1 \in A_{i_0}^n$. On construit une suite $(x_n)_{n \in N}$ telle que pour tout $s \in N$,

$$x_{s+1} \in \bigcap \Big\{ A_{i_0}^k(x_{j_1}, \cdots, x_{j_{n-k}}) \ : \ k \in \{1, \cdots, n\};\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_{n-k} \leq s \Big\}.$$

En effet, si les $(x_i)_{i \leq t-1}$ vérifient la formule ci-dessus, si $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ et $1 \leq j_1 < \cdots < j_{n-k} \leq t$, on sait par hypothèse que $x_{j_{n-k}} \in A_{i_0}^{k+1}(x_{j_1}, \cdots, x_{j_{n-k-1}})$, et donc que $A_{i_0}^k(x_{j_1}, \cdots, x_{j_{n-k}}) \in p$.
De ce fait, $\bigcap \Big\{ A_{i_0}^k(x_{j_1}, \cdots, x_{j_{n-k}}) \ : \ k \in \{1, \cdots, n\};\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_{n-k} \leq t \Big\}$ est une intersection finie d'éléments de p. Cet ensemble appartient donc à p, et est infini. Soit x_{t+1} un de ses éléments, distinct des $(x_s)_{s \leq t}$. Alors x_{t+1} vérifie l'hypothèse de récurrence.

Cette suite ayant été construite, considérons $j_1 < \cdots < j_n$. Par construction, $x_{j_n} \in A_{i_0}^1(x_{j_1}, \cdots, x_{j_{n-1}})$. C'est à dire que le n- uplet $(x_{j_1}, \cdots, x_{j_n})$ est un élément de C_{i_0}.
Ceci prouve que $[\{x_i\ ,\ i \in N\}^n]$ est inclus dans la classe C_{i_0}, ce qui est le résultat souhaité. $\diamondsuit$

4.2 Progressions arithmétiques

En 1927, Van der Waerden énonça son fameux théorème, établissant que si on partitionne les entiers en un nombre fini de classes, alors une de ces classes contient des suites arithmétiques de longueur arbitrairement grande.

En fait, ce théorème porte plus sur les suites finies engendrées par un ensemble, que sur les entiers. C'est ce que montrèrent Hales et Jewett en 1963 : leur généralisation du théorème de Van der Waerden exprime en fait sa véritable nature.

De ces théorèmes ont été déduits un certain nombre de résultats algébriques. Mais les preuves des théorèmes de Van der Waerden et Hales-Jewett étaient combinatoires. La question fut donc de savoir s'il existait une preuve algébrique de ces théorèmes. En 1989, dans [1] et [5], furent exposées les démonstrations répondant par l'affirmative à cette question. Ce sont ces preuves qui vont être présentées ici. Elles font appel au lemme 7 et sont en fait valables sur tout semigroupe commutatif.

4.2.1 Le théorème de Van der Waerden

Remarques. Si (X,+) est un semigroupe commutatif, pour tout $x \in X$ et tout $n \in N$ on peut définir le produit $n.x = x + \cdots + x$. Cette loi . est distributive (par commutativité de X), et permet de donner un sens à la notion de suite arithmétique de longueur k, qui vont être les suites de la forme : $a, a+d, \cdots, a+(k-1).d$.

De plus, on peut ajouter à S un élément noté 0, tel que pour tout $n \in N$, $n.0 = 0$, et pour tout $a \in X$, $a + 0 = 0 + a = 0$.

Lemme 8 *Soit $(X, +)$ un semigroupe commutatif. Soit $k \in N$. On considère les sous-ensembles de $(\beta X)^k$:*

$$E_1 = \{(a, a+d, \cdots, a+(k-1).d) \ : \ a \in X; \ d \in X \cup \{0\}\}$$

$$I_1 = \{(a, a+d, \cdots, a+(k-1).d) \ : \ a \in X; \ d \in X\}$$

et leur adhérence dans $(\beta X)^k$: $E = \overline{E_1}$ $\qquad I = \overline{I_1}$.
Alors E est un sous-semigroupe compact de $(\beta X)^k$ et I est un idéal bilatère de E.

Preuve. Soient $\overline{p} = (p_1, \cdots, p_k)$ et $q = (q_1, \cdots, q_k)$ deux éléments de E. Soit U un voisinage de $p + q$. $(\beta X)^k$ étant un semigroupe topologique à droite, $V = {\rho_q}^{-1}(U)$ est un voisinage de p, qui appartient à $\overline{E_1}$. Il existe donc $p_1 \in V$ tel que : $p_1 = (a, a+d, \cdots, a+(k-1).d)$. U est alors un voisinage de $p_1 + q$.

Le centre topologique de $(\beta X)^k$ contenant X^k, $V_1 = {\lambda_{p_1}}^{-1}(U)$ est un voisinage de q. Soit $q_1 = (a_1, a_1 + d_1, \cdots, a_1 + (k-1).d_1)$ appartenant à V_1.

Alors, par définition de V_1, $p_1 + q_1 \in U$. De plus, par commutativité de $+$, cet ultrafiltre appartient à E_1 si $d = d_1 = 0$, et à I_1 si d ou d_1 est non nul. Ainsi, tout voisinage de $p + q$ rencontre E_1, et rencontre I_1 dès que p ou q appartient à I. C'est à dire que $p + q \in E$, et $p + q \in I$ si p ou $q \in I$.

Ceci prouve que E est un semigroupe et I est un idéal de E. Enfin, E est compact en tant que fermé dans un compact. $\diamondsuit$

Théorème 9 *Soit $(X, +)$ un semigroupe commutatif. Alors, pour toute partition de X en un nombre fini de classes, et pour tout $k \in N$, il existe une suite arithmétique de longueur k telle que tous ses éléments appartiennent à la même classe.*

Preuve En reprenant les notations de la partie 3.2, soit p un élément de $M(\beta X)$. Alors : $\overline{p} = (p, \cdots, p) \in E$. En effet, soit U un voisinage de $\overline{p}$. Il existe $W_1, \cdots, W_k \subset X$ tels que $\overline{p} \in \overline{W_1} \times \cdots \times \overline{W_k} \subset U$. C'est à dire que, pour tout $i \in \{1, \cdots, k\}$, $W_i \in p$. p étant stable par intersection finie, on a donc : $\bigcap_{i=1}^{k} W_i \in p$. Si a est un élément de cette intersection, $(a, \cdots, a)$ appartient à la fois à E_1 et à U. C'est à dire que tout voisinage de $\overline{p}$ rencontre E_1. Ainsi, $\overline{p}$ appartient à E.

Selon le lemme 7, $\overline{p}$ appartient donc à I.

Soit maintenant $X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i$ une partition de X. Selon le théorème 1, il existe i_0 tel que X_{i_0} appartient à p. Ce qui implique que $U = \overline{X_{i_0}} \times \cdots \times \overline{X_{i_0}}$ est un voisinage de $\overline{p}$. $\overline{p}$ appartenant à l'adhérence de I_1, on obtient que U rencontre I_1. Soit $(a, a+d, \cdots, a+(k-1).d)$ un élément de leur intersection. Alors, pour tout $0 \leq i \leq k-1$, $\overline{a + i.d}$ appartient à $\overline{X_{i_0}}$ dans βX. C'est à dire que X_{i_0} contient $a + i.d$.

Ainsi, X_{i_0} contient une suite arithmétique de longueur k. $\diamondsuit$

De ceci on déduit le théorème de Van der Waerden :

Théorème 10 (Van der Waerden) *Pour toute partition de N en un nombre fini de classes, et pour tout $k \in N$, il existe une suite arithmétique de longueur k telle que tous ses éléments appartiennent à la même classe.*

4.2.2 Le théorème de Hales-Jewett

Ce résultat généralise le théorème de Van der Waerden.

Définition 11 *Soit $k \in N$. On note Γ_k l'ensemble des mots finis sur l'alphabet $\{1, \cdots, k\}$. Γ_k muni de la concaténation est un semigroupe compact.*

Une suite de k mots de même longueur n : $\omega_i = \omega_i(1) \cdots \omega_i(n)$, $i \leq k$ est appelée ligne si et seulement si pour tout $j \leq n$, on a :

$$\omega_i(j) = a \quad \forall i \leq k \text{ ou } \omega_i(j) = i \quad \forall i \leq k.$$

On peut alors exprimer le théorème de Hales-Jewett :

Théorème 11 (Hales, Jewett) *Pour tout entier k et toute partition de Γ_k en un nombre fini de classes, il existe une ligne incluse dans une seule classe.*

Preuve De la même façon que dans le lemme 8, on définit les sous- ensembles de $(\beta\Gamma_k)^k$: $E = \overline{E_1}$ et $I = \overline{I_1}$, avec :
$I_1 = \{(\omega_1, \cdots, \omega_k) : (\omega_i)_{i \leq k} \text{ ligne de } \Gamma_k\}$ et $E_1 = I_1 \cup \{(w, \cdots, w) : w \in \Gamma_k\}$.

Selon la même preuve qu'au lemme 8, on montre que E est un semigroupe compact et que I est un idéal de E. Alors, si $p \in M(\beta\Gamma_k)$, $\overline{p} = (p, \cdots, p)$ va appartenir à E et à I par le lemme 7 (cf preuve du théorème 9).

Si on considère maintenant une partition de Γ_k en un nombre fini de classes, une de ces classes, C_{i_0}, appartient à p. Alors $\left(\overline{C_{i_0}}\right)^k$ va rencontrer I_1, ce qui implique le résultat souhaité. $\diamondsuit$

Comme l'expliquent Furstenberg et Katznelson dans [5], cette idée permet de montrer beaucoup d'autres théorèmes de partition. En particulier, elle est utilisée dans les preuves des théorèmes 21 et 22, dans l'annexe.

4.2.3 Equations

En 1917, Schur établit que, étant donné une partition de N en un nombre fini de classes, il existe x et y tels que x, y et $x + y$ appartiennent à la même classe.

En 1972, Hindman prouva une version infinitiste de ce résultat, c'est à dire que pour toute partition finie de N, il existe un ensemble infini X et une classe de partition tels que toutes les sommes finies d'éléments distincts de X sont contenues dans cette classe.

La preuve originale de Hindman, de nature combinatoire, et assez compliquée, fut améliorée par Baumgartner. Malgré tout, la structure de l'espace de Stone-Cech associé à un ensemble et en particulier la présence en son sein d'idempotents (partie 3.1) permet de prouver le théorème de Hindman assez rapidement, selon une technique due à Galvin.

Définition 12 *Soit $X = (x_i)_{i \in N}$ une suite dans un semigroupe $(X, +)$. Pour tout $I \subset N$, I fini, on note $S_I(X) = \sum_{i \in I} x_i$.*

On pose $FS(X) = \{S_I(X),\ I \subset N,\ I\ \text{fini.}\}$.

Théorème 12 (Hindman) *Pour toute partition de N en un nombre fini de classes : $N = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$, il existe i_0 et une partie infinie de N, notée A, tels que toutes les sommes finies d'éléments distincts de A appartiennent à C_{i_0}.*

Preuve.

- Soit $p \in \beta N$ un idempotent. Puisque l'addition sur βN étend l'addition sur N, p est non principal (si p était principal, il s'identifierait à un entier. En particulier $p + p = 2p \neq p$ sur N).

- On montre que pour tout $A \in p$, A contient un ensemble infini de la forme $FS(X)$.

  Soit $x_1 \in A^*$, et $A_1 = A$. Supposons par récurrence qu'il existe n éléments de p : $A_1, \cdots, A_n$ et $x_i \in A_i{}^*$ tels que $A_{k+1} \subset A_k \cap (-x_k + A_k)$, pour tout $k \leq n - 1$. Alors, puisque $x_n \in A_n{}^*$, $-x_n + A_n$ appartient à p. p étant stable par intersection finie, $A_n \cap (-x_n + A_n) = A_{n+1}$ est un élément de p. De ce fait, A^*_{n+1} appartient aussi à p, et est donc infini (p non principal). Soit x_{n+1} un élément de A^*_{n+1} distincts des x_i, $i \leq n$. Alors x_{n+1} et A_{n+1} vérifient l'hypothèse de récurrence.

- On montre alors par récurrence sur le cardinal de F que, pour tout $F \subset N$, F fini, on a : $\sum_{i \in F} x_i \in A_{\min F}$, ce qui implique que $FS(x_i,\ i \in N) \subset A$.

  Si $F = \{i_0\}$ alors $x_{i_0} \in A_{i_0}{}^* \subset A_{i_0}$ par construction.

  Si l'hypothèse est vérifiée pour tout F de cardinal n, soit $F \subset N$ de cardinal $n+1$. Soit $r = \min F$ et $s = \min(F - \{r\})$. Alors, par hypothèse de récurrence, $S = \sum_{i \in F - \{r\}} x_i$ appartient à A_s. Mais $A_s \subset A_{r+1} \subset -x_r + A_r$. De ce fait, $x_r + S = \sum_{i \in F} x_i$ appartient à A_r, ce qui est le résultat souhaité.

- Considérons maintenant une partition de N en un nombre fini de classes : $N = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$. Puisque N appartient à p, et par propriété des ultrafiltres, il existe i_0 tel que C_{i_0} appartient à p. Le résultat ci-dessus appliqué à C_{i_0} prouve le théorème. $\diamondsuit$

En fait, cette preuve peut s'appliquer à tout semigroupe $(S, +)$ tel que βS contient un idempotent non principal, une condition suffisante pour l'existence d'un tel idempotent étant l'injectivité de ρ_x, pour tout $x \in S$.

Malgré tout, cette condition est restrictive. En particulier, l'opération union sur $\mathcal{P}(N)$ ne la vérifie pas. Il n'empêche qu'il existe une version du théorème de Hindman pour cette opération.

Théorème 13 (Hindman) *Soit $\mathcal{P}(N) = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ une partition finie de $\mathcal{P}(N)$. Alors il existe $i_0 \leq r$ et une suite infinie de parties de N disjointes : $(A_i)_{i \in N}$, tels que pour tout $F \subset N$ fini, $\bigcup_{i \in F} A_i$ appartient à C_{i_0}.*

Preuve. Ce résultat se déduit du théorème 12 au moyen de la décomposition binaire des entiers. En effet, à tout $A \subset N$ on peut associer $f(A) = \sum_{i\in A} 2^{i-1}$. Cette application établit une bijection entre $\mathcal{P}(N)$ et N. De ce fait, une partition de $\mathcal{P}(N)$ induit une partition de N. Soit $X = (x_i)_{i\in N}$ une suite d'entiers telle que $FS(X)$ est inclus dans une unique classe.

Il est possible de trouver une suite $(K_n)_{n\in N}$ telle que si $A_n \subset N$ vérifie $f(A_n) = \sum_{i\in K_n} x_i$, alors les A_n sont deux à deux disjoints (pour cela, si K_n est supposé construit, on considère $l > \max A_n$. Et on pose $K_{n+1} = \{i_1, \cdots, i_{2^l}\}$, les i_j étant supérieurs à $\max K_n$ et tels que les x_{i_j} appartiennent à la même classe de congruence modulo 2^l). Les A_n vérifient alors la condition requise par l'énoncé. $\diamondsuit$.

4.3 Versions finitistes

Il existe une version finitiste des théorèmes qui ont été présentés dans cette partie.

Théorème 14 (Ramsey, version finitiste) *Soient p, n et r trois entiers. Alors, il existe $R(p,n,r)$ tel que pour toute partition de $[\{1,\cdots,R(p,n,r)\}^p]$ en r classes, il existe $A \subset \{1,\cdots,R(p,n,r)\}$ de cardinal n tel tel que $[A^p]$ soit entièrement contenu dans une seule classe.*

Théorème 15 (Van der Waerden, version finitiste) *Soient r et k deux entiers. Alors, il existe un entier $VW(r,k)$ tel que pour toute partition de $\{1,\cdots,VW(r,k)\}$ en r classes, il existe une suite arithmétique de longueur k telle que tous ses éléments appartiennent à la même classe.*

Ces deux théorèmes se déduisent de leur version infinitiste par compactification. La méthode étant la même dans les deux cas, on ne prouvera ici que le théorème 15.

Preuve du théorème 15.

Soient r et k fixés par l'énoncé. Supposons que pour tout $m \in N$ il existe une partition de $\{1,\cdots,m\}$ telle qu'il n'existe pas de suite monocolore incluse dans une unique classe. On peut représenter cette partition par une application ϕ_m : $\{1,\cdots,m\} \to \{1,\cdots,r\}$. Prolongeons ces applications en $\Phi_m : N \to \{1,\cdots,r\}$, en posant $\Phi_m(x) = 1$ pour tout $x > m$.

Alors les Φ_m sont des éléments de $\{1,\cdots,r\}^N$. Selon le théorème de Tychonoff, cet ensemble est compact. Il existe donc une suite croissante $(m_k)_{k\in N}$, et $\Phi : N \to \{1,\cdots,r\}$ tels que Φ_{m_k} converge vers Φ.

Selon le théorème de Van der Waerden appliqué à Φ, il existe a et b tels que $\Phi(a) = \Phi(a+b) = \cdots = \Phi(a+(k-1)b)$.
Puisque les $\Phi_{m_j}(a+tb)$ convergent simplement dans un ensemble fini, il existe i_0 tel que $\Phi_{m_j}(a+tb) = \Phi(a+tb)$ pour tout $t \leq k-1$ et tout $j \geq i_0$. Soit $i_1 \geq i_0$ tel que $m_{i_1} > a+(k-1)b$.
Alors $\phi_{m_{i_1}}(a+tb) = \Phi_{m_j}(a+tb) = \Phi(a+tb)$ pour tout $t \leq k-1$, ce qui contredit le fait que la partition caractérisée par $\phi_{m_{i_1}}$ ne contient aucune suite

arithmétique de longueur k monocolore. $\diamondsuit$

Les nombres du type $R(n,p,r)$, et plus généralement la théorie de Ramsey finie, sont le thème de nombreuses recherches. Dans [6] sont exposés les principaux résultats connus à ce sujet.

5 Sommes finies monocolores en dimension finie

Le théorème de Hindman établit que pour toute partition de N en un nombre fini de classes, il existe $A \subset N$ infini tel que $FS(A)$ est inclus dans une unique classe. Le problème fut de trouver une version de ce théorème en dimension quelconque, c'est à dire de combiner les théorèmes de Ramsey et Hindman. Plus précisément, si on partitionne $[N^r]$ en un nombre fini de classes, existe-il $A \subset N$ infini tel que tous les r-uplets formés par des sommes finies d'éléments distincts de A appartiennent à la même classe ? Milliken et Taylor montrèrent en 1975, à ce sujet, un résultat généralisant les théorèmes de Ramsey et Hindman. C'est le thème de la partie 5.1.

Dans le même ordre d'idée, Hajnal demanda en 1995 si, pour tout graphe G sans triangle, il existe une partie A de N infinie dont les sommes finies forment un ensemble indépendant dans le graphe G. la partie 5.2 expose les résultats obtenus récemment à ce sujet par Deuber, Gunderson, Hindman, et Strauss dans [3], ainsi que par Luczak, Rodl et Schoen dans [10].

5.1 Le Théorème de Milliken et Taylor

Théorème 16 (Milliken-Taylor) *Soit n un entier. Soit $A = (a_i)_{i\in N}$ une suite d'entiers. Soit $[(FS(A))^n] = \bigcup_{i=1}^r C_i$ une partition finie de $[(FS(A))^n]$. Alors il existe i_0 et une suite $B = (b_i)_{i\in N}$ de $FS(A)$ tels que :*
- il existe une suite $B_i \subset N, i \in N$ telle que $b_i = S_{B_i}(A)$ et $\max B_i < \min B_{i+1}$.
- pour tout suite $F_1, \cdots, F_n \subset N$ telle que $\max F_i < \min F_{i+1}$, le n-uplet $(S_{F_1}(B), \cdots, S_{F_n}(B))$ appartient à C_{i_0}.

Preuve. On combine les preuves des théorèmes de Ramsey et Hindman, en se plaçant sur un idempotent particulier.

- Soit $E = \bigcap_{i\in N} \overline{FS(a_k, k \geq i)}$. E est un compact non vide puisque intersection d'une suite décroissante de compacts non vides. Prouvons que E a une structure de semigroupe.

  Pour celà, soient q_1, $q_2 \in E$, et $i \in N$. Il faut montrer que $FS(a_k, k \geq i) \in q_2 + q_1$, c'est à dire que $\{x \in N, -x + FS(a_k, k \geq i) \in q_1\} \in q_2$. Mais q_2 est un ensemble filtrant contenant $FS(a_k, k \geq i)$. Il suffit donc de prouver que $FS(a_k, k \geq i) \subset \{x \in N, -x + FS(a_k, k \geq i) \in q_1\}$.

  Dans ce but, soit $x \in FS(a_k, k \geq i)$. Il existe alors $j \in N$ tel que $x \notin FS(a_k, k \geq j)$. Ce qui implique que, pour tout $y \in FS(a_k, k \geq j)$, on a : $x + y \in FS(a_k, k \geq i)$.

Ainsi, $-x + FS(a_k, k \geq i)$ contient $FS(a_k, k \geq j)$, qui, par hypothèse, appartient à q_1.
q_1 étant filtrant, on obtient que $-x + FS(a_k, k \geq i)$ appartient à q_1 pour tout $x \in FS(a_k, k \geq i)$, et donc que $FS(a_k, k \geq i) \subset \{x \in N, -x + FS(a_k, k \geq i) \in q_1\}$. E est donc un semigroupe compact non vide.

Considérons alors un idempotent non principal $p \in E$ (théorème 3). Vu la définition de E, p contient $X = FS(A)$, ainsi que les $FS(a_k,\ k \geq i)$.

- Comme dans la preuve du théorème 8, on définit les $F_i^k(x_1, \cdots, x_{n-k})$, pour $(x_1, \cdots, x_{n-1}) \in [X^{n-1}]$, $k \leq n$ et $i \leq r$:
$F_i^1(x_1, \cdots, x_{n-1}) = \{y \in X\ :\ (x_1, \cdots, x_{n-1}, y) \in C_i\}$
$F_i^k(x_1, \cdots, x_{n-k}) = \left\{y \in X\ :\ F_i^{k-1}(x_1, \cdots, x_{n-k}, y) \in p\right\}$, $k \geq 2$.

  De la même façon qu'au théorème 8, on montre que pour tout $k \leq n$ et tout $(x_1, \cdots, x_{n-k}) \in [X^{n-k}]$, $\bigcup_{i=1}^r F_i^k(x_1, \cdots, x_{n-k}) = X \backslash \{x_1, \cdots, x_{n-k}\}$. De cette égalité pour $k = n$ on déduit l'existence de $i_0 \leq r$ tel que $F_{i_0}^n$ appartient à p. Soit $b_1 \in F_{i_0}^n$. Puisque $F_{i_0}^n \subset FS(A)$, il existe $B_1 \subset N$ tel que $b_1 = \sum_{i \in B_1} a_i$.

- On construit par récurrence une suite $B = (b_t)_{t \in N}$ telle que pour tout $s \in N$: $b_s = \sum_{i \in B_s} a_i$ avec $\max B_s < \min B_{s+1}$ et $b_{s+1} \in D_s$, en posant :
$D_s = \bigcap \left\{F_{i_0}^k(S_{I_1} \cdots, S_{I_{n-k}})^* \cap \left(-S_{I_{k-n+1}} + F_{i_0}^k(S_{I_1} \cdots, S_{I_{n-k}})^*\right)\right.$
$\qquad\qquad k \leq n;\ \ I_1, \cdots, I_{n-k+1} \subset \{1, \cdots, s\} \text{ finis}, \max I_j < \min I_{j+1}\big\}$,
(on note S_I à la place de $S_I(B)$).

  En effet, si on suppose que $b_1, \cdots, b_t$ vérifient la formule ci-dessus, alors les $F_{i_0}^k(S_{I_1}, \cdots, S_{I_{n-k}})$ et $-S_{I_{n-k+1}} + F_{i_0}^k(S_{I_1}, \cdots, S_{I_{n-k}})^*$ appartiennent à p pour tout $I_1, \cdots, I_{n-k+1} \subset \{1, \cdots, t\}$ finis, $\max I_j < \min I_{j+1}$. De plus, $FS(a_i, i > \max b_t)$ appartient lui aussi à p. De ce fait : $D_t \cap FS(a_i, i > \max b_t) \in p$, et est donc non vide, ce qui permet de trouver $b_{t+1} \in N$ vérifiant l'hypothèse de récurrence.

- On a ainsi construit une suite B telle que pour tout $I_1, \cdots, I_n \subset \{1, \cdots, t\}$ finis, $\max I_j < \min I_{j+1}$, on a : $S_{I_n} \in F_{i_0}^1(S_{I_1}, \cdots, S_{I_{n-1}})$. C'est à dire que le n-uplet $(S_{I_1}, \cdots, S_{I_n})$ appartient à C_{I_0}. Ce qui est le résultat souhaité. $\diamondsuit$

Ce théorème est bien une généralisation des théorèmes de Ramsey (puisque on peut prendre $I_j = \{i_j\}$, ce qui prouve que $[X^n]$ est monocolore), et de Hindman (pour n=1).

5.2 Sommes finies indépendantes dans les graphes sans K_m ou $K_{m,m}$

En 1995, Haljnal demanda si pour tout graphe sur N sans triangle, il existe une suite $X = (x_n)_{n \in N}$ telle que $FS(X)$ forme un ensemble indépendant dans G, ce résultat étant une généralisation du théorème de Hindman (si $N = A_1 \cup A_2$, on considère le graphe ayant pour arêtes les couples (x, y) avec $x \in A_1$ et $y \in A_2$).

La version finie de cette conjecture est vraie. En effet, dans [10], Luczak, Rodl et Schoen montrent que du théorème de Taylor-Milliken se déduit le théorème :

Théorème 17 *Soit l et m deux entiers. Soit G un graphe sur N se contenant aucun sous- graphe complet de taille m. Alors il existe une suite $(a_n)_{n\in N}$ telle que pour tout $I, J \subset N$ de cardinal au plus l, le couple $(\sum_{n\in I} a_n, \sum_{n\in J} a_n)$ n'est pas une arête de G.*

En fait, le résultat prouvé dans [10] est un peu plus fort que le théorème ci- dessus : il s'agit d'une version semi infinie de la conjecture de Hajnal, dans laquelle entre en jeu le *type de mixage* associé à un couple (I, J) de partie finie de N.

Par contre, la conjecture de Hajnal est fausse. C'est ce que montrent Deuber, Gunderson, Hindman, et Strauss dans [3]. Ceci dit, ces auteurs prouvent un résultat un peu plus faible que cette conjecture, impliquant lui aussi le théorème de Hindman :

Théorème 18 *Soit m un entier et G un graphe sur N ne contenant aucune copie du graphe complet sur m sommets. Alors il existe une suite $(x_n)_{n\in N}$ telle que pour tout $F, G \subset N$ finis et disjoints, $(\sum_{n\in F} x_n, \sum_{n\in G} x_n)$ n'est pas une arête de G.*

La démonstration de ce résultat, trop longue pour être présentée ici, fait appel à la notion d'ultrafiltres, à l'opération * sur un idempotent, ainsi qu'à la notion de $\mathcal{A}$-système.

Enfin, Deuber, Gunderson, Hindman, et Strauss, ainsi que Luczak, Rodl et Schoen montrent que la conjecture de Hajnal est vraie sous d'autres hypothèses, un peu plus fortes :

Théorème 19 *Soit m un entier et G un graphe sur N ne contenant aucune copie du graphe biparti complet sur $2m$ sommets. Alors il existe une suite $(x_n)_{n\in N}$ telle que pour tout $F, G \subset N$ finis, $(\sum_{n\in F} x_n, \sum_{n\in G} x_n)$ n'est pas une arête de G.*

6 Systèmes d'équations linéaires

Considérant les théorèmes de Van der Waerden et de Schur, la question fut de savoir s'il était possible de combiner ces deux résultats. Plus généralement, que peut-on dire, lorsque on considère une partition de N en un nombre fini de classes, à propos des solutions d'un système d'équations linéaires à plusieurs variables ?

6.1 Le théorème de Deuber

RADO s'intéressa à ce sujet et caractérisa les systèmes réguliers. Généralisant cette notion, DEUBER définit en 1973 les ensembles-(m,p,c) :

Définition 13 *Une partie B de N est appelée ensemble-(m,p,c) si et seulement si il existe m entiers $x_1, x_2, \cdots, x_m$ tels que*
$B = \{cx_r + \sum_{k=r+1}^{m} \lambda_k x_k \; ; \; \forall r \in \{1, \cdots, m\} \; ; \; |\lambda_k| \leq p \; , \; \forall\, k \in \{r+1, \cdots, m\}\}$.

Il montra, dans [2], par une preuve combinatoire, que ces ensembles vérifient une propriété de régularité.

Théorème 20 (Deuber) *Soit $(m,p,c) \in N^3$. Il existe $(n,q,\mu) \in N^3$ tel que pour tout ensemble- (n,q,c^μ) A, et pour toute partition de A en un nombre fini de classes, alors une de ces classes contient elle même un ensemble-(m,p,c).*

Récemment, dans [9], HINDMAN et STRAUSS ont publié une preuve algébrique de ce résultat : par une méthode de compactification, ils déduisent le théorème 20 du théorème 4 présenté en annexe. Ceci est intéressant dans la mesure où des résultats tels que les théorèmes 21 et 22 énoncés ci-dessous, dont la preuve nécessitait le théorème de Deuber, possèdent maintenant une démonstration entièrement algébrique.

6.2 Les systèmes-(M,P,C)

A partir des notions d'ensemble-(m,p,c) et de sommes finies ont été définis les systèmes-(M,P,C) :

Définition 14 *Si les $(A_i)_{i \in I}$, sont des parties de N, on pose*
$FS\,(A_i \; , \; i \in I) = \{\sum_{k \in F} x_k \; ; \; F \subset I \; , \; F fini \; ; \; x_k \in A_k \; , \; \forall\, k \in F\}$.

Définition 15 *Une partie B de N est appelée système-(M,P,C) si et seulement si, pour tout $(m,p,c) \in N^3$, il existe un ensemble-(m,p,c), noté $B(m,p,c)$, tels que $B = FS\,(B(m,p,c), (m,p,c) \in N^3)$.*

En 1987, DEUBER et HINDMAN montrèrent dans [4] que les systèmes-(M,P,C) vérifient eux aussi une propriété de régularité :

Théorème 21 (Deuber, Hindman) *Si on partitionne N en un nombre fini de classes, alors une de ces classes contient un système-(M,P,C).*

Et en 1993, ce résultat fut généralisé par HINDMAN et LEFMANN, dans [8] :

Théorème 22 (Hindman, Lefmann) *Si on partitionne un système-(M,P,C) en un nombre fini de classes, alors une de ces classes contient un système-(M,P,C).*

Les preuves algébriques de ces deux théorèmes font l'objet d'un mémoire indépendant présenté en annexe.

Annexe :

Régularité des systèmes-(M,P,C)

On note N l'ensemble des entiers naturels.

A Régularité des systèmes-(M, P, C) : introduction

En 1973, Walter Deuber introduisait la notion d'ensemble-(m, p, c), et montrait une propriété de regularité vérifiée par ces ensembles. Ainsi, si on définit les ensembles-(m, p, c) comme suit :

Définition 1 *Une partie B de N est appelée ensemble-(m, p, c) si et seulement si il existe m entiers $x_1, x_2, \cdots, x_m$ tels que*
$B = \{cx_r + \sum_{k=r+1}^{m} \lambda_k x_k \; ; \; \forall r \in \{1, \cdots, m\} \; ; \; |\lambda_k| \leq p \;\; \forall k \in \{r+1, \cdots, m\}\}$.

Deuber montra dans [2] le théorème :

Théorème 1 (Deuber) *Soit $(m, p, c) \in N^3$. Il existe $(n, q, \mu) \in N^3$ tel que pour tout ensemble-(n, q, c^μ) A, et pour toute partition de A en un nombre fini de classes, alors une de ces classes contient elle même un ensemble-(m, p, c).*

Deux résultats ont été déduits de ce théorème, à propos des sommes finies engendrées par une suite d'ensembles.

Définition 2 *Si les $(A_i)_{i \in I}$, sont des parties de N, on pose*
$FS\,(A_i \;,\; i \in I) = \{\sum_{k \in F} x_k \; ; \; F \subset I \;,\; F fini \; ; \; x_k \in A_k \;,\; \forall k \in F\}$.

Définition 3 *Une partie B de N est appelée système-(M, P, C) si et seulement si, pour tout $(m, p, c) \in N^3$, il existe un ensemble-(m, p, c), noté $B(m, p, c)$, tels que $B = FS\,(B(m, p, c), (m, p, c) \in N^3)$.*

Ainsi, en 1987, Deuber et Hindman prouvèrent dans [4] que les systèmes-(M, P, C) vérifient eux aussi une propriété de régularité :

Théorème 2 (Deuber, Hindman) *Si on partitionne N en un nombre fini de classes, alors une de ces classes contient un système-(M, P, C).*

Enfin, en 1993, dans [8], Hindman et Lefmann généralisèrent ce résultat aux systèmes-(M, P, C) :

Théorème 3 (Hindman, Lefmann) *Si on partitionne un système-(M, P, C) en un nombre fini de classes, alors une de ces classes contient un système-(M, P, C).*

Les preuves des théorèmes 2 et 3 font appel à la structure algébrique du semigroupe compact topologique à droite βN, ainsi qu'au théorème 1. Mais la seule preuve connue du théorème de Deuber était alors la preuve originale, de nature combinatoire. Ansi, les théorèmes 2 et 3 n'avaient pas de preuve entièrement algébrique.

Mais récemment, HINDMAN et STRAUSS ont établi dans [9] une preuve algébrique du théorème 1. On obtient donc, en combinant les travaux de Walter DEUBER, Neil HINDMAN, Hanno LEFMANN, et Donna STRAUSS, une preuve totalement algébrique des théorèmes 2 et 3.

Comme annoncé précédemment, cette preuve utilise la structure algébrique du semigroupe $(\beta N, +)$, où βN est la compactification de Stone-Cech de N, et $+$ le prolongement de l'addition à βN. Cette compactification permet d'obtenir un semigroupe compact, topologique à droite, contenant N, et dont le centre topologique contient N (Ce semigroupe est présenté en détail dans [7]). Rappelons par ailleurs, que, par définition, un espace topologique compact est supposé séparé.

La partie B établit un certain nombre de lemmes algébriques. La partie C assure l'existence, pour tout $(m, p, c) \in N^3$, d'un ultrafiltre sur N dont tous les éléments contiennent un ensemble-(m, p, c). Enfin, la partie D contient la démonstration des théorèmes 2 et 3.

B Quelques lemmes algébriques

Dans cette partie vont être établies quelques propriétés vérifiées par les semigroupes topologiques à droite, et le semigroupe $(\beta N, +)$.

Définition 4 *Soit $(S, +)$ un semigroupe muni d'une topologie. On dit que $(S, +)$ est un semigroupe topologique à droite lorsque pour tout $s \in S$, la fonction $\rho_s : S \to S$ définie par $\rho_s(x) = x + s$ est continue.*

Définition 5 *Soit $(S, +)$ un semigroupe topologique à droite. On appelle centre topologique de S l'ensemble des éléments s de S tels que la fonction $\lambda_s : S \to S$ définie par $\lambda_s(x) = s + x$ est continue.*

On notera que, bien que l'opération sur S soit notée $+$, il n'est pas supposé que cette opération est commutative.

B.1 Idéaux à gauche minimaux dans un semigroupe compact topologique a droite

Dans cette partie, on montrera tout d'abord un lemme usuel (lemme 1) assurant l'existence d'un idempotent dans un semigroupe compact topologique à droite.

Sera ensuite prouvée une série de lemmes permettant d'aboutir au fait que, étant donné un semigroupe compact topologique à droite S, et $r \in N$, tout idéal bilatère d'un sous-semigroupe compact de S^r contenant la diagonale de S^r, rencontre lui-même cette diagonale (lemme 4), résultat qui est vrai si S est fini, mais faux si S est quelconque. Ce lemme est en fait l'argument principal utilisé dans la preuve algébrique du théorème de Van der Waerden (cf [1]). Il permet, de la même façon, de prouver le théorème 4, duquel se déduisent les théorèmes 1, 2 et 3.

Lemme 1 *Soit $(S,+)$ un semigroupe compact topologique à droite. Alors S contient un idempotent, c'est à dire qu'il existe $x \in S$ tel que $x + x = x$.*

Preuve. Soit $\mathcal{A} = \{B \subset S,\ B$ fermé non vide, $B + B \subset B\}$. Puisque toute suite décroissante de compacts non vides est non vide, $\mathcal{A}$ est inductif. Soit B_0 un élement minimal de $\mathcal{A}$.

Considérons $x \in B_0$. ρ_x étant continue, $B_0 + x$ est un compact, donc fermé, non vide de S. Les faits que $x \in B_0$ et $B_0 + B_0 \subset B_0$ impliquent de plus que $B_0 + x$ est stable pour l'addition et est contenu dans B_0. Par maximalité, $B_0 = B_0 + x$. Il existe donc $y \in B_0$ tel que $y + x = x$.

Considérons maintenant $B_1 = \{y \in B_0\,,\, y + x = x\}$. Alors B_1 est non vide selon ce qui vient d'être vu. De plus, B_1 est fermé en tant qu'intersection de B_0 et de $(\rho_x)^{-1}(x)$. Enfin, on vérifie que $B_1 + B_1 \subset B_1$. Ce qui montre que B_1 appartient à $\mathcal{A}$ et est inclus, du fait de sa définition, dans B_0. Ainsi, $B_1 = B_0$, et $x \in B_1$. C'est à dire que $x + x = x$. $\diamondsuit$

Définition 6 *Soit (S,+) un semigroupe.*

Une partie I de S est un idéal à gauche de S si et seulement si $S + I \subset I$, c'est à dire si et seulement si, pour tout $s \in S$ et tout $i \in I$, $s + i$ appartient à I.

On définit de même les idéaux à droite.

On appelle idéal bilatère tout I qui est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite.

Un idéal à gauche I est dit minimal si et seulement si I ne contient strictement aucun idéal à gauche non vide.

Lemme 2 *Soit $(S,+)$ un semigroupe compact topologique à droite. Alors tout idéal à gauche de S contient un idéal à gauche minimal. De plus, les idéaux de S minimaux à gauche sont fermés.*

Preuve. Soit L un idéal à gauche de S. Posons :

$$\mathcal{A} = \{I \subset L\ ;\ I \text{ idéal à gauche de } S\ ;\ I \text{ compact non vide}\}.$$

De même que dans la preuve du lemme 1, $\mathcal{A}$ est inductif pour l'inverse de l'inclusion. Selon le lemme de Zorn, $\mathcal{A}$ admet donc un élément minimal, noté I_0.

I_0 est alors un idéal minimal de S. En effet, supposons que $I_1 \subset I_0$, I_1 étant un idéal à gauche. Soit $x \in I_1$. Alors $S + x$ est un idéal à gauche, non vide, inclus dans $I_1 \subset I_0$ puisque $x \in I_1$ et I_1 est un idéal à gauche. De plus, la multiplication à droite étant continue, $S + x$ est compact. Cet ensemble est donc un élément de $\mathcal{A}$ inclus dans I_0, qui est minimal. Ainsi : $S + x = I_0$ et $I_0 \subset I_1$. Ce qui prouve que I_0 est une idéal à gauche minimal.

On a ainsi obtenu que tout idéal à gauche contient un idéal à gauche minimal fermé. Ce résultat appliqué à un idéal à gauche lui même minimal implique qu'il est fermé. $\diamondsuit$

Définition 7 *Soit $(S,+)$ un semigroupe compact topologique à droite. On pose : $M(S) = \bigcup\{L\ ,\ L$ idéal à gauche minimal dans $S\}$.*

Lemme 3 *Soit $(S,+)$ un semigroupe compact topologique à droite. Soit I un idéal bilatère de S. Alors $M(S) \subset I$.*

Preuve. Considérons un idéal à gauche minimal L. Soit $x \in L$ et $y \in I$. Alors $x + y \in I \cap L$ puisque L est un idéal à gauche et I un idéal à droite. De ce fait, $I \cap L$ est un idéal à gauche (puisque intersection d'idéaux à gauche) non vide. L étant minimal, on obtient : $I \cap L = L$, c'est à dire que $L \subset I$. Ceci étant vrai pour tout L minimal à gauche, $M(S) \subset I$. $\diamondsuit$

On munit S^r de la topologie produit induite par celle de S, et de l'addition coordonnée par coordonnée. Si S est un semigroupe compact topologique à droite, alors S^r est lui même un semigroupe compact topologique à droite.

Lemme 4 *Soit $(S,+)$ un semigroupe compact topologique à droite. Soit $r \in N$ et E un sous-semigroupe compact de S^r. Soit $x \in M(S)$ tel que le r-uplet $(x,\cdots,x)$ appartient à E. Alors pour tout idéal bilatère I de E, $(x,\cdots,x)$ est un élément de I.*

Preuve. Soit L un idéal à gauche minimal tel que $x \in L$ (L existe par définition de $M(S)$). Si on note $\vec{X_1} = (x,\cdots,x)$, l'ensemble $E+\vec{X_1}$ est un idéal à gauche de S^r, puisque E est un semigroupe. Selon le lemme 2, il existe donc un idéal à gauche minimal de S^r, noté L_1, tel que $L_1 \subset E+\vec{X_1}$, cet idéal étant fermé dans S^r. Mais S^r est compact. L_1 est donc lui aussi compact. Selon le lemme 1, considérons un idempotent $\vec{Y} = (y_1,\cdots,y_r)$ appartenant à L_1.

Par définition, L_1 est inclus dans $E + X_1$. De ce fait, il existe un élément de E : $\vec{Z} = (z_1,\cdots,z_r)$ tel que $\vec{Y} = \vec{Z} + \vec{X_1}$. C'est à dire que pour tout $i \leq r$, on a : $y_i = z_i + x$. Mais L est un idéal à gauche qui contient x. Ainsi : $y_i \in L$, pour tout $i \leq r$, et $S + y_i$ est inclus dans L. Mais $S + y_i$ est un idéal à gauche et L est minimal. On en déduit que $L = S + y_i$. Ainsi, pour tout $i \leq r$, il existe $t_i \in S$ tel que $x = t_i + y_i$.

Alors $x + y_i = t_i + y_i + y_i = t_i + y_i = x$, puisque $\vec{Y}$ est un idempotent. On a ainsi montré que $\vec{X_1} + \vec{Y} = \vec{X_1}$ et donc que $\vec{X_1} \in E + \vec{Y} \subset L_1$, puisque L_1 est un idéal à gauche contenant Y.

Mais $L_1 \subset M(S^r)$. D'où $X_1 \in M(S^r)$. Enfin, selon le lemme 3, $M(S) \subset I$, d'où $X_1 \in I$. $\diamondsuit$.

B.2 Construction de semigroupes

Le résultat présenté ci dessous sera utilisé dans la partie C pour montrer que certains ensembles ont une structure de sous-semigroupe. La notation $\overline{A}$ représente la fermeture de A dans S.

Lemme 5 *Soit $(S, +)$ un semigroupe compact topologique à droite dont le centre topologique Λ est dense dans S. Soient $(E_n)_{n\in N}$ et $(I_n)_{n\in N}$ deux suites décroissantes de sous-ensembles de Λ, telles que $I_n \subset E_n$ pour tout $n \in N$.*

On suppose que, pour tout $n \in N$ et tout $a \in E_n$, il existe k tel que : $a + E_k \subset E_n$, $a + I_k \subset I_n$ et $a + E_k \subset I_n$ si $a \in I_n$.

Alors $E = \bigcap_{n\in N} \overline{E_n}$ est un sous-semigroupe de S, et $I = \bigcap_{n\in N} \overline{I_n}$ est un idéal bilatère de E.

Preuve. Soient x et y deux éléments de E. Soit $n \in N$. Il faut montrer que $x + y \in \overline{E_n}$. Pour celà, soit $a \in E$.
Par hypothèse, il existe k tel que $a + E_k \subset E_n$. Mais, $a \in E_n \subset \Lambda$, Λ étant le centre topologique de S. On a donc : $a + \overline{E_k} \subset \overline{a + E_k} \subset \overline{E_n}$.
Or, y appartient à $\overline{E_k}$. Ainsi, $a + y \in \overline{E_n}$ pour tout $a \in E_k$, et $E_k + y \subset \overline{E_n}$.

Par ailleurs, l'addition à droite par un élément fixé dans S est continue. D'où : $\overline{E_n} + y \subset \overline{E_n + y} \subset \overline{E_n}$.
Puisque $x \in \overline{E_n}$, on en déduit que $x + y \in \overline{E_n}$.
Ceci étant vrai pour tout $n \in N$, $x + y \in E$. E est donc un semigroupe.

Si $x \in I$, on montre de la même façon que, pour tout $n \in N$, $I_n + y \subset \overline{I_n}$ (puisque $\forall\, a \in I_n, \exists\, k \in N, a + E_k \subset I_n$), et donc que $x + y \in \overline{I_n}$. Il s'ensuit : $x + y \in I$.

Enfin, si $y \in I$, on obtient que $\overline{E_n} + y \subset \overline{I_n}$, et donc que $x + y \in \overline{I_n}$, ceci pour tout $n \in N$. C'est à dire que $x + y \in I$.
I est donc bien un idéal bilatère de E. $\diamondsuit$

B.3 Quelques propriétés de βN

L'ensemble βN est obtenu par compactification de N. Plus précisément, βN est l'ensemble des ultrafiltres sur N, les éléments de N étant identifiés aux ultrafiltres principaux. On munit βN de la topologie ayant pour ouverts les $\overline{A} = \{p \in \beta N \ , \ A \in p\}$, pour tout $A \subset N$. Cette topologie fait de βN un espace compact. Par ailleurs, on définit sur βN l'addition

$$p + q = \{A \subset N \ ; \ \{x \in N \ ; \ -x + A \in p\} \in q\}$$

avec $-x + A = \{y \in N \ ; \ x + y \in A\}$.
Cette opération, associative mais non commutative, étend en fait l'addition sur N, et fait de βN un semigroupe topologique à droite dont le centre topologique contient N. (cf [7] pour plus de précisions).

L'ensemble βN étant un semigroupe compact topologique à droite, selon le lemme 1, βN contient un idempotent. On définit ci dessous une opération sur cet idempotent.

Lemme 6 *Soit p un idempotent de βN. Soit B un élément de p.*

Définissons $B^* = \{x \in B, -x + B \in p\}$.

Alors $B^* \in p$ et, pour tout $b \in B^*$, $-b + B^* \in p$.

Preuve. p étant un idempotent, pour tout $A \in p$, on a :
$\{x \in N, -x + A \in p\} \in p$.
De ce fait, en tant qu'intersection de deux éléments de p, B^* appartient à p.

Par ailleurs, si $b \in B^*$, on vérifie que $-b + B^* = (-b + B)^*$. Or $-b + B \in p$ par propriété de B^*. Selon ce qui vient d'être vu, on a donc : $-b + B^* \in p$. $\diamondsuit$

Lemme 7 *Soit $p \in \beta N$ un idempotent. Alors, pour tout entier c, cN est un élément de p.*

Preuve. Considérons le plongement canonique de N dans $\frac{Z}{cZ}$, noté h_c. Par propriété de βN, h_c s'étend sur βN en un morphisme $\tilde{h}_c$ continu de βN dans $\frac{Z}{cZ}$. Mais $p = p + p$. D'où $\tilde{h}_c(p) = 2\tilde{h}_c(p) = 0$. Autrement dit, $p \in \left(\tilde{h}_c\right)^{-1}(\{0\})$, qui est un ouvert. Il existe donc $A \in p$ tel que $\overline{A} \subset \left(\tilde{h}_c\right)^{-1}(\{0\})$. Et alors, $A \subset \left(\tilde{h}_c\right)^{-1}(\{0\}) \bigcap N = cN$. p contient donc un sous-ensemble de cN. p étant un filtre, cN appartient à p. $\diamondsuit$

C Ultrafiltre dont tous les éléments contiennent un ensemble-(m, p, c)

Pour obtenir un tel ultrafiltre, on construit dans la partie C.1 un sous semigroupe compact V non vide de βN. Ce semigroupe permettra de montrer dans la partie C.2 un théorème intermédiaire (théorème 4) dont on déduira, dans la partie C.3, le résultat annoncé ci-dessus (théorème 5).

La définition de V et la démonstration du théorème 4, sont dues à Neil HINDMAN et Donna STRAUSS (cf [9]). En fait, le théorème 4 implique les théorèmes 2 et 3, ainsi que le théorème de Deuber. En ce sens, on peut considérer que c'est le résultat central de cette preuve.

C.1 Construction d'un sous semigroupe compact de βN

C.1.1 Définitions

Soit F un ensemble fini de rationnels positifs, contenant 0 et 1. On définit les ensembles suivants :

Définition 8 *1. $P(n)$ est l'ensemble des produits de n éléments de F.*

2. $P = \bigcup_{n \in N} P(n)$.

3. $\mathcal{M}$ est l'ensemble des matrices A de dimension finie telles que

- *tous les coefficients de A appartiennent à P,*
- *aucune ligne de A n'est identiquement nulle,*
- *sur chaque ligne de A, le terme non nul le plus à gauche est 1.*

4. $\mathcal{M}$ est dénombrable, puisque F est fini. On note $\mathcal{M} =< A_t >_{t \in N}$. Pour tout $t \in N$, on appelle $m(t)$ le nombre de colonnes de A_t.

5. $\mathcal{M}_k$ désigne l'ensemble des élements de $\mathcal{M}$ ayant $k + 1$ colonnes, et dont tous les coefficients sont dans $P(k)$.

6. *Pour tout $t \in N$, on considère $\vec{\alpha_t} \in N^{m(t)}$, vecteur tel que tous les coefficients de $A_t\vec{\alpha_t}$ sont des entiers. On pose $Y_t = \{$coefficients de $A_t\vec{\alpha_t}\}$.*

7. *Pour tout $n \in N$, soient*
   $S_n = FS(Y_t, t \geq n)$ *et* $T_n = FS(Y_t, 1 \leq t \leq n)$.

8. *Pour tout $(k,n) \in N^2$, on note*
   $V(n,k) = \{v \in S_n :$ *il existe k entiers $x_1, \cdots, x_k$ tels que*
   $\forall 1 \leq r \leq k-1\ ,\ \forall r+2 \leq i \leq k+1\ ,\ \forall u_i \in P(k)\ ,$
   $x_{r+1} + \sum_{i=r+2}^{k} u_i x_i + u_{k+1} v \in S_n \Big\}$.

9. *Enfin, on note $V = \bigcap_{n \in N} \overline{V(n,n)}$, la fermeture de ces ensembles se faisant dans βN. V est donc un sous ensemble de βN.*

On notera que, bien que les notations ne le fasse pas ressortir, ces définitions dépendent de F et de la suite de vecteurs choisis pour former les Y_t.

C.1.2 V est un semigroupe compact non vide

Lemme 8 *Pour tout $(n,k) \in N^2$, $V(n,k)$ est non vide.*

Preuve. On construit une matrice A à $k+1$ colonnes, dans laquelle apparaissent toutes les lignes existantes de $k+1$ élements de $P(k)$, et ayant 1 pour terme non nul le plus à gauche. Cette matrice est donc un élement de $\mathcal{M}$. En fait, il existe une infinité de matrices vérifiant ces propriétés (puisque on peut rajouter des lignes apparaissant déja dans la matrice). On peut donc choisir A telle que $A = A_t$ avec $t \geq n$.

On note alors v le dernier coefficient de $\vec{\alpha_t}$, et $x_1, \cdots, x_k$ ses k premiers coefficients. Alors, v appartient à $V(n,k)$.

En effet, dans A apparaissent toutes les lignes $(0, \cdots, 0, 1, u_{r+2}, \cdots, u_{k+1})$, avec $u_i \in P(k)$. De ce fait, les $x_{r+1} + \sum_{i=r+2}^{k} u_i x_i + u_{k+1} v$ font partie des coefficients de $A_t\vec{\alpha_t}$, et sont donc des éléments de Y_t. Mais $t \geq n$, et donc $Y_t \subset S_n$. Ainsi, les sommes $x_{r+1} + \sum_{i=r+2}^{k} u_i x_i + u_{k+1} v$ appartiennent à S_n. De plus, la ligne $(0, \cdots, 0, 1)$ est une ligne de A. De ce fait, $v \in S_n$. Ce qui est suffisant pour affirmer que v est un élément de $V(n,k)$. $\diamondsuit$

Lemme 9 *Pour tout $(n,k) \in N^2$, on a :*
$V(n+1,k) \subset V(n,k)$ et $V(n,k+1) \subset V(n,k)$.

Preuve. La première inclusion vient du fait que $S_{n+1} \subset S_n$, ce qui donne le résultat souhaité en considérant la définition de $V(n,k)$.

Pour obtenir la deuxième inclusion, on remarque que $P(k) \subset P(k+1)$, puisque $1 \in F$. De plus, $0 \in F$. De ce fait, si $v \in V(n,k+1)$, et si le $k+1$-uplet $(x_1, \cdots, x_{k+1})$ assure cette appartenance, alors le k-uplet $(x_1, \cdots, x_k)$ va convenir pour l'appartenance de v à $V(n,k)$. $\diamondsuit$

Lemme 10 *Pout tout $(n,k) \in N^2$, et pour tout $v \in V(n,k)$, il existe $n_1 > n$ tel que $v + V(n_1,k) \subset V(n,k)$.*

Preuve. Posons : $C = \{x_{r+1} + \sum_{i=r+2}^{k} u_i x_i + u_{k+1} v$
$\forall 1 \leq r \leq k-1 \;,\; \forall r+2 \leq i \leq k+1 \;,\; \forall u_i \in P(k)\}$,
les x_i , $i \leq k$ étant tels que C est inclus dans S_n.

$P(k)$ étant fini, C est lui aussi un ensemble fini. Vu la définition de S_n, il existe donc $n_1 \geq n$ tel que $C \subset S_n \bigcap T_{n_1-1}$.

On remarque, au vu des définitions de S_n et T_n que, si $m > m_1$, alors $T_{m_1} + S_m \subset S_{m_1}$.

Considérons un élément w de $V(n_1,k)$. Notons $(y_1, \cdots, y_k)$ le k-uplet assurant l'appartenance de w à $V(n_1,k)$. Alors, pour tout $r \leq k-1$ et pour tout choix des u_i, $r+2 \leq i \leq k+1$, la somme $[(x_{r+1}+y_{r+1})+\sum_{i=r+2}^{k} u_i(x_i+y_i)+u_{k+1}(v+w)]$ est un élément de $S_n \bigcap T_{n_1-1} + S_{n_1} \subset S_n$. $v+w$ appartient donc bien à $V(n,k)$.

Ce qui montre que $v + V(n_1,k) \subset V(n,k)$. $\diamondsuit$

Lemme 11 *V est un semigroupe compact non vide. En particulier, V contient un idempotent.*

Preuve. Le lemme 9 montre que les $\overline{V(n,n)}$ forment une suite décroissante de fermés dans le compact βN. Ils sont donc compacts. De plus, selon le lemme 8, ces compacts sont non vides. V est donc un compact non vide.

Par ailleurs,

- les $V(n,n)$ forment une suite décroissante de parties de N, N étant inclus dans le centre topologique de βN.
- Le lemme 10 assure l'existence, pour tout $v \in V(n,n)$, de $n_1 > n$ tel que $v + V(n_1,n) \subset V(n,n)$. De plus, selon le lemme 9, $V(n_1,n_1) \subset V(n_1,n)$. On en déduit que $v + V(n_1,n_1) \subset V(n,n)$.

La suite $V(n,n)$ vérifie donc les hypothèses du lemme 5. Selon ce lemme, V est un semigroupe. L'existence d'un idempotent dans V est alors assurée par le lemme 1. $\diamondsuit$

C.2 Théorème de Hindman et Strauss

Le lemme 12 est un lemme technique permettant de montrer, dans la preuve du théorème 4, qu'un idéal particulier est non vide. Le théorème 4 permet de déduire dans la partie suivante l'existence d'un ultrafiltre dont tous les éléments contiennent un ensemble-(m,p,c), existence qui était assurée dans les preuves des théorèmes 2 et 3 par le théorème de Deuber.

Lemme 12 *Soit $A \in \mathcal{M}$ une matrice à m colonnes telle que tous ses coefficients appartiennent à F. Soit $k > m$, et $V \in V(n,k)$. Alors il existe $\vec{x} \in N^m$ tel que, pour tout $\vec{u} \in F^m$, les coefficents de $A\vec{x}+v\vec{u}$ appartiennent à $V(n,k-m)$.*

Preuve. Notons $\vec{z} = (z_1, \cdots, z_k)$ le vecteur assurant l'appartenance de v à $V(n,k)$. Posons $\vec{x} = (z_{k-m+1}, \cdots, z_k)$. Soit y un coefficient de $A\vec{x}$. Il existe donc $w_{k-m+1}, \cdots, w_k \in F$ tels que $y = \sum_{i=k-m+1}^{k} w_i z_i$.

Considérons maintenant $u \in F$, $r \leq k-m+1$, et $u_{r+2}, \cdots, u_{k-m+1} \in P(k-m)$. Alors $z_{r+1}+\left(\sum_{i=r+2}^{k-m} u_i z_i\right)+u_{k-m+1}(y+uv) = z_{r+1}+\left(\sum_{i=r+2}^{k-m} u_i z_i\right)+\left(\sum_{i=k-m+1}^{k} u_{k-m+1} w_i z_i\right) + u_{k-m+1}uv$.

Or, les w_i appartiennent à F. De ce fait, les $u_{k-m+1}w_i$ et $u_{k-m+1}u$ appartiennent à $P(k-m+1)$, qui est inclus dans $P(k)$. v étant un élément de $V(n,k)$, la somme ci-dessus appartient à S_n. Ce qui prouve que $y+uv \in V(n,k-m)$, et donc le résultat annoncé. $\diamondsuit$

Théorème 4 (Hindman, Strauss) *Soit $p \in M(V)$ un idempotent. Soient B un élément de p, et $A \in \mathcal{M}$ dont tous les coefficients sont des élements de F. Alors, si m est le nombre de colonnes de A, il existe $\vec{x} \in N^m$ tel que tous les coefficients de $A\vec{x}$ appartiennent à B.*

Preuve. La démonstration de ce théorème se fait par récurrence sur m.

- **Initialisation de la récurrence.** Si $m=1$, vu la définition de $\mathcal{M}$, on a nécessairement

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit $x \in B$. Alors Le seul coefficient de Ax est x, qui appartient bien à B. Le résultat est donc vrai pour $m=1$.

- **Supposons le théorème vrai pour toute matrice à m colonnes.**

Soit $A_1 \in \mathcal{M}$ une matrice ayant $m+1$ colonnes. On peut écrire, sans perte de généralité puisque il est possible de rajouter des lignes à A_1 sans modifier le résultat :

$$A_1 = \begin{pmatrix} & A & & \vec{u} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A étant une matrice à m colonnes et r lignes, et à coefficients dans F; $\vec{u}$ étant un vecteur de F^r.

- **Définitions.** $(\beta N)^r$ étant muni de la topologie produit, on pose :

  $$E = \bigcap_{n \in N} \overline{E_n} \qquad\qquad I = \bigcap_{n \in N} \overline{I_n}$$

  Les I_n et E_n étant les parties de N^r, considérées comme sous-ensembles de $(\beta N)^r$, définies ci-dessous (en posant $B^* \cap S_1 \cap \bigcap_{x \in B^* \cap T_0}(-x+B^*) = B^* \cap S_1$) :

$$I_n = V(n,n)^r \bigcap \left\{ A\vec{x}+v\vec{u}, \vec{x} \in N^m, v \in B^* \cap S_n \cap \bigcap_{x \in B^* \cap T_{n-1}} (-x+B^*) \right\}$$

$$E_n = V(n,n)^r \bigcap \left\{ A\vec{x}+v\vec{u}, \vec{x} \in N^m, v \in \{0\} \bigcup B^* \cap S_n \cap \bigcap_{x \in B^* \cap T_{n-1}} (-x+B^*) \right\}$$

- **I_n et E_n sont non vides, pour tout n.**

  Soit $n \in N$ fixé.

  - p étant un idempotent, selon le lemme 6, $B^* \in p$.
  - De plus, selon le même lemme, pour tout $x \in B^*$, on a $-x + B^* \in p$. Mais, T_{n-1} est fini. De ce fait, $\bigcap_{x \in B^* \cap T_{n-1}} (-x + B^*) \in p$, en tant qu'intersection finie d'éléments de p.
  - Par ailleurs, $p \in \overline{V(n+m, n+m)}$, par définition de p. Et donc, $V(n+m, n+m) \in p$.

  De ce fait, $B^* \cap \bigcap_{x \in B^* \cap T_{n-1}} (-x + B^*) \cap V(n+m, n+m) \in p$.
  Cet ensemble est donc non vide. Soit v un de ses élements.

  Selon le lemme 12, il existe $\vec{x} \in N^r$ tel que $A\vec{x} + v\vec{u} \in (V(n+m, n))^r \subset (V(n,n))^r$. Ce qui prouve que $A\vec{x} + v\vec{u} \in I_n$. Cet ensemble est donc non vide. Enfin $I_n \subset E_n$, d'où E_n est lui aussi non vide.

- **E et un semigroupe compact non vide et I un idéal bilatère non vide de E.** Pour montrer cela, on montre que les E_n et I_n vérifient les hypothèses du lemme 10.

  - $((\beta N)^r, +)$ est une semigroupe topologique à droite.
  - Les E_n et I_n forment deux suites de N^r, qui est inclus dans le centre topologique de $(\beta N)^r$.
  - Ces deux suites sont décroissantes. En effet, on remarque que
    * $V(n+1, n+1) \subset V(n,n)$,
    * $S_{n+1} \subset S_n$,
    * $T_n \subset T_{n-1}$ d'où $\bigcap_{x \in B^* \cap T_n} (-x + B^*) \subset \bigcap_{x \in B^* \cap T_{n-1}} (-x + B^*)$.

    Ce qui montre que les deux suites sont bien décroissantes.
  - Soit $k \in N$ fixé et $\vec{a} \in E_k$. Il existe $\vec{x}$ et v tels que $\vec{a} = A\vec{x} + v\vec{u}$.
    * Si $v = 0$, alors, au vu des définitions, $\vec{a} + E_n \subset E_n$ et $\vec{a} + I_k \subset I_k$.
    * Si v est non nul, c'est à dire si $\vec{a} \in I_k$, alors $v \in S_k$. Il existe n tel que $v \in S_k \cap T_{n-1}$.
      Considérons maintenant $\vec{b} \in E_n$. On peut écrire $\vec{b} = A\vec{y} + w\vec{u}$. Alors :
    * si $w = 0$, on a : $\vec{a} + \vec{b} = A(\vec{x} + \vec{y}) + v\vec{u}$. et donc $\vec{a} + \vec{b} \subset I_k$.
    * si w est non nul, alors : $w \in B^* \cap S_n \cap \bigcap_{x \in B^* \cap T_{n-1}} (-x + B^*)$.
      Montrons que $v + w \in B^* \cap S_k \cap \bigcap_{x \in B^* \cap T_{k-1}} (-x + B^*)$.
      En effet :
      · $v + w \in S_k$ car $v \in S_k \cap T_{n-1}$ et $w \in S_n$.
      · $v + w \in B^*$ puisque $v \in B^* \cap T_{n-1}$, et donc $w \in -v + B^*$.
      · Soit $x \in B^* \cap T_{k-1}$. Puisque $v \in S_k \cap T_{k-1}$, on a $x + v \in T_{n-1}$. De plus, $v \in -x + B^*$. D'où : $x + v \in T_{n-1} \cap B^*$. Et donc : $w \in -(x+v) + B^*$. C'est à dire que $x + v + w \in B^*$, soit $(v + w) \in -x + B^*$.

En conclusion, $\vec{a}+\vec{b} = A(\vec{x}+\vec{y})+(v+w)\vec{u}$, avec $v+w \in B^* \cap S_k \cap \bigcap_{x \in B^* \cap T_{k-1}} (-x+B^*)$. Ce qui prouve que $\vec{a}+\vec{b} \in I_k$. Ainsi, $\vec{a}+E_k \subset I_k$.

On se trouve donc dans le cadre du lemme 10. Ainsi, E est un semigroupe et I un idéal bilatère de E. Par ailleurs, ces deux ensembles sont des intersections décroissantes de compacts non vides. Ce sont donc des compacts non vides.

- **Le r-uplet $\bar{p} = (p, \cdots, p)$ appartient à E.** Soit $n \in N$ fixé. Il faut montrer que $\bar{p} \in \overline{E_n}$. Pour celà, soit U un voisinage de $\bar{p}$ dans $(\beta N)^r$. $(\beta N)^r$ étant muni de la topologie produit et $\{\overline{A}, A \subset N\}$ étant une base de la topologie de βN, il existe $W_1, \cdots, W_r \subset N$ tels que $\bar{p} \in \overline{W_1} \times \cdots \times \overline{W_r} \subset U$.

  Posons $W = \bigcap_{i \leq r} W_i$. Alors, pour tout $i \leq r$, p appartient à $\overline{W_i}$. C'est à dire que $W_i \in p$. p étant stable par intersection finie, W est lui aussi un élément de p. Par ailleurs, $p \in \overline{V(n,n)}$. Donc, $V(n,n) \in p$. Ce qui implique que $W \cap V(n,n) \in p$.

  Selon l'hypothèse de récurrence appliquée à A et $W \cap V(n,n) \in p$, il existe $\vec{x} \in N^r$ tel que $A\vec{x} \in (W \cap V(n,n))^r$. Ce qui implique que $A\vec{x} \in E_n$ (on prend $v = 0$).

  De plus, $A\vec{x} \in W$ en tant que vecteur de N^r. D'où $A\vec{x} \in \overline{W} \subset U$ en tant qu'élément de $(\beta N)^r$.

  En conclusion, U rencontre E_n, ceci pour tout U voisinage de $\bar{p}$. D'où $\bar{p} \in \overline{E_n}$, pour tout $n \in N$. Et donc $\bar{p} \in E$.

- **$\bar{p}$ appartient à I.** Puisque I est un idéal bilatère de E et p un élément de $M(V)$, selon le lemme 4 appliqué sur le semigroupe compact topologique à droite βN, on obtient $\bar{p} \in I$.

- **Conclusion.** Selon ce qui vient d'être vu, $\bar{p}$ appartient à I, qui est lui même inclus dans I_1. On considère un élément B de p. Alors, par définition, $p \in \overline{B}$, ce qui implique que $\left(\overline{B}\right)^r$ est un voisinage de $\bar{p}$. De ce fait, $\left(\overline{B}\right)^r$ rencontre I_1. C'est à dire qu'il existe $\vec{b} = A\vec{x} + v\vec{u}$ tel que $\vec{b} \in \left(\overline{B}\right)^r \bigcap (N)^r \subset B^r$, et tel que $v \in B$.

  Or, si $\vec{x_1}$ est le vecteur de N^{r+1} égal à $(\vec{x}, v)$, les coefficients de $A_1\vec{x_1}$ sont soit v, soit les coefficients de $\vec{b}$. Ils appartiennent donc tous à B, ce qui clos la démonstration. $\diamondsuit$

C.3 Existence de l'ultrafiltre recherché

Dans ce paragraphe, comme annoncé au début de la partie C, va être montré l'existence, pour tout $(m,p,c) \in N^3$, d'un ultrafiltre dont tous les éléments contiennent un ensemble-(m,p,c).

Pour celà, on relie les ensembles-(m,p,c) aux ensembles de la forme : $\{cx_r + \sum_{k=r+1}^{m} \lambda_k x_k, \forall r \in \{1, \cdots, m\}, \lambda_k \in \{0, \cdots, p\}, \forall k \in \{r+1, \cdots, m\}\}$, ces ensembles étant liés au théorème 4.

Lemme 13 *Pour tout* $(m,p,c) \in N^3$*, il existe trois entiers* $m_1 = f(m,p,c)$*,* $p_1 = g(m,p,c)$ *et* $c_1 = h(m,p,c)$ *tels que, pour tout* $A \subset N$*, si* A *contient un ensemble de la forme :*
$\Big\{c_1x_r + \sum_{k=r+1}^{m_1} \lambda_k x_k, \forall r \in \{1,\cdots,m_1\}, \lambda_k \in \{0,\cdots,p_1\}, \forall k \in \{r+1,\cdots,m_1\}\Big\}$,
alors A *contient un ensemble-*(m,p,c)*.*

Preuve. Posons $f(m,p,c) = m, g(m,p,c) = (c+1)(1+p)^{m-1}, h(m,p,c) = c$. Notons (m_1,p_1,c_1) ces trois entiers.

Soit $A \subset N$ tel que : $\Big\{c_1x_r + \sum_{k=r+1}^{m_1} \lambda_k x_k, \forall r \in \{1,\cdots,m_1\},$
$\lambda_k \in \{0,\cdots,p_1\}, \forall k \in \{r+1,\cdots,m_1\}\} \subset A.$

Posons $y_k = \sum_{t=k}^{m_1}(1+p)^{t-k}x_t$, pour tout $k \in \{1,\cdots,m_1\}$.

Alors, pour tout $r \leq m_1$ et tout $\lambda_k \in \{-p,\cdots,p\}$, on obtient :
$cy_r + \sum_{k=r+1}^{m} \lambda_k y_k = cx_r + \sum_{r+1}^{m} \Big(c(1+p)^{t-r} + \sum_{r+1}^{t} \lambda_k(1+p)^{t-k}\Big) x_t.$
Mais $|\sum_{r+1}^{t} \lambda_k(1+p)^{t-k}| \leq p\sum_{k=0}^{t-r-1}(1+p)^k = (1+p)^{t-r} - 1.$
De ce fait, le coefficient apparaissant devant chaque x_t est positif et inférieur à p_1. La somme $cy_r + \sum_{k=r+1}^{m} \lambda_k y_k$ appartient donc à A. Ce qui prouve que A contient un système-(m,p,c). $\diamondsuit$

Lemme 14 *Pour tout* $(m,p,c) \in N^3$*, il existe un ultrafiltre sur* N*, noté* $p_{(m,p,c)}$*, tel que, tout élément* B *de* $p_{(m,p,c)}$ *contient un ensemble de la forme :*
$\{cx_r + \sum_{k=r+1}^{m} \lambda_k x_k, \forall r \in \{1,\cdots,m\}, \lambda_k \in \{0,\cdots,p\}, \forall k \in \{r+1,\cdots,m\}\}$.

Preuve. Soit $F = \{1\} \cup \{\frac{n}{c}, n \in \{0,\cdots,p\}\}$.

Soit $p_{(m,p,c)}$ l'ultrafiltre définit par le théorème 4, appliqué sur F.

$p_{(m,p,c)}$ étant un idempotent, selon de lemme 7, l'ensemble cN appartient à p. Par ailleurs, soit $B \in p$. Alors $cN \cap B \in p$.

Considérons maintenant une matrice-(m,p,c), c'est à dire une matrice contenant toutes les lignes de la forme $(0,\cdots,0,c,u_{r+1},\cdots,u_m)$, $0 \leq u_i \leq p$. Notons $A_1 = \frac{1}{c}A$. Alors A_1 est une matrice de $\mathcal{M}$ à coefficents dans F.

Selon le théorème 4, il existe un vecteur $\vec{x} \in N^m$ tel que les coefficients de $A_1\vec{x}$ appartiennent tous à $cN \cap B$. Or, A_1 contient les lignes de la forme $(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$. Les coefficients de $\vec{x}$ sont donc des multiples de c. De ce fait, si on pose $\vec{y} = \frac{1}{c}\vec{x}$, alors $\vec{y} \in N^3$, et $A\vec{y} = A_1\vec{x}$.

Ainsi, l'ensemble des coefficients de $A\vec{y}$ contient un ensemble de la forme voulue dans l'énoncé, et ces coefficients appartiennent tous à B. Ce qui montre le lemme. $\diamondsuit$

Théorème 5 *Pour tout* $(m,p,c) \in N^3$*, il existe un ultrafiltre sur* N *dont tous les éléments contiennent un ensemble-*(m,p,c)*.*

Preuve. Soient $m_1 = f(m,p,c)$, $p_1 = g(m,p,c)$ et $c_1 = h(m,p,c)$, tels que définis par le lemme 13.

Alors tout élément de $p_{(m_1,p_1,c_1)}$ contient un ensemble de la forme :
$\Big\{c_1x_r + \sum_{k=r+1}^{m_1} \lambda_k x_k, \forall r \in \{1,\cdots,m_1\}, \lambda_k \in \{0,\cdots,p_1\}, \forall k \in \{r+1,\cdots,m_1\}\Big\}$.

Selon le lemme 13, tout élement de $p_{(m_1,p_1,c_1)}$ contient donc un ensemble-(m,p,c). $\diamondsuit$

D Régularité des systèmes-(M, P, C)

On montrera dans cette partie les théorèmes 2 et 3. La première preuve a été exposée par Walter DEUBER et Neil HINDMAN dans [4], et la deuxième par Neil HINDMAN et Hanno LEFMANN dans [8], ces deux preuves faisant référence au théorème de Deuber.

Considérons les ensembles $T(m, p, c)$ et U :

Définition 9 *Pour tout* $(m, p, c) \in N^3$, *on note*
$T(m, p, c) = \{q \in \beta N, \textit{tout élément de } q \textit{ contient un ensemble-}(m, p, c)\}$.
On pose $U = \bigcap_{(m,p,c) \in N^3} T(m, p, c)$.

On montre que U est un semigroupe compact non vide (partie D.1). Selon une méthode due à Galvin, il est alors possible de prouver le théorème 2 (partie D.2). La preuve du théorème 3 se fait selon la même méthode, mais nécessite l'introduction d'un ensemble supplémentaire (partie D.3).

D.1 U est un semigroupe compact non vide

On montre tout d'abord, grâce au théorème 4, que les $T(m, p, c)$ sont non vides (dans [4] et [8], c'est théorème de Deuber qui assure ce fait). Le résultat s'en déduit assez facilement.

Lemme 15 *Pour tout* $(m, p, c) \in N^3$, $T(m, p, c)$ *est un semigroupe compact non vide.*

Preuve. Soit $(m, p, c) \in N^3$ fixé.

- $T(m, p, c)$ est non vide selon le théorème 5.
- Soit $q \notin T(m, p, c)$. Il existe alors $B \in q$ tel que B ne contient aucun ensemble-(m, p, c). Alors tout élément de $\overline{B}$ contient B, et n'appartient pas à $T(m, p, c)$. $\overline{B}$ est donc un voisinage de q qui ne rencontre pas $T(m, p, c)$. C'est à dire que le complémentaire de $T(m, p, c)$ est un ouvert. $T(m, p, c)$ est donc fermé dans βN, qui est compact. Ce qui prouve que $T(m, p, c)$ est compact.
- Soient q_1 et q_2 deux éléments de $T(m, p, c)$. Soit $B \in q_2 + q_1$. Il faut montrer que B contient un système-(m, p, c). Pour celà, soit $A = \{x, -x + B \in q_1\}$.

  Par définition de la somme de deux ultrafiltres, A appartient à q_2. A contient donc un ensemble-(m, p, c), noté A_1.
  Soit maintenant $C = \bigcap_{x \in A_1} (-x + B)$. C étant l'intersection d'un nombre fini d'éléments de q_1, on a : $C \in q_1$. De ce fait, C contient un système-(m, p, c), noté C_1.
  Soit $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_m)$ un vecteur caractérisant A_1, et $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_m)$ un vecteur caractérisant C_1.

  Alors, si $z = c(x_r + y_r) + \sum_{k=r+1}^{m} \lambda_k (x_k + y_k)$, $r \in \{1, \cdots, m\}$, et $\lambda_k \in \{-p, \cdots, p\}$ pour tout $k \in \{r + 1, \cdots, m\}$, on peut écrire $z = z_1 + z_2$ avec

$z_1 = cx_r + \sum_{k=r+1}^{m} \lambda_k x_k$ et $z_2 = cy_r + \sum_{k=r+1}^{m} \lambda_k y_k$. Or, par définition de $\vec{x}$ et $\vec{y}$, z_1 appartient à A_1 et z_2 à C_1. Ceci implique que $z_2 \in -z_1 + B$ et donc que z est un élément de B.

Ainsi, l'ensemble-(m,p,c) engendré par $\vec{x} + \vec{y}$ est inclus dans B. Tout élément de $q_2 + q_1$ contient donc un ensemble-(m,p,c).
Ainsi, $T(m,p,c)$ est un semigroupe. $\diamondsuit$

Lemme 16 *U est un semigroupe compact non vide.*

Preuve. Considérons six entiers m_1, m_2, c_1, c_2, p_1 et p_2.
Soit $m = \max(m_1, m_2), p = \max(c_1 p_2, c_2 p_1)$ et $c = c_1 c_2$.
Alors tout système-(m,p,c) contient un système-(m_1, p_1, c_1) et un système-(m_2, p_2, c_2). Ce qui implique que $T(m,p,c) \subset T(m_1,p_1,c_1) \cap T(m_2,p_2,c_2)$.

L'intersection finie des $T(m,p,c)$ est donc non vide, puisque selon le lemme 15, chaque $T(m,p,c)$ est non vide. Ces ensembles étant par ailleurs compacts (lemme 15), U est un compact non vide.

Enfin, U a une structure de semigroupe en tant qu'intersection de semigroupes (lemme 15). $\diamondsuit$

D.2 Régularité de N

Pour montrer ce théorème, on utilise une technique due à Galvin.

Théorème 6 (Deuber, Hindman) *Si on partitionne N en un nombre fini de classes, alors une de ces classes contient un système-(M,P,C).*

Preuve.

- Selon le lemme 16, U est un semigroupe compact non vide, inclus dans βN qui est un semigroupe topologique à droite. On peut donc appliquer à U le lemme 1. Soit p un idempotent appartenant à U. Montrons que pour tout $B \in p$, B contient un système-(M,P,C).
  - Pour celà, soit (m_i, p_i, c_i) une énumération de N^3. On construit par récurrence les ensembles B_i et $C_i, i \in N$.
    * On pose $B_1 = B$ et $A_1 = {B_1}^*$
      Alors $A_1 \in p$, selon le lemme 6 appliqué à B qui est bien un élément de p. Puisque $p \in U \subset T(m_1, c_1, p_1)$, A_1 contient un ensemble-(m_1, c_1, p_1), noté C_1.
    * Supposons que les B_i et $C_i, i \leq n$ ont été construits, tels que les B_i forment une suite décroissante d'éléments de p et tels que les C_i sont des ensembles-(m_i, c_i, p_i) inclus dans ${B_i}^*$. On pose alors $B_{n+1} = B_n \cap \bigcap_{x \in C_n} (-x + B_n)$. Et $A_{n+1} = {B_{n+1}}^*$. Alors B_{n+1} appartient à p, en tant qu'intersection finie d'éléments qui sont par hypothèse de récurrence tous dans p. Selon le lemme 6, A_{n+1} appartient donc à p. Or, $p \in U \subset T(m_{n+1}, c_{n+1}, p_{n+1})$. A_{n+1} contient donc un ensemble-$(m_{n+1}, c_{n+1}, p_{n+1})$, noté C_{n+1}. Alors B_{n+1} et C_{n+1} vérifient les hypothèses de récurrence.

- On montre alors par récurrence sur le cardinal de F que, pour tout $F \in N$, F fini, et pour tout $x_i \in C_i, i \in F$, on a $\sum_{i \in F} x_i \in B_{\min F}$.
  * Si $F = \{i_0\}$ et $x_{i_0} \in C_{i_0}$, alors $x_{i_0} \in B_{i_0}$ puisque $C_{i_0} \subset B_{i_0}$.
  * Si l'hypothèse est vérifiée pour tout F de cardinal n, soit $F \subset N$ de cardinal $n+1$, et $x_i \in C_i$ pour tout $i \in F$. Soit $r = \min F$ et $r_1 = \min(F - \{r\})$. Alors, par hypothèse de récurrence, $s = \sum_{i \in F - \{r\}} x_i$ appartient à B_{r_1}. Mais $B_{r_1} \subset B_{r+1} \subset -x_r + B_r$, par construction des B_i. D'où $x_r + s = \sum_{i \in F} x_i$ appartient à B_r, ce qui est le résultat souhaité.

  Ceci prouve que $FS(C_i, i \in N)$ est un système-(M,P,C) inclus dans B.

- Considérons maintenant une partition de N en un nombre fini de classes : $N = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$.
  N étant un élément de p, par propriété des ultrafiltres, il existe i_0 tel que A_{i_0} appartient à p.
  Le résultat ci dessus appliqué à A_{i_0} montre alors que la classe A_{i_0} contient un système-(M,P,C). $\diamondsuit$

D.3 Régularité des systèmes-(M,P,C)

Pour montrer le théorème 3, il suffit de prouver qu'il existe un idempotent de U qui contient un système-(M,P,C) fixé. La preuve du théorème 2 appliqué à cet ultrafiltre donnera alors le résultat souhaité.

Lemme 17 *Soit $(m_i, p_i, c_i), i \in N$ une énumération de N^3. Soit, pour tout $i \in N$, un ensemble-(m_i, p_i, c_i) noté B_i. Posons $B = \bigcap_{i \in N} \overline{FS(B_k, k \geq i)}$. Alors B est un semigroupe compact non vide.*

Preuve.

- B est compact non vide car intersection d'une suite décroissante de compacts non vides.

- Pour montrer que B est un semigroupe, considérons deux éléments de B : q_1 et q_2, et $i \in N$. Il faut prouver que $FS(B_k, k \geq i) \in q_2 + q_1$, c'est à dire que $\{x \in N, -x + FS(B_k, k \geq i) \in q_1\} \in q_2$.
  q_2 étant un ensemble filtrant contenant $FS(B_k, k \geq i)$, il suffit montrer que $FS(B_k, k \geq i) \subset \{x \in N, -x + FS(B_k, k \geq i) \in q_1\}$.

  Pour celà, soit $a \in FS(B_k, k \geq i)$. Il existe alors $j \in N$ tel que $a \notin FS(B_k, k \geq j)$. Ce qui implique que, pour tout $b \in FS(B_k, k \geq j)$, on a : $a + b \in FS(B_k, k \geq i)$.
  Ainsi, $-a + FS(B_k, k \geq i)$ contient $FS(B_k, k \geq j)$, qui, par hypothèse, appartient à q_1.
  q_1 étant filtrant, on obtient alors que $-a + FS(B_k, k \geq i)$ appartient à q_1 pour tout $a \in FS(B_k, k \geq i)$, et donc que $FS(B_k, k \geq i) \subset \{x \in N, -x + FS(B_k, k \geq i) \in q_1\}$.

B est donc un semigroupe compact non vide. $\diamondsuit$

Lemme 18 *Soit $(m_i, p_i, c_i), i \in N$ une énumération de N^3. Soit, pour tout $i \in N$, un ensemble-(m_i, p_i, c_i) noté B_i. Posons $B = \bigcap_{i \in N} \overline{FS(B_k, k \geq i)}$.*
Soit $(m, p, c) \in N^3$. Alors il existe un élément de B tel que tous ses éléments contiennent un ensemble de la forme :
$\{cx_r + \sum_{k=r+1}^{m} \lambda_k x_k \ , \ \forall r \in \{1, \cdots, m\} \ , \ \lambda_k \in \{0, \cdots, p\} \ , \ \forall k \in \{r+1, \cdots, m\}\}$

Preuve. L'existence d'un tel ultrafiltre vient du choix laissé pour les $\vec{\alpha_t}$ dans le théorème 4.

En effet, posons $F = \left\{\frac{k}{c}, 0 \leq k \leq p\right\} \cup \{1\}$. Considérons, de même que dans la partie 2, l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices ayant pour coefficients des produits finis d'éléments de F, et dont le terme non nul le plus à gauche de chaque ligne est 1. $\mathcal{M}$ est alors dénombrable puisque F fini. Soit $\mathcal{M} =< A_t, t \in N >$, une énumération de $\mathcal{M}$.

Alors, pour tout $t \in N$, il existe k_t tel que A_t soit la restriction d'une matrice N_{k_t}, avec $N_{k_t} = \frac{1}{c_{k_t}} M_{k_t}$, où M_{k_t} est une matrice ayant m_{k_t} colonnes et regroupant toutes les lignes de la forme $(0, \cdots, 0, u_r + 1, \cdots, u_{mk_t})$, $u_i \in \{0, \cdots, p\}$. De plus, étant donné qu'il existe une infinité de matrices de cette sorte, on peut choisir k_t tel que $k_{t+1} > k_t \geq t$.

Par ailleurs, les B_{k_t} étant des ensembles-$(m_{k_t}, p_{k_t}, c_{k_t})$, il existe un vecteur de $N_{k_t}^m$: $\vec{x_{k_t}} = (x_1, \cdots, x_{m_{k_t}})$ tel que l'ensemble des coefficients de $M_{k_t}\vec{x_{k_t}}$ soit inclus dans B_{k_t}, et ceci pour tout $t \in N$. On considère alors $\vec{\alpha_t} = c_{k_t}(x_1, \cdots, x_{m_t})$, où m_t est le nombre de colonnes de A_t. D'après ce qui vient d'être vu, si, conformément aux définitions de la partie 2, on note Y_t l'ensemble des coefficients de $A_t\vec{\alpha_t}$, on obtient que Y_t est une partie de B_{k_t}.

De ce fait, $S_n = FS(Y_t, t \geq n) \subset FS(B_{k_t}, t \geq n) \subset FS(B_t, t \geq n)$ (puisque $k_{t+1} > k_t \geq t$).

On considère alors l'ultrafiltre q défini par le théorème 4. q appartient à $V = \bigcap_{n \in N} \overline{V(n,n)}$. Ce qui implique que, pour tout $n \in N$, $V(n,n) \in q$. Mais $V(n,n) \subset S_n \subset FS(B_t, t \geq n)$. En définitive, on obtient que q appartient à B. Enfin, selon la même démonstration que celle du lemme 14, chaque élément de q contient un ensemble de la forme :
$\{cx_r + \sum_{k=r+1}^{m} \lambda_k x_k, \forall r \in \{1, \cdots, m\}, \lambda_k \in \{0, \cdots, p\}, \forall k \in \{r+1, \cdots, m\}\}$,
ce qui clos la démonstration. $\diamondsuit$

Lemme 19 *Soit $(m_i, p_i, c_i), i \in N$ une énumération de N^3. Soit, pour tout $i \in N$, un ensemble-(m_i, p_i, c_i) noté B_i. Posons $B = \bigcap_{i \in N} \overline{FS(B_k, k \geq i)}$. Alors, pour tout $(m, p, c) \in N^3$, $T(m, p, c) \cap B$ est un semigroupe compact non vide.*

Preuve. Soit $(m_1, p_1, c_1) = (f(m, p, c), g(m, p, c), h(m, p, c))$ comme définit au lemme 13.
En appliquant le lemme 18 au triplet (m_1, p_1, c_1), on obtient un élement q de B dont tous les éléments contiennent un ensemble de la forme :
$\left\{c_1 x_r + \sum_{k=r+1}^{m_1} \lambda_k x_k, \forall r \in \{1, \cdots, m_1\}, \lambda_k \in \{0, \cdots, p_1\}, \forall k \in \{r+1, \cdots, m_1)\right\}$.
Selon le lemme 13, tout élément de q contient alors un ensemble-(m, p, c). Ce

qui montre que q appartient à $T(m,p,c) \cap B$. Cet ensemble est donc non vide. Il a de plus une structure de semigroupe compact en tant qu'intersection de semigroupes compacts (lemmes 17 et 15). $\diamondsuit$

Théorème 7 (Hindman, Lefmann) *Si on partitionne un système-(M,P,C) en un nombre fini de classes, alors une de ces classes contient elle-même un système-(M,P,C).*

Preuve.. Soit A un système-(M,P,C). Alors, si $(m_i,p_i,c_i), i \in N$ est une énumération de N^3, pour tout $i \in N$, il existe un ensemble-(m_i,p_i,c_i) noté B_i, tel que $A = FS(B_k, k \geq 1)$. Posons $B = \bigcap_{i \in N} \overline{FS(B_k, k \geq i)}$. Grâce au lemme 19, et selon la même méthode qu'au lemme 16, on montre que $U \cap B$ est un semigroupe compact non vide, U ayant été défini au paragraphe précédent. On considère donc un idempotent q appartenant à $U \cap B$. De la même façon qu'au théorème 2, on montre que tout élément de q contient un système-(M,P,C), puisque q est un idempotent de U.
Mais q appartient à $B \in \overline{FS(B_k, k \geq 1)} = \overline{A}$. C'est à dire que A appartient à q.
Considérons maintenant une partition de A en r classes : $A = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$. Puisque A appartient à q, il existe $i_o \leq r$ tel que A_{i_0} appartient à q. Selon ce qui a été dit ci dessus, la classe A_{i_0} contient alors un système-(M,P,C). $\diamondsuit$

References

[1] V.Bergelson, H.Furstenberg, N.Hindman et Y.Katzelson, An algebraic proof of Van der Waerden's theorem, *L'enseignement Mathématique*, **35** (1989), 209-215.

[2] W.Deuber, Partitionen und lineare Gleichungssysteme, *Math. Zeit*, **133** (1973), 109-123.

[3] W.Deuber, D.Gunderson, N.Hindman, et D.Strauss, Independent finite sums for K_m-free graphs, à paraitre.

[4] W.Deuber etN.Hindman, Partitions and sums of (m, p, c)-sets, *J. Combin. Theory Ser. A*, **45** (1987), 300-302.

[5] H.Furstenberg et Y.Katznelson, Idempotents in compact semigroups and Ramsey Theory, *Israel Jour. Math*, vol.68, No **3**, 1989.

[6] R.Graham, B.Rothschild et J.Spencer, Ramsey theory, Wiley, New York, 1990.

[7] N.Hindman, Ultrafilters and combinatorial Number theory, dans *Lecture Notes in Math.*, No. **751**, 119-184, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[8] N.Hindman et H.Lefmann, Partition regularity of (M, P, C)-systems, *J. Combin. Theory Ser. A*, **64** (1993), 1-9.

[9] N.Hindman et D.Strauss, An algebraic proof of Deuber's Theorem, à paraitre.

[10] T.Luczak, V.Rodl et T.Schoen, Independent finite sums in graphs defined on the natural numbers, à paraitre.

[11] H.Promel et B.Voigt, Aspects of Ramsey Theory, Forschungsinsitut fur Diskrete Math I, Bonn, report No 87497-OR.