Nachtrag zum Beweis, dass die in der Vorlesung definierte Folge monoton fallend ist

Sei $a > 0$. Wir wählen ein $x_0 > 0$ beliebig und definieren rekursiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

Beweis

Durch Induktion kann man zeigen, dass $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist.
Wir hatten bereits folgendes ausgerechnet:

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{2x_n^2 - x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n}.$$

Um zu zeigen, dass die Differenz $x_n - x_{n+1}$ größer oder gleich Null ist, müssen wir nun nur noch $x_n^2 - a \geq 0$ zeigen, da ja $2x_n > 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Dazu nutzen wir noch einmal aus, dass die Folge rekursiv definiert ist.[1]

$$\begin{aligned} x_n^2 - a &= \frac{1}{4}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 + 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2} - 4a\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 - 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right) = \frac{1}{4}\underbrace{\left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2}_{\geq 0,\text{ da ein Quadrat}} \geq 0. \end{aligned}$$

$\square$

[1] Diesen Trick hatte ich während der Vorlesung leider vergessen.

Angela Holtmann