Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Gegeben sei folgende rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_1 := 1$$

und

$$a_n := \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} a_i} \qquad \text{für } n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton fallend* ist, d. h., dass $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und dass die Folge gegen 0 konvergiert!

Aufgabe 2. Gegeben sei eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Wir betrachten nun die Folge der arithmetischen Mittel der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d. h. die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und dass $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ ist, also der Grenzwert der ursprünglichen Folge mit dem Grenzwert der Folge der arithmetischen Mittel übereinstimmt!

Aufgabe 3. Gegeben sei die Fibonacci-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die rekursiv durch

$$a_0 := 1, \qquad a_1 := 1$$

und

$$a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \text{für } n \geq 2$$

definiert ist.

Wir betrachten nun die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die durch

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

gegeben ist.

Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt ist und dass $b_0 < b_2 < b_4 < b_6 < \ldots$ sowie $\ldots < b_7 < b_5 < b_3 < b_1$, dass also $b_{2n} < b_{2n+2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sowie $b_{2n+1} > b_{2n+3}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt!

Späteste Abgabe: Fr, 13.11.2009, 10.50 Uhr Angela Holtmann