Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$a_n := \begin{cases} -3, & \text{falls } n = 3\cdot m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0 \\ 0, & \text{falls } n = 3\cdot m+1 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0 \\ 3, & \text{falls } n = 3\cdot m+2 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ genau drei Häufungspunkte hat!

(Zu zeigen ist also, dass die Folge *mindestens* drei Häufungspunkte hat (etwa durch Angabe konvergierender Teilfolgen), aber auch, dass *keine weiteren* existieren können.)

Aufgabe 2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge, die (mindestens) einen Häufungspunkt $a \in \mathbb{R}$ besitzt. Zeigen Sie, dass es dann eine Teilfolge $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert!

Aufgabe 3. Bestimmen Sie näherungsweise (bis auf fünf Stellen nach dem Komma) die Ausdrücke $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$, wobei für vorgegebenes $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ der Ausdruck $\sqrt{a}$ die eindeutig bestimmte positive Zahl $c \in \mathbb{R}$ bezeichnet, für die $c^2 = a$ gilt. Nutzen Sie dazu die Rekursionsformel für Wurzeln, also für einen beliebigen Startwert $x_0 > 0$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die durch

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \text{ für } n \in \mathbb{N}_0$$

gegeben ist!