Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)!}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^i}{\binom{2i}{i}}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i^4+6)^2}$$

Aufgabe 2.

- Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen divergieren:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2}{i^3+125}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$$

- Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige, fest vorgegebene reelle Zahl.

  Zeigen Sie, dass dann die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

  absolut konvergiert!

  Hinweis: Machen Sie eine Fallunterscheidung für $x = 0$ und $x \neq 0$, und nutzen Sie im zweiten Fall das Quotientenkriterium für Reihen!

(Bitte wenden!)

Aufgabe 3. Zeigen Sie folgende Behauptung:

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: a$ existiert und $a < 1$ ist, so ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Zeigen Sie hiermit, dass die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch

$$a_n := \frac{n!}{n^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

und

$$b_n := \frac{n}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

gegeben sind, gegen Null konvergieren!