

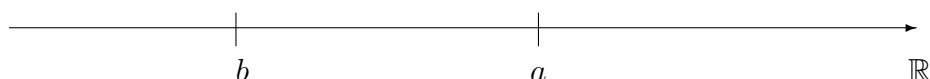
Bildliche Vorstellung der Aussage aus Satz 1.2, Teil 4)

Ist $a \leq b + \varepsilon$ für *alle* $\varepsilon > 0$, so gilt schon $a \leq b$.

Wir führen einen Beweis durch Kontraposition, zeigen also: Wenn *nicht* $a \leq b$ gilt, so gilt *nicht* „ $a \leq b + \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ “, d. h., es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $a > b + \varepsilon$.

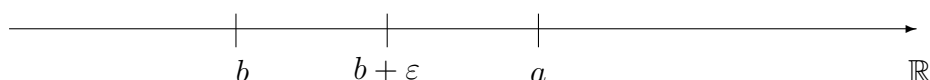
Sei also $a > b$.

Dann sieht das entsprechende Bild in etwa so aus, wobei die Pfeilrichtung anzeigt, wo die größeren Zahlen stehen:



Nun wählen wir mit einem Trick ein $\varepsilon > 0$, das so klein ist, dass gerade nicht mehr die Bedingung $a \leq b + \varepsilon$ gilt.

Im Bild könnte man dann zum Beispiel ε so wählen können, dass man mit $b + \varepsilon$ den Mittelpunkt auf der Strecke zwischen b und a erhält. Diesen Punkt liefert gerade $\varepsilon := \frac{a-b}{2}$. Das sieht dann ungefähr so aus:



Natürlich ist $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$, denn $a > b$, also $a - b > 0$ (nach der Definition der Größer-Relation), also (nach Eigenschaft 3), die für den Satz vorausgesetzt wurde – Multiplikation mit positiven Zahlen erhält die Größer-Relation bzgl. Null) auch $\frac{a-b}{2} > 0$, da ja $\frac{1}{2} > 0$ ist.

Da $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2} > 0$, gilt (nach Definition der der Größer-Relation) also $\frac{a}{2} > \frac{b}{2}$.

In diesem Fall ist aber gerade $b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} < \frac{a+a}{2} = a$.

Es gibt also ein $\varepsilon > 0$ mit $a > b + \varepsilon$.