Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Gegeben sei eine Kette von Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$, nämlich

$$12\mathbb{Z} \subseteq 6\mathbb{Z} \subseteq 3\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}.$$

Zu welcher Faktorgruppe F von $\mathbb{Z}$ ist die Gruppe $(3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/(6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$ (jeweils mit den „natürlichen" Gruppenstrukturen aus Lemma 1.78) isomorph? [1]

Geben Sie einen Isomorphismus zwischen $(3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/(6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$ und F an!

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

Besitzt eine Gruppe $(G, \cdot)$ genau eine Untergruppe U der Ordnung k, so ist die Untergruppe U ein Normalteiler in G.

Hinweis: Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ auch $g \cdot U \cdot g^{-1}$ eine Untergruppe von G ist! Was ist die Ordnung von $g \cdot U \cdot g^{-1}$? Nutzen Sie nun die Charakterisierung von Normalteilern (aus Lemma 1.70)!

Aufgabe 3. Gegeben sei die Diedergruppe $(D_n, \circ)$ eines regelmäßigen n-Ecks. Die Drehgruppe $(C_n, \circ)$ des regelmäßigen n-Ecks ist, wie wir in Beispiel 1.71 gesehen haben, ein Normalteiler von D_n.

Wir betrachten nun die natürliche Abbildung $f : D_n \to D_n/C_n$, $g \mapsto g \circ C_n$.

Rechnen Sie zunächst die Bilder der Drehungen und Spiegelungen unter f aus! (Wir wissen bereits, dass die Drehungen und Spiegelungen in der Form d^i, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, und sd^i, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ zu schreiben sind.)

Zeigen Sie (durch Rechnung): Die angegebene Abbildung liefert einen Gruppenepimorphismus.

Bestimmen Sie explizit den Kern von f (mit Hilfe der Bilder der Drehungen und Spiegelungen)!

Zu welcher Gruppe ist das Bild von f isomorph?
Hinweis (zur Bestimmung der Isomorphieklasse des Bildes): Wieviele Elemente hat die Gruppe D_n/C_n (ggf. in Abhängigkeit von n)? Welche Gruppen mit soviel Elementen kennen Sie?

[1] Dass F eine „Faktorgruppe von $\mathbb{Z}$" sein soll, bedeutet, dass $F = \mathbb{Z}/N$ für einen Normalteiler N in $\mathbb{Z}$ ist.