Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Gegeben sei die Menge $G := \{t_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t_{a,b}(x) = ax+b \mid a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0\}$. (Das sind also gewisse Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die die gewünschte Form haben.)

- Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$, also die Menge G mit der Hintereinanderschaltung der Funktionen als Verknüpfung, eine Gruppe bildet!
- Zeigen Sie, dass die Menge $N := \{t_{1,b} \mid b \in \mathbb{R}\}$ ein Normalteiler in G ist!
- Zeigen Sie, dass $G/N \cong \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist!
  (Hier kann man benutzen, dass man die Nebenklassen von N in G immer in der „Standardform" $t_{a,0}\circ N$ schreiben kann. Das muss man natürlich auch noch beweisen.)

Hinweis: Rechnen Sie zunächst aus, was die Hintereinanderschaltung von zwei Funktionen aus G ist! Diese ist wieder von der Form der Funktionen in G, und dann kann man für alle Rechnungen immer Rechenregeln anwenden, die aus den reellen Zahlen bekannt sind.

Aufgabe 2. Wie wir wissen, besitzt jede Gruppe mindestens zwei Normalteiler, nämlich sich selbst und die Untergruppe, die nur aus dem neutralen Element besteht.

Definition: Eine Gruppe heißt *einfach*, wenn sie als Normalteiler nur sich selbst und die Untergruppe, die aus dem neutralen Element besteht, besitzt.

Zeigen Sie: Es gibt *keine* einfachen Gruppen der Ordnungen 35 oder 312.

Hinweis: Nutzen Sie die Sylowsätze aus und die Tatsache, dass eine Untergruppe der Ordnung k, wenn sie die *einzige* der Ordnung k ist, bereits ein Normalteiler sein muss! (Der zweite Teil war gerade bei Aufgabe 2 auf Übungsblatt 10 zu zeigen.)

Aufgabe 3. Gegeben sei eine Gruppe $(G, *)$.

Zeigen Sie (mit Hilfe der Sylowsätze): Ist H eine p-Untergruppe von G *und* ein Normalteiler in G, so ist H in *jeder* p-Sylowuntergruppe von G enthalten.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst folgende Aussage: Ist eine Untergruppe U einer Gruppe $(K, *)$ ein Normalteiler, so gilt nicht nur $k * U * k^{-1} \subseteq U$ für alle $k \in K$, sondern auch $U \subseteq k * U * k^{-1}$ für alle $k \in K$, also $k * U * k^{-1} = U$ für alle $k \in K$.

(Selbst, wenn man diese Aussage nicht beweisen kann, sollte man trotzdem versuchen, sie für den „Hauptbeweis" zu benutzen.)

Späteste Abgabe: Fr, 3.7.2009, 10.50 Uhr — Angela Holtmann