

ÜBUNGSBLATT 13

Aufgabe 1. Sei G eine endliche zyklische Gruppe. Zeigen Sie, dass $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für ein $n \in \mathbb{N}$!

Aufgabe 2.

- Zeigen Sie, dass es nur eine endliche Gruppe der Ordnung 15 geben kann!¹
- Sind zwei Gruppen $(G, *)$ und $(H, \diamond)$ gegeben, können wir das kartesische Produkt der beiden zugrundeliegenden Mengen G und H betrachten:

$$G \times H := \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}.$$

Wir erhalten mit der komponentenweisen Verknüpfung

$$(g, h) \star (g', h') := (g * g', h \diamond h')$$

wieder eine Gruppe $(G \times H, \star)$.²

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$!

Aufgabe 3. (Zusatzaufgabe)

In Aufgabe 2 auf diesem Übungsblatt ist zu zeigen, dass $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ gilt.

Finden Sie noch einen zweiten Beweis, das zu zeigen? (Oder gar einen dritten?)

¹Damit ist dann die in Beispiel 1.93, Teil 2, beschriebene Gruppe immer isomorph zu $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

²Wer sich in den Präsenzübungen (Blatt 2, Aufgabe 13) noch nicht von dieser Behauptung überzeugt hat, sollte das zur Übung vielleicht noch einmal selbst kurz nachrechnen.