

ÜBUNGSBLATT 2

Aufgabe 1. Gegeben sei ein regelmäßiges Sechseck mit Mittelpunkt M , das in eine Ebene eingebettet ist. Im folgenden betrachten wir die Drehungen der Ebene um M , die das Sechseck auf sich abbilden, wobei wir zwei Drehungen identifizieren, wenn sie sich um Vielfache von 360° unterscheiden. („Zulässig“ sind also alle Drehungen um die Winkel $\frac{k \cdot 360^\circ}{6}$ mit $0 \leq k < 6$.) Diese bilden (mit der Hintereinanderschaltung als Verknüpfung) eine Gruppe G .

Zeigen Sie: Die Gruppe G hat zwei verschiedene *echte* Untergruppen, die nicht nur aus der Drehung um 0° bestehen. (Eine Untergruppe H einer Gruppe G heißt dabei *echte Untergruppe*, falls $H \neq G$ gilt.)

Skizzieren Sie eine Reihe von Bildern eines regelmäßigen Sechsecks, dessen Ecken durchnummeriert sind, so dass dadurch die (oben beschriebenen) möglichen Drehungen des Sechsecks um seinen Mittelpunkt gezeigt werden! Kennzeichnen Sie anschließend, welche Drehungen jeweils zu den beiden Untergruppen gehören!

Aufgabe 2.

- Sei G eine Gruppe, und seien U_1 und U_2 Untergruppen von G . Zeigen Sie:
Der Durchschnitt $U_1 \cap U_2 := \{g \in G \mid g \in U_1 \text{ und } g \in U_2\}$ ist auch eine Untergruppe von G .
- Sei $a \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:
 - Die Menge $a\mathbb{Z} := \{a \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
 - Die Gruppe $(a\mathbb{Z}, +)$ ist genau dann isomorph zu $(\mathbb{Z}, +)$, wenn $a \neq 0$ ist.

(Es kann also insbesondere vorkommen, dass eine *echte* Untergruppe H von G selbst wieder isomorph zu G ist.)

(Bitte wenden!)

Aufgabe 3. Gegeben sei die Menge $G := \{a, b, c, x, y, z\}$ mit einer Verknüpfung $* : G \times G \rightarrow G$, die durch folgende Gruppentafel gegeben ist:

$*$	a	b	c	x	y	z
a					c	b
b		x	z			
c		y				
x				x		
y						
z		a			x	

Der erste Faktor in einer Verknüpfung von zwei Elementen stehe dabei in der linken Spalte, der zweite in der oberen Zeile. Es soll also gelten: $a * y = c$, $a * z = b$, $b * b = x$ etc. Leider sind einige der Einträge in der Tafel verlorengegangen, jedoch durch systematisches Ergänzen wiederzufinden. Füllen Sie die Gruppentafel vollständig aus, so dass $(G, *)$ eine Gruppe bildet!

ACHTUNG!

Der **Abgabetermin** für die Lösungen des zweiten Übungsblattes ist ausnahmsweise schon am **Donnerstag, den 30.4.2009**, da der kommende Freitag ein Feiertag ist.
