

ÜBUNGSBLATT 6

Aufgabe 1. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $M \subseteq G$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die von M erzeugte Untergruppe $\langle M \rangle = \{m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n \mid m_i \in M \cup M^{-1}, n \in \mathbb{N}_0\}$ ist! (Hier bezeichnet M^{-1} die Menge der Elemente aus G , die zu Elementen in M invers sind.)

Aufgabe 2. Die betrachteten Gruppen sind jeweils als Untergruppen der Gruppe der ganzen Zahlen mit der Addition, also von $(\mathbb{Z}, +)$, aufzufassen.

- (a) Zeigen Sie, dass die von 3 und 8 erzeugte Untergruppe $\langle 3, 8 \rangle = \mathbb{Z}$ ist!
(*Hinweis:* Versuchen Sie dazu, $1 = a \cdot 3 + b \cdot 8$ mit ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ zu schreiben!)
- (b) Zeigen Sie, dass die von 2 und 6 erzeugte Untergruppe $\langle 2, 6 \rangle = 2\mathbb{Z}$ ist!
- (c) Sei $x \in \mathbb{Z}$ fest. Zeigen Sie, dass $\langle x, xy \rangle = x\mathbb{Z}$ für alle $y \in \mathbb{Z}$ gilt!

Aufgabe 3.

- Gegeben seien zwei Gruppen $(G, *)$ und $(H, \diamond)$ mit ihren Multiplikationstafeln. Zeigen Sie, dass die beiden Gruppen *nicht* isomorph sind!

$*$	a	b	c	d		$\diamond$	u	v	w	x
a	a	b	c	d		u	u	v	w	x
b	b	c	d	a	und	v	v	u	x	w
c	c	d	a	b		w	w	x	u	v
d	d	a	b	c		x	x	w	v	u

(*Hinweis:* Was sind die Ordnungen der Elemente $a, b, c, d \in G$ bzw. $u, v, w, x \in H$? (Und warum hilft das weiter?))

- Gegeben sei die Diedergruppe eines regelmäßigen Sechsecks, also die Gruppe der Drehungen und Spiegelungen eines regelmäßigen Sechsecks mit ihrer Hintereinanderschaltung als Verknüpfung.
 - Zeichnen Sie zwölf Bilder, aus denen die sechs Drehungen und die sechs Spiegelungen hervorgehen!
 - Geben Sie Permutationen aus der S_6 an, die die Drehungen und Spiegelungen beschreiben! (Das ist möglich, wenn man z.B. die Ecken des Sechsecks durchnummeriert, da durch die Lage der Ecken, auch die jeweilige Drehung bzw. Spiegelung beschrieben ist.)
 - Welche Ordnung haben die einzelnen Elemente?