ÜBUNGSBLATT 9

Aufgabe 1. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Damit ist $n\mathbb{Z}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ (und, da $\mathbb{Z}$ kommutativ ist, sogar ein Normalteiler). Wir betrachten die Menge der Nebenklassen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Zeigen Sie, dass die Abbildung, die durch die Zuordnung

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$
$$(a + n\mathbb{Z}, b + n\mathbb{Z}) \mapsto (a \cdot b) + n\mathbb{Z}$$

gegeben ist, *wohldefiniert* ist! Das heißt:

Gilt $a + n\mathbb{Z} = a' + n\mathbb{Z}$ und $b + n\mathbb{Z} = b' + n\mathbb{Z}$, so gilt auch $(a \cdot b) + n\mathbb{Z} = (a' \cdot b') + n\mathbb{Z}$.

(Mit $a \cdot b$ bezeichnen wir hier die gewöhnliche Multiplikation zweier ganzer Zahlen a und b.)

Aufgabe 2.

- Wir betrachten die symmetrische Gruppe S_3 und die Untergruppen $U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $V := \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.
  Zeigen Sie, dass $U \circ V$ eine Untergruppe von S_3 ist!

- Gegeben sei die Drehgruppe C_6 eines regelmäßigen Sechsecks. Wie wir wissen, hat diese Gruppe als Untergruppe die Drehgruppe C_3 eines regelmäßigen Dreiecks, und da C_6 kommutativ ist, ist C_3 sogar ein Normalteiler in C_6. Also besitzt die Menge der Linksnebenklassen C_6/C_3 von C_3 ebenfalls eine Gruppenstruktur, die wie in Lemma 1.78 definiert ist.

  Bestimmen Sie zunächst die Elemente in C_6/C_3 (mit der Gruppenstruktur aus Lemma 1.78)! (Schreiben Sie für jedes Element einen Repräsentanten der Nebenklasse hin!) Zu welcher Gruppe ist C_6/C_3 isomorph?

Aufgabe 3.

- Wie in Aufgabe 1. betrachten wir wieder für $n \in \mathbb{N}$ die Normalteiler $n\mathbb{Z}$ in $(\mathbb{Z}, +)$.

  Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 3$ die Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ isomorph ist zur Drehgruppe C_n eines regelmäßigen n-Ecks!

- Zeigen Sie: Ist $(G, *)$ eine kommutative Gruppe und $N \subseteq G$ ein Normalteiler, so ist auch G/N (mit der „natürlichen“ Gruppenstruktur) kommutativ.

  Warum sind die Diedergruppen D_n von regelmäßigen n-Ecken mit $n \geq 3$ (im Gegensatz zu den Drehgruppen) *nicht* von der Form $\mathbb{Z}/N$ für gewisse Normalteiler N in $(\mathbb{Z}, +)$?

Späteste Abgabe: Fr, 19.6.2009, 10.50 Uhr

Angela Holtmann