Kommentare zu den Aufgaben der ersten Klausur vom 30.7.2009

Aufgabe 1.

- Es war erschreckend, wieviele Teilnehmer und Teilnehmerinnen der Meinung waren, die natürlichen Zahlen einschließlich der Null bildeten eine Gruppe bzgl. der Addition. Ich habe extra darauf hingewiesen, dass man bei den Ankreuzaufgaben genau hinschauen sollte. Insbesondere gilt das natürlich auch für die allererste Frage in der Klausur...

- Das sieht man sofort, wenn man weiß, was ein Normalteiler ist, da $g * M = M * g$ sogar automatisch für jede Teil<u>menge</u> M einer kommutativen Gruppe $(G, *)$ und jedes $g \in G$ gilt, da ja $g * m = m * g$ für alle $m \in M$ und alle $g \in G$ gilt.

- Hier war natürlich darauf zu achten, dass dort $n\mathbb{Z}$ und nicht $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ stand. Gefragt wurde das, weil man hier zeigen sollte, dass man verstanden hat, dass Untergruppen und Faktorgruppen der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ nicht dasselbe sind.

- Die Gruppen $(D_n, \circ)$ haben wir lange besprochen, insbesondere auch deren Darstellung durch zwei(!) Erzeuger und Relationen. Wenn man nun weiß, was eine zyklische Gruppe ist, nämlich eine Gruppe, die von einem Element erzeugt wird (und insbesondere auch noch kommutativ ist), sieht man sofort, dass die Diedergruppen D_n, $n \geq 3$, keine zyklischen Gruppen sein können.

Aufgabe 2.

- Das sind Definitionen, die immer wieder vorkamen.

- Bei Teil 2 sollte man natürlich wissen, was ein Gruppenhomomorphismus ist und insbesondere eine Abbildung $f : G \to H$ benennen sowie ein neutrales Element $e' \in H$ (G, H Gruppen), so dass man den Kern von f überhaupt sinnvoll hinschreiben kann. (Manchmal wurden ganz andere Arten von Abbildungen, die zu Gruppenoperationen gehören könnten, „angeboten".)

Aufgabe 3.

- Teil 1 ist eine Standardaufgabe, die sogar auf der Liste der Inhalte der Vorlesungen genannt wurde.

- Bei Teil 2 muss man darauf achten, dass gefragt ist, dass aus den gegebenen Informationen die Eigenschaften eines Normalteilers aus der Definition ($g * U = U * g$ für alle $g \in G$) folgen, und nicht die umgekehrte Richtung zu zeigen ist.

Aufgabe 4.

- Wer die Hintereinanderschaltung von zwei Permutationen nicht berechnen kann, sollte am besten noch mal die Vorlesung von vorne hören. Ansonsten: Rechnungen noch mal kontrollieren!

- Hier war anzugeben, um was für Drehungen oder Spiegelungen des Dreiecks es sich handelte. Bei Angabe von Permutationen mit vollständigen Zeichnungen gab es trotzdem die volle Punktzahl, auch wenn das nicht vollständig beschrieben wurde. Nur Angabe von Permutationen gab Punktabzug.

Aufgabe 5.

- Teil 1 ist eine typische Rechenanwendung der Sylowsätze. Alternativ kann man auch Lemma 1.100 verwenden.

- Bei Teil 2 sind die Drehachsen eines Tetraeders zu zählen: Je eine durch die Mittelpunkte der Flächen und die gegenüberliegenden Spitzen (4 Stück) und je eine duch die Mittelpunkte von ~~Seiten~~ Kanten und die Mittelpunkte der jeweils gegenüberliegenden ~~Seiten~~ Kanten (3 Stück), also insgesamt 7 Stück. Notfalls hilft eine Zeichnung.

- Teil 3: Die Drehgruppe mit Drehungen eines regelmäßigen 27-Ecks besteht aus Drehungen mit Drehwinkeln $\frac{k \cdot 360°}{27}$ mit $0 \leq k \leq 26$, die Drehgruppe eines regelmäßigen 54-Ecks besteht aus Drehungen mit Drehwinkeln $\frac{\ell \cdot 360°}{54}$ mit $0 \leq \ell \leq 53$. Betrachtet man nun nur die Drehungen um $\frac{2 \cdot \ell \cdot 360°}{54} = \frac{\ell \cdot 360°}{27}$ (und das ist eine Untergruppe, wie man sofort sehen sollte), so erhält man sofort einen Isomorphismus zwischen der Drehgruppe eines regelmäßigen 27-Ecks und einer Untergruppe der Drehgruppe eines regelmäßigen 54-Ecks.

- Das ist gerade ein Teil des Fundamentallemmas für endliche Gruppen, (was immer wieder angewendet wurde).

Aufgabe 6.

- Bei Teil 1 muss man natürlich die Gruppenoperation irgendwie benennen und eine Gruppe G sowie eine Menge M als Bezeichnung zur Verfügung haben, um die Bahn definieren zu können.

- Hier war nur nach einer p-Gruppe gefragt, nicht nach einer p-Untergruppe einer gegebenen Gruppe.

Aufgabe 7.

- Hier sind die Untergruppenaxiome nachzurechnen. Dazu ist das neutrale Element aus G zu benennen, um nachrechnen zu können, dass es auch in den Mengen $g * U * g^{-1}$ liegt. Weiterhin sollte natürlich bei den Rechnungen auch irgendwo herauskommen, dass die Bedingungen tatsächlich erfüllt sind. (Also sollte irgendwo schon $g*U*g^{-1} \ni g * e * g^{-1} = \ldots = e$ stehen etc.)

  Auch wurden irgendwelche „Beweise“ angeboten, dass hier irgendetwas ein Normalteiler sein sollte. In der ganzen Aufgabenstellung kommt aber überhaupt kein Normalteiler vor!

- Das ist eine Anwendung der Sylowsätze, die ich in ähnlicher Form sowohl in der Vorlesung gezeigt als auch als Übungsaufgabe gestellt hatte. Man sollte die Liste der möglichen Anzahlen von 3-Untergruppen aus dem 1. Sylowsatz zumindest soweit erstellt haben, dass man definitiv sieht, dass die folgenden Anzahlen eh zu groß sind, um noch der zweiten Bedingung genügen zu können.

Aufgabe 8.

- Hier sollte man den 2. Isomorphiesatz für Gruppen anwenden, um zumindest $(5\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})/(10\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}) \cong 5\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ zu erhalten. Das gab bereits die volle Punktzahl, auch wenn natürlich am Ende noch ein $5\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ganz toll gewesen wäre.

- Hier muss man nur wissen, was Konjugation einer Menge mit einem Element bedeutet, und in der symmetrischen Gruppe S_3 rechnen können.

Aufgabe 9.

- Teil 1 ist eine Anwendung des Satzes von Cauchy.

- Teil 2 ist eine Anwendung des Satzes von Cayley.

- Das sind gerade (bis auf Isomorphie) die beiden nicht-isomorphen Gruppen der Ordnung 4. (Es gibt noch viele weitere Argumente, zu zeigen, dass die beiden Gruppen nicht isomorph sein können: Die erste Gruppe ist zyklisch, die zweite ist nicht zyklisch (Was sollte denn ein Erzeuger sein? Alle Elemente haben Ordnung 2.) etc.) Die beiden Gruppen (bzw. dazu isomorphe Gruppen, wo man einen Isomorphismus sofort hinschreiben kann) kamen in der Vorlesung an einigen Stellen immer wieder vor.

- Zu berechnen war hier die Primfaktorzerlegung $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$. (5 ist ein Teiler, das sieht man sofort. Dann erhält man $385 = 5 \cdot 77$, und dass $77 = 7 \cdot 11$ ist, ist auch klar.) Damit kann man den kombinatorischen Teil der Sylowsätze anwenden, um herauszufinden, dass es nur eine 7-Sylowuntergruppe geben kann.

Aufgabe 10.

- Was eine zyklische Gruppe ist, sollte wirklich jeder wissen. Man muss natürlich auch wissen, dass es unendliche zyklische Gruppen, z.B. $(\mathbb{Z}, +)$, gibt und es für diese nicht ausreicht, nur positive oder nicht-negative Potenzen (bzw. bei additiv geschriebenen Gruppen: Summen) eines Elementes zu betrachten. (Was sollten sonst die Inversen sein?)

- Beim direkten Produkt zweier Gruppen sind die beiden Gruppen mit ihren Verknüpfungen zu benennen. Dann muss man natürlich die zugrundeliegende Menge für das direkte Produkt sowie die Verknüpfung von zwei Elementen aus dieser Menge angeben.

  (Sogar zwei „Trostpunkte" gab es, wenn jemand nur die Charakterisierung des direkten Produkts von zwei Untergruppen einer gegebenen Gruppe angegeben hat. (Das ist allerdings nur einmal so vorgekommen.))

Aufgabe 11.

- Beim ersten Teil war zu zeigen, dass die Mengen wirklich übereinstimmen (bzw. beides mit $1 + 4\mathbb{Z}$ übereinstimmt). Wenn explizit(!) gezeigt wurde, dass sich 17 und 41 um ein Vielfaches von 4 unterscheiden, gab es auch volle Punktzahl, ansonsten wurde ein halber Punkt abgezogen.

- Im zweiten Teil war zu zeigen, dass es keinen Isomorphismus geben kann. Also in der Form „Angenommen, wir haben einen Isomorphismus $f : G \to H$. Dann gilt: ...". Oft war auch gar nicht klar, dass nicht die Ordnungen der Gruppen selbst, sondern nur die Ordnungen ihrer Elemente, die davon verschieden sein können, angegeben waren. Außerdem ist das für alle Gruppen, deren Elemente solche Ordnungen haben, zu zeigen. Ein Gegenbeispiel reicht also nicht.

Aufgabe 12.

- Beim ersten Teil musste zumindest klar werden und explizit gesagt werden, dass 34 bereits ein Vielfaches von 17 ist. Ansonsten ist nicht klar, warum es außer $17\mathbb{Z}$ keine weiteren Elemente in der Gruppe $\langle 17, 34 \rangle$ gibt. (Es erschienen auch ab und zu recht „abenteuerliche" Rechnungen, wie man z.B. die 1 (oder auch die 2) als Summe ganzzahliger Vielfacher von 17 und 34 darstellen könnte, die aber (natürlich) alle falsch waren: $1 = (-2) \cdot 17 + 1 \cdot 34$ etc.)

- Hier waren die Nebenklassen wirklich als echte Restklassen darzustellen, also in den Formen $x + 6\mathbb{Z}$ mit $0 \leq x \leq 5$. Hier ist anzumerken: $-1 \notin \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ etc. (Trotzdem gab es einen Trostpunkt, wenn zumindest die Rechnungen richtig waren, aber auch das war nicht überall der Fall...)