Name

Matrikelnummer

KLAUSUR 2

Pro Aufgabe sind maximal vier Punkte zu erreichen.

Auf jedem Klausurblatt sind mindestens der Name oder die Matrikelnummer anzugeben, auf dem obersten Blatt beides.

Name

Matrikelnummer

Aufgabe 1. Richtig oder falsch?(1 Punkt pro richtige Antwort, -1 Punkt pro falsche Antwort, 0 Punkte pro Nicht-Antwort)

	Richtig	Falsch
• Die Menge der ganzen Zahlen bildet eine kommutative Gruppe bezüglich der Multiplikation.	☐	☐
• Besitzt eine Gruppe G einen Normalteiler, der nicht die Gruppe G selbst oder deren Untergruppe ist, die nur aus dem neutralen Element besteht, so ist G kommutativ. (Umformuliert heißt das: Ist eine Gruppe G nicht einfach, so ist sie kommutativ.)	☐	☐
• Sei $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$. Die Faktorgruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ von $(\mathbb{Z}, +)$ (den ganzen Zahlen mit der Addition) nach der Untergruppe $n\mathbb{Z} := \{n \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ hat genau n Elemente.	☐	☐
• Die Drehgruppe C_n eines regelmäßigen n -Ecks ist für $n \geq 3$ zyklisch.	☐	☐

Name

Matrikelnummer

Aufgabe 2. Definitionen.

(2 Punkte pro richtige Antwort)

- Definieren Sie, was die *Ordnung einer Gruppe* ist!
- Definieren Sie, was ein *Normalteiler* ist!

Name

Matrikelnummer

Aufgabe 3. Beweise.

(2 Punkte pro richtigen Beweis)

- Zeigen Sie, dass das Bild eines Gruppenhomomorphismus $f : G \rightarrow H$ eine Untergruppe der Gruppe H ist!
- Zeigen Sie, dass es in einer Gruppe zu jedem Element nur ein inverses Element geben kann!

Name

Matrikelnummer

Aufgabe 4. Rechnungen.

(2 Punkte pro richtige Teilaufgabe)

- Wir betrachten die symmetrische Gruppe S_4 mit der üblichen Hintereinanderschaltung von Permutationen als Verknüpfung. Berechnen Sie folgende Elemente:

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

- Gegeben sei ein regelmäßiges Dreieck, dessen Ecken wir gegen den Uhrzeigersinn durchnummerieren. Wir betrachten die Symmetriegruppe des Dreiecks (mit der üblichen Hintereinanderschaltung als Verknüpfung). Mit s bezeichnen wir hierin die Spiegelung an der Achse durch den Eckpunkt 1 und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite, mit d die Drehung des Dreiecks um seinen Mittelpunkt mit Drehwinkel 240° gegen den Uhrzeigersinn und mit t die Spiegelung an der Achse durch den Eckpunkt 2 und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite. Was sind die folgenden Hintereinanderschaltungen der Abbildungen (ggf. in Worten beschreiben)?

- $s \circ t$

- $d \circ s$

Name

Matrikelnummer

Aufgabe 5. Richtig oder falsch?

(1 Punkt pro richtige Antwort, -1 Punkt pro falsche Antwort, 0 Punkte pro Nicht-Antwort)

Richtig Falsch

- Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist auch die Menge der Linksnebenklassen

$$G/H := \{g * H \mid g \in G\}$$

mit der Verknüpfung

O O

$$(g_1 * H) \circ (g_2 * H) := (g_1 * g_2) * H$$

für alle $g_1, g_2 \in G$ eine Gruppe.

- Die Drehgruppe eines Tetraeders besitzt genau 8 Drehachsen. O O
- Die Drehgruppe eines regelmäßigen 27-Ecks besitzt ein Element der Ordnung 9. O O
- Ist G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Teilmenge, deren Mächtigkeit $|H|$ ein Teiler der Gruppenordnung $|G|$ ist, so ist H eine Untergruppe von G . O O

Name

Matrikelnummer

Aufgabe 6. Definitionen.

(2 Punkte pro richtige Antwort)

- Definieren Sie, was der *Stabilisator einer Gruppenoperation* ist!
- Definieren Sie, was eine *p-Sylowuntergruppe* einer Gruppe G ist, wobei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist!

Name

Matrikelnummer

Aufgabe 7. Beweise.

(2 Punkte pro richtigen Beweis)

- Gegeben seien eine endliche Gruppe $(G, *)$ und eine Untergruppe U von G . Zeigen Sie, dass dann die Mengen $g * U * g^{-1}$ für jedes $g \in G$ gleich viele Elemente besitzen!
- Gegeben sei eine Gruppe G der Ordnung $|G| = 10$. Zeigen Sie, dass G genau eine Untergruppe der Ordnung 5 und mindestens eine Untergruppe der Ordnung 2 hat!

Name

Matrikelnummer

Aufgabe 8. Rechnungen.

(2 Punkte pro richtige Teilaufgabe)

- Wir betrachten die ganzen Zahlen mit der Addition, also $(\mathbb{Z}, +)$, und die Untergruppen $5\mathbb{Z}$, $10\mathbb{Z}$ und $20\mathbb{Z}$. Berechnen Sie mit Hilfe der Isomorphiesätze für Gruppen, zu welcher Gruppe $(5\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})/(10\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})$ isomorph ist!
- Gegeben sei die symmetrische Gruppe S_3 . Berechnen Sie, welche Teilmenge von S_3 bei Konjugation der Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ mit $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ entsteht!

Name

Matrikelnummer

Aufgabe 9. Richtig oder falsch?

(1 Punkt pro richtige Antwort, -1 Punkt pro falsche Antwort, 0 Punkte pro Nicht-Antwort)

	Richtig	Falsch
• Jede Gruppe mit gerader Gruppenordnung, also mit $ G = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, besitzt ein Element der Ordnung 2.	☐	☐
• Es gibt bis auf Isomorphie nur eine Gruppe der Ordnung 4.	☐	☐
• Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Dann ist die Gruppe $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ isomorph zu der Gruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.	☐	☐
• Jede Gruppe der Ordnung 37 ist einfach.	☐	☐

Name

Matrikelnummer

Aufgabe 10. Definitionen.

(2 Punkte pro richtige Antwort)

- Definieren Sie, was eine *zyklische Gruppe* ist!
- Definieren Sie, was eine *Halbgruppe* ist!

Name

Matrikelnummer

Aufgabe 11. Beweise.

(2 Punkte pro richtigen Beweis)

- Gegeben seien eine Gruppe $(G, *)$ und eine Untergruppe $H \subseteq G$. Weiterhin seien $g_1, g_2 \in G$. Zeigen Sie, dass unter der Voraussetzung, dass die beiden Nebenklassen $g_1 * H$ und $g_2 * H$ übereinstimmen, automatisch $g_1^{-1} * g_2 \in H$ gelten muss, wobei hier g_1^{-1} das zu g_1 inverse Element bezeichnet!
- Gegeben sei die symmetrische Gruppe S_3 , also die Gruppe der Permutationen der Menge $\{1, 2, 3\}$. Zeigen Sie, dass die von dem Element

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$$

erzeugte Untergruppe ein Normalteiler in S_3 ist!

Hinweis: Beachten Sie die Gruppenordnungen und die Sylowsätze!

Name

Matrikelnummer

Aufgabe 12. Rechnungen.

(2 Punkte pro richtige Teilaufgabe)

- Gegeben seien die ganzen Zahlen mit der Addition, also $(\mathbb{Z}, +)$. Berechnen Sie die von 5 und 7 in $\mathbb{Z}$ erzeugte Untergruppe, also $\langle 5, 7 \rangle$!
- Gegeben sei die Faktorgruppe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ von $(\mathbb{Z}, +)$ nach der Untergruppe $4\mathbb{Z}$. Berechnen Sie, wobei das Ergebnis in der Form $x + 4\mathbb{Z}$ mit $0 \leq x \leq 3$ zu notieren ist:
 - $(0 + 4\mathbb{Z}) + (28 + 4\mathbb{Z}) + (-52 + 4\mathbb{Z})$
 - $(-25 + 4\mathbb{Z}) + (11 + 4\mathbb{Z}) + (7 + 4\mathbb{Z})$