ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗΣ

Τόμος 2ος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Επιστημονικός Υπεύθυνος: Πολυχρόνης Στράντζαλος

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΒΙΒΛΙΟΤΡΟΠΙΑ – ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2013

ΑΠΟ ΤΑ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΤΟΥ 1ου ΤΟΜΟΥ

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ –
ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ, ΠΛΑΙΣΙΟ, ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ**

Π. Στράντζαλος: *Ένα πλαίσιο για τη μαθηματική εκπαίδευση στο Λύκειο.*

**ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ –
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

Α. Στράντζαλος: *Η Ευκλείδεια απόδειξη του «νόμου ισορροπίας των μοχλών» από τον Αρχιμήδη.*

ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σ. Καίσαρης: *Η Υπερβολική Γεωμετρία του Επιπέδου, ως «Γεωμε τρία Klein», με Ευκλείδεια συλλογιστική.*

ΑΠΟ ΤΑ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΤΟΥ 3ου ΤΟΜΟΥ

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ –
ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ, ΠΛΑΙΣΙΟ, ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ**

Π. Στράντζαλος: *Τι είναι, επιτέλους, τα Μαθηματικά; - 2. Σχολιασμένες απόψεις γνωστών διανοητών για τα Μαθηματικά και τον μαθηματικό τρόπο σκέψης.*

**ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ –
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

Α. Αλεξέλλης: *Ένα μοντέλο για τις ανθρώπινες λοιμώξεις, με βάση τον «ρυθμό μεταβολής».*

ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Π. Στράντζαλος: *Η «συμμετρία» από μαθηματική, καλλιτεχνική και λεξικογραφική σκοπιά.*

ISBN

Η ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΗ ΕΝΝΟΙΑ “ΔΙΚΤΥΟ” ΩΣ ΠΡΟΪΟΝ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ RIEMANN

του

Αντώνη Μανούσου

Διδάκτορα του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών -
Υφηγητή του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου του Bielefeld

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ:

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η θεμελίωση της έννοιας του “δικτύου” στη Γενική Τοπολογία από τους Moore και Smith [5] [1], βασισμένη σε μια ιδέα του Moore [4], είναι ένα εύγλωττο παράδειγμα, για το πώς η κριτική θεώρηση των βασικών, εν χρήσει, εννοιών των Μαθηματικών μπορεί να οδηγήσει σε καινούργιες ιδέες και έννοιες, ενίοτε και νέες θεωρίες, οι οποίες ενοποιούν και επεκτείνουν προϋπάρχουσες σε ένα ευρύτερο λειτουργικό πλαίσιο, όπου περιθωριοποιούνται περιοριστικές εξειδικεύσεις[2]. Σημειώνουμε με έμφαση ότι: ***στην εργασία*** [4] ***αναφέρεται ρητά από την αρχή ότι ο στόχος της ήταν ακριβώς η λειτουργική υπέρβαση των ακολουθιών, με αφορμή τον πρώτο εντοπισμό της ανεπάρκειάς τους στο ολοκλήρωμα Riemann.***

Το κείμενο που ακολουθεί δεν προϋποθέτει παρά μόνο βασικές γνώσεις Μαθηματικής Ανάλυσης. Η βιβλιογραφία στο τέλος παραπέμπει τον αναγνώστη στις πρωτότυπες εργασίες, ώστε να μπορεί να διαπιστώσει ο ίδιος το πώς και το γιατί θεμελιώθηκε η έννοια «δίκτυο», αλλά και σε βιβλία Γενικής Τοπολογίας, ώστε να μπορεί να ανατρέξει σε κάποιες λεπτομέρειες που αφορούν τα «δίκτυα» και την επίδρασή τους.

Προκρίναμε μια ιστορικο - φορμαλιστική προσέγγιση του θέματος, διότι πιστεύουμε ότι στην Επιμόρφωση των Εκπαιδευτικών δεν αρκούν οι διατυπώσεις ορισμών και συμπερασμάτων, αλλά είναι απαραίτητες ιστορικές επισημάνσεις και, μάλιστα, έτσι παρουσιασμένες, ώστε να

---

[1] Οι αριθμοί σε αγκύλες παραπέμπουν στη βιβλιογραφία στο τέλος του κειμένου.

[2] Εν προκειμένω, η έννοια “δίκτυο” λειτουργεί πλήρως, π.χ., και πέρα από τους μετρικούς χώρους, όπου οι ακολουθίες αρκούν (πρβλ. την υποσημείωση 4), ενώ δεν αρκούν στο ολοκλήρωμα Riemann.

προβάλλονται και οι αιτίες που προκάλεσαν το, εκάστοτε σχολιαζόμενο, “σπάσιμο ενός φράγματος” προς καινούργια μαθηματικά μονοπάτια.

1. ΠΩΣ ΤΑ “ΔΙΚΤΥΑ” ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΦΥΣΙΟΛΟΓΙΚΑ ΑΠΟ ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ RIEMANN

Η Θεωρία Ολοκλήρωσης του Riemann είναι ένα από τα βασικά κεφάλαια της Μαθηματικής Ανάλυσης, όπου, σε ό,τι αφορά τις συναρτήσεις που ορίζονται σε υποσύνολα του $\mathbb{R}$, εργαζόμαστε με ακολουθίες. ***Από που προκύπτουν, λοιπόν, τα δίκτυα και, μάλιστα, εντελώς φυσιολογικά;***

Πριν απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, για λόγους στοιχειώδους πληρότητας του κειμένου[3], ας θυμηθούμε τι είναι το ολοκλήρωμα Riemann μιας (φραγμένης) συνάρτησης $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, ορισμένης σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Ξεκινάμε με την έννοια της ***διαμέρισης*** ενός κλειστού διαστήματος $[a,b]$: όπως λέει και η λέξη, μια διαμέριση του $[a,b]$ είναι ένα ***πεπερασμένο σύνολο από αριθμούς*** που ικανοποιούν τις σχέσεις: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. Θα συμβολίζουμε με **P** το σύνολο των διαμερίσεων του $[a,b]$.

Το ***κάτω άθροισμα Riemann***, L_Δ, της f ως προς μια διαμέριση $\Delta\in\mathbf{P}$ ορίζεται από τον τύπο:

$$L_\Delta=\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot(x_i-x_{i-1}),\ \text{όπου}\ m_i=\inf\{f(x)|x\in[x_{i-1},x_i]\}.$$

Το αντίστοιχο ***άνω άθροισμα Riemann*** ορίζεται από τον τύπο:

$$U_\Delta=\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot(x_i-x_{i-1})\ \text{όπου}\ M_i=\sup\{f(x)|\,x\in[x_{i-1},x_i]\}.$$

Λέμε ότι η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ***ολοκληρώσιμη κατά Riemann***, αν τα όρια των άνω και κάτω αθροισμάτων Riemann υπάρχουν, καθώς οι διαμερίσεις γίνονται “λεπτότερες” και είναι ίσα.

Διαισθητικά μια διαμέριση γίνεται ***λεπτότερη***, αν της προσθέσουμε σημεία. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, μια διαμέριση $\Delta_2\in\mathbf{P}$ λέγεται ***λεπτότερη*** μιας διαμέρισης $\Delta_1\in\mathbf{P}$, συμβολικά $\Delta_1\le\Delta_2$, αν η Δ_2 περιέχει ως σημειοσύνολο τη Δ_1, δηλαδή ισχύει: $\Delta_1\subseteq\Delta_2$.

---

[3] Στις σελίδες 65-116 του παρόντος τόμου, περιγράφεται η διαχρονική εξέλιξη του ολοκληρώματος από τον Αρχιμήδη μέχρι και τις αρχές του 20^ου αιώνα, επομένως και του ολοκληρώματος Riemann.

Επισημαίνουμε ότι για δύο διαμερίσεις $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathbf{P}$ ***δεν είναι απαραίτητο να αληθεύει μια από τις σχέσεις*** $\Delta_1 \leq \Delta_2$, $\Delta_1 \geq \Delta_2$, όπως συμβαίνει, π.χ., για τις διαμερίσεις $\Delta_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ και $\Delta_2 = \{0, \frac{1}{3}, 1\}$ του διαστήματος [0,1]. Αυτό που πραγματικά ισχύει είναι ότι για κάθε δύο διαμερίσεις $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathbf{P}$ υπάρχει μια τρίτη διαμέριση $\Delta_3 \in \mathbf{P}$ τέτοια, ώστε να ισχύει $\Delta_1 \subseteq \Delta_3$ και $\Delta_2 \subseteq \Delta_3$, π.χ., εκείνη που προκύπτει από την ένωση των σημείων των δύο διαμερίσεων.

Έχοντας υπ' όψιν τα αμέσως προηγούμενα, μπορούμε να πούμε ότι: ***η συνάρτηση*** $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ***είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann, αν υπάρχει ένας αριθμός*** c ***έτσι, ώστε για κάθε*** $\varepsilon > 0$ ***να υπάρχει μια διαμέριση*** $\Delta_0 \in \mathbf{P}$ ***τέτοια, ώστε να ισχύει*** $|L_\Delta - c| < \varepsilon$ ***και*** $|U_\Delta - c| < \varepsilon$ ***για κάθε*** $\Delta \geq \Delta_0$. Αυτή η διατύπωση θυμίζει τον γνωστό ορισμό ισοσυγκλινουσών ακολουθιών αριθμών (: με κοινό όριο) και αποτελεί τη γέφυρα για το πέρασμα από τις ακολουθίες προς τα "δίκτυα", τα οποία ενοποιούν τους διαφορετικούς αλλά "συγγενείς" ορισμούς των ορίων.

Ας δούμε, όμως, πρώτα τι είναι "δίκτυο", μια έννοια, για την οποία, όπως και για μια ακολουθία αριθμών, χρειαζόμαστε ένα σύνολο δεικτών με κάποιες ιδιότητες, που δεν είναι άλλες από τις ιδιότητες των διαμερίσεων που περιγράψαμε προηγουμένως.

Ορισμός: Ένα μη κενό σύνολο $\mathbf{P}$ εφοδιασμένο με μια διμελή σχέση, που θα συμβολίζουμε με $\leq$, λέγεται ***κατευθυνόμενο*** με κατεύθυνση τη σχέση αυτή, αν πληρούνται οι ακόλουθες τρεις συνθήκες:

(1) $x \leq x$ για κάθε $x \in \mathbf{P}$.

(2) Αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε ισχύει $x \leq z$ για κάθε $x, y, z \in \mathbf{P}$.

(3) Για κάθε $x, y \in \mathbf{P}$ υπάρχει $z \in \mathbf{P}$ με $x \leq z$ και $y \leq z$.

Παραδείγματα κατευθυνόμενων συνόλων: (α) το σύνολο των φυσικών αριθμών (που λειτουργεί στις ακολουθίες) εφοδιασμένο με τη συνήθη έννοια "$\leq$", **(β)** το σύνολο των διαμερίσεων $\mathbf{P}$ εφοδιασμένο με τη διμελή σχέση που ορίζεται ως εξής: $\Delta_1 \leq \Delta_2$, αν $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$.

Μια ακολουθία ορίζεται ως μια συνάρτηση $p: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ και συμβολίζεται με $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ανάλογα ισχύουν και για ένα "δίκτυο":

Ορισμός: Ένα ***δίκτυο*** στο μη κενό σύνολο X είναι μια συνάρτηση $p:\mathbf{P}\to X$, όπου $\mathbf{P}$ είναι ένα κατευθυνόμενο σύνολο, και συμβολίζεται με $(p(i)=x_i)_{i\in\mathbf{P}}$. Τα $i\in\mathbf{P}$ λέγονται ***δείκτες***.

Παράδειγμα: Τα κάτω και τα άνω αθροίσματα Riemann μιας συνάρτησης $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ αποτελούν δίκτυο με $X=\mathbb{R}$ και $\mathbf{P}$ το σύνολο των διαμερίσεων του $[a,b]$.

Κρίσιμη επισήμανση: Το προηγούμενο σύνολο, $\mathbf{P}$, ***δεν είναι ούτε καν αριθμήσιμο!*** Επομένως, ***οι ακολουθίες δεν αρκούν για την όποια σύγκλιση ορίζεται μέσω του συνόλου αυτού***, σε αντίθεση με το σύνολο, $\mathbb{N}$, το οποίο εμπλέκεται στις συγκλίσεις ακολουθιών. ***Η διαπίστωση αυτή κατέστησε αναγκαία την εισαγωγή των δικτύων και της σύγκλισης που ορίζουν.***

Και τι σημαίνει ένα δίκτυο "$(x_i)_{i\in\mathbf{P}}$ συγκλίνει κάπου"; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, ας αναλογισθούμε ότι μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε ένα αριθμό x, αν για κάθε ανοιχτή περιοχή U του x υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $x_n\in U$ για κάθε n με $n_0\le n$. Ανάλογα: ***το δίκτυο*** $(x_i)_{i\in\mathbf{P}}$ ***συγκλίνει*** στο $x\in X$, συμβολικά $x_i\to x$, αν για κάθε ανοιχτή περιοχή U του x υπάρχει δείκτης $i_0\in\mathbf{P}$ τέτοιος, ώστε να ισχύει $x_i\in U$ για κάθε i με $i_0\le i$. Με αυτή την έννοια, μπορούμε να πούμε ότι ***μια συνάρτηση*** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ***είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann αν υπάρχει*** $c\in\mathbb{R}$ ***έτσι, ώστε να ισχύει:*** $L_\Delta\to c$ ***και*** $U_\Delta\to c$.

2. ΓΙΑΤΙ ΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΑΠΟΔΙΔΟΥΝ ΓΕΝΙΚΑ ΤΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Επειδή μια ακολουθία, ή ένα δίκτυο, συγκλίνει σε ένα σημείο, αν για κάθε επιλογή ανοιχτής περιοχής του η ακολουθία, ή το δίκτυο, βρίσκεται ***"τελικά"*** μέσα στην περιοχή αυτή, ***οι ανοιχτές περιοχές των σημείων είναι άρρηκτα συνυφασμένες με τα δίκτυα και τη σύγκλισή τους***.

Τα δίκτυα περιγράφουν το «τι σημαίνει σύγκλιση» σε έναν χώρο X, επειδή ***υπάρχει μια γενική έννοια δικτύου, άμεσα συνδεδεμένη με τις ανοιχτές περιοχές ενός σημείου και τη "σύγκλιση" που ορίζουν:*** έστω $x\in X$ και $\mathbf{U}_x$ η οικογένεια ***όλων των ανοικτών περιοχών του***. Αποδεικνύεται εύκολα ότι στο $\mathbf{U}_x$ ορίζεται μια ***"φυσιολογική για τη σύγκλιση"*** κατεύθυνση ως εξής: $U_1\le U_2$, αν $U_2\subseteq U_1$, όπου $U_1,U_2\in\mathbf{U}_x$. Τώρα, αν επιλέξουμε ένα σημείο $x_U \in U$ από κάθε $U \in \mathbf{U}_x$, προκύπτει το δίκτυο $(x_U)_{U \in \mathbf{U}_x}$ που συγκλίνει στο x: για κάθε $V \in \mathbf{U}_x$ ***ο δείκτης*** $U_0 = V$ ***έχει την ιδιότητα:*** $x_U \in U \subseteq U_0 = V$ για κάθε U με $V = U_0 \leq U \Leftrightarrow U \subseteq V$ [4].

Μπορούν τα δίκτυα να περιγράψουν γενικά το τι σημαίνει σύγκλιση; Θα μπορούν, αν οι "δομικές συναρτήσεις" της θεωρίας που μελετάμε τους "συμπεριφέρονται καλά". Και ποιες είναι οι δομικές συναρτήσεις στη θεωρία της σύγκλισης; ***Γενικότερα: ποιες είναι οι δομικές συναρτήσεις σε μια μαθηματική θεωρία; Είναι αυτές που "διατηρούν τη δομή" του υποκείμενου χώρου***[5] ***που μας ενδιαφέρει κάθε φορά.***

Για παράδειγμα, στη θεωρία των γραμμικών χώρων η δομή εκφράζεται από δύο πράξεις, την πρόσθεση διανυσμάτων και τον πολλαπλασιασμό ενός αριθμού με ένα διάνυσμα. Επομένως, οι δομικές απεικονίσεις ενός γραμμικού χώρου είναι εκείνες που διατηρούν αυτές τις πράξεις και ονομάζονται γραμμικές απεικονίσεις, δηλαδή αυτές για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ και $f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x})$.

• Στη βασική θεωρία της σύγκλισης ***η δομή εκφράζεται από την έννοια του συμβόλου*** $x_i \to x$ ***για ένα δίκτυο ή μια ακολουθία***. Επομένως***, οι δομικές απεικονίσεις αυτής της θεωρίας θα είναι εκείνες που ικανοποιούν τη συνεπαγωγή*** $x_i \to x \Rightarrow f(x_i) \to f(x)$, δηλαδή οι ***συνεχείς απεικονίσεις***.

Από την άλλη μεριά, οι συνεχείς απεικονίσεις ορίζονται ***και*** μέσω ανοιχτών περιοχών των σημείων του χώρου ως εξής: ***η απεικόνιση*** f ***λέγεται συνεχής σε ένα σημείο*** x***, αν για κάθε ανοιχτή περιοχή*** V ***του*** $f(x)$ ***υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή*** U ***του*** x ***με*** $f(U) \subseteq V$.

Το επόμενο Θεώρημα ενοποιεί ***στη γλώσσα των δικτύων*** τους δύο προηγούμενους ορισμούς, συσχετίζοντάς τους οργανικά:

Θεώρημα: *Η απεικόνιση* $f: X \to Y$ *είναι συνεχής στο* $x \in X$*, αν το δίκτυο* $\left((f(x_i)\right)_{i \in \mathbf{P}}$ *συγκλίνει στο* $f(x)$*, όποτε το* $(x_i)_{i \in \mathbf{P}}$ *συγκλίνει στο* x.

---

[4] Αν η τοπολογία εκφράζεται από τη μετρική d (πρβλ. τις σελίδες 165-167 του παρόντος τόμου), ***κάθε σημείο του*** x ***έχει ως "βάση περιοχών" τις "ανοικτές σφαίρες"*** $S(x, \frac{1}{n}) = \{y \in X \mid d(x,y) < \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή έχει ***αριθμήσιμες το πλήθος*** περιοχές με την ιδιότητα: ***για οποιοδήποτε περιοχή του*** x ***υπάρχει μια "ανοικτή σφαίρα" που περιέχεται σε αυτήν***. Γι' αυτό ***αρκούν οι ακολουθίες για τη σύγκλιση στους μετρικούς χώρους.***

[5] Πρβλ. την "άποψη του Klein" στις σελίδες 206-210 του παρόντος τόμου.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η απεικόνιση f είναι συνεχής στο $x \in X$ και ότι το $(x_i)_{i\in \mathbf{P}}$ είναι ένα δίκτυο του X που συγκλίνει στο x. Θα δείξουμε ότι το δίκτυο $\left((f(x_i)\right)_{i\in \mathbf{P}}$ συγκλίνει στο $f(x)$:

Έστω $V \subset Y$ μια ανοιχτή περιοχή του $f(x)$. Αφού η f είναι συνεχής, υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή U του x με $f(U) \subseteq V$. Το δίκτυο $(x_i)_{i\in \mathbf{P}}$ συγκλίνει στο x, άρα υπάρχει ένας δείκτης $i_0 \in \mathbf{P}$ τέτοιος, ώστε να ισχύει $x_i \in U$ για κάθε i με $i_0 \le i$. Επομένως, $f(x_i) \in f(U) \subseteq V$ για κάθε i με $i_0 \le i$, απ' όπου συνάγεται ότι $f(x_i) \to f(x)$.

Για το αντίστροφο θα εργασθούμε με απαγωγή σε άτοπο: Έστω ότι ***οποτεδήποτε ένα δίκτυο*** $(x_i)_{i\in \mathbf{P}}$ ***συγκλίνει στο*** x***, το δίκτυο*** $\left((f(x_i)\right)_{i\in \mathbf{P}}$ ***συγκλίνει στο*** $f(x)$ και, ταυτόχρονα, η απεικόνιση f δεν είναι συνεχής στο x. Το τελευταίο σημαίνει ότι υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή V του $f(x)$ τέτοια, ώστε για κάθε ανοιχτή περιοχή U του x δεν ισχύει $f(U) \subseteq V$. Τότε, για κάθε U θα υπάρχει $x_U \in U$ με $f(x_U) \notin V$. Αλλά, σύμφωνα με το 3.1, ***το δίκτυο*** $(x_U)_{u\in U}$ ***συγκλίνει στο*** x, ***ενώ*** έχουμε υποθέσει ότι ***ισχύει*** $f(x_U) \notin V$ ***για κάθε δείκτη*** U, ***δηλαδή*** ότι ***το δίκτυο*** $\left(f(x_U)\right)_{u\in U}$ ***δεν συγκλίνει στο*** $f(x)$, που αντιβαίνει στην αρχική υπόθεση για το αντίστροφο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] G. Birkhoff, *Moore-Smith convergence in general topology*, Annals of Mathematics (2), Volume **38** (1937), pp. 39-56.

[2] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[3] J.L. Kelley, *Convergence in Topology*, Duke Math. Journal., Volume **17** (1950), pp. 277-283.

[4] E.H. Moore, *Definition of limit in general integral analysis*, Proc. National Academy Science, Volume **1** (1915), pp. 628-632.

[5] E.H. Moore - H.L. Smith, *A general theory of limits*, Amer. Journal Math., Volume **44** (1922), pp. 102-121.

[6] J.W. Tukey, *Convergence and Uniformity in Topology*, Princeton University Press, 1940.

[7] S. Willard, *General Topology*, Dover, Mineola, New York, 2004.