Αντωνίου Κ. Μανούσου

Μαθηματικού

ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ D–ΕΥΣΤΑΘΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ

Διδακτορική Διατριβή

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ – ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΘΗΝΑ 1993

ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ D–ΕΥΣΤΑΘΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ

Αντώνιος Κ. Μανούσος

ΑΘΗΝΑ 1993

Στη μνήμη του πατέρα μου

Κώστα,

και στη μητέρα μου

Δήμητρα

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: Π. Στράντζαλος

Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών

του

Πανεπιστημίου Αθηνών

Σύμφωνα με το νόμο η έγκριση της διδακτορικής διατριβής από το Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών δεν σημαίνει απαραίτητα και αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα.

Με την ολοκλήρωση της διατριβής αυτής, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών Π. Στράντζαλο, ο οποίος με εισήγαγε στον κλάδο της Δυναμικής Τοπολογίας, μου πρότεινε το θέμα της διατριβής και συνέβαλε στην ουσιαστική διαμόρφωση μου ως μαθηματικού με συνεχείς παραγωγικές συζητήσεις καθ' όλη τη διάρκεια της διατριβής.

Ευχαριστώ ακόμα τον Αναπληρωτή Καθηγητή Α. Κυριαζή και τον Επίκουρο Καθηγητή Ι. Αραχωβίτη που μαζί με τον κ. Στράντζαλο αποτέλεσαν την τριμελή Συμβουλευτική Επιτροπή καθώς και τους Καθηγητές του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών Σ. Ανδρεαδάκη και Σ. Παπασταυρίδη, όπως και τον Αναπληρωτή Καθηγητή Α. Τσαρπαλιά και τον Επίκουρο Καθηγητή Γ. Καλογερόπουλο για το ενδιαφέρον τους για την διατριβή αυτή, ως μέλη της επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον συνάδελφο κ. Δ. Μητσούδη για την πολύτιμη βοήθεια του στην επεξεργασία της παρούσας μορφής της διατριβής.

Σεπτέμβρης 1993

Α.Κ. Μανούσος

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Το εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο περιλαμβάνει τρείς ενότητες:

Η πρώτη περιέχει μια σύντομη αναφορά στη Θεωρία των Τοπολογικών Δράσεων και ειδικότερα στις βασικές ιδιότητες των οριακών συνόλων, που θα αποτελέσουν και το κυριότερο μεθοδολογικό εργαλείο στα πλαίσια αυτής της διατριβής.

Η δεύτερη ενότητα αναφέρεται στα μέχρι τώρα αποτελέσματα της μελέτης των D–ευσταθών Δυναμικών Συστημάτων, ενώ στη τρίτη αναλύεται ο προβληματισμός και διατυπώνονται τα κυριότερα αποτελέσματα της διατριβής.

1.1 Γενικά για τις τοπολογικές δράσεις

Ορισμός 1.1 *Μια δράση είναι μια τριάδα (G, X, φ) που αποτελείται από μια τοπολογική ομάδα G, ένα τοπολογικό χώρο X και μια συνεχή απεικόνιση $\varphi : G \times X \to X$ τέτοια, ώστε*

$$(\alpha) \quad \varphi(e, x) = x \quad \text{και}$$

$$(\beta) \quad \varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1 \cdot g_2, x)$$

για κάθε $x \in X$, g_1 και $g_2 \in G$, όπου το e συμβολίζει το μοναδιαίο στοιχείο της G.

Για συντομία από εδώ και στο εξής θα γράφουμε gx αντί για $\varphi(g, x)$. Οι επόμενες έννοιες και προτάσεις είναι βασικές και υπάρχουν σε κάθε βιβλίο που αναφέρεται στις δράσεις, π.χ., στο [2]. Εάν πρόκειται για ειδική πρόταση, θα δίνεται ακριβή βιβλιογραφική υπόδειξη.

Ορισμός 1.2 *Το σύνολο* $G(x) = \{gx : g \in G\}$ *λέγεται τροχιά του* x.

Πρόταση 1.3 *Δύο τροχιές είτε είναι ξένες είτε συμπίπτουν.*

Ορισμός 1.4 *Το σύνολο* $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ *λέγεται ομάδα ισοτροπίας του* x.

Πρόταση 1.5

1. *Η* G_x *είναι μια κλειστή υποομάδα της* G.
2. $G_{gx} = g\, G_x\, g^{-1}$.
3. *Η απεικόνιση* $\varphi_x : G/G_x \to G(x)$, *με* $\varphi_x(g\, G_x) = gx$ *είναι "1-1", "επί" και συνεχής, αλλά όχι απαραίτητα ομοιομορφισμός.*

Ορισμός 1.6 *Ο χώρος πηλίκο* $X/\sim$, *όπου* $x \sim y \Leftrightarrow x \in G(y)$ *λέγεται χώρος των τροχιών και συμβολίζεται με* G/X.

Πρόταση 1.7 *Η φυσική προβολή* $p : X \to G/X$ *είναι ανοικτή απεικόνιση.*

Ορισμός 1.8 *Έστω* $H(X)$ *το σύνολο όλων των ομοιομορφισμών του* X, *εφοδιασμένο με τη συμπαγή–ανοικτή τοπολογία. Η απεικόνιση* $\omega : H(X) \times X \to X$ *με* $\omega(f, x) = f(x)$ *λέγεται απεικόνιση εκτίμησης (evaluation map).*

Πρόταση 1.9 *([7]) Αν ο* X *είναι τοπικά συμπαγής, τότε:*

1. *Η απεικόνιση εκτίμησης* ω *είναι συνεχής και η συμπαγής–ανοικτή τοπολογία στο* $H(X)$ *είναι η μικρότερη τοπολογία, ως πρός την οποία η* ω *είναι συνεχής.*
2. *Ο πολλαπλασιασμός* $H(X) \times H(X) \to H(X)$, $(f, g) \mapsto f \circ g$ *στην ομάδα* $H(X)$ *είναι συνεχής.*
3. *Αν ο* X *είναι, επιπλέον, τοπικά συνεκτικός, τότε η απεικόνιση* $H(X) \to H(X), f \mapsto f^{-1}$, *είναι επίσης συνεχής. (Το συμπέρασμα αυτό δεν ισχύει σε όχι τοπικά συνεκτικούς χώρους).*

Ορισμός 1.10 *Μια δράση λέγεται πιστή (effective), αν* $gx = x,\ \forall\, x \in X \Rightarrow g = e$ *ή ισοδύναμα, αν η απεικόνιση* $\phi : G \to H(X)$, *με* $\phi(g)(x) = gx$ *είναι "1-1".*

Πρόταση 1.11 *Αν ο* X *είναι τοπικά συμπαγής τότε η απεικόνιση* ϕ *είναι συνεχής και αντίστροφα, αν* $\phi : G \to H(X)$ *είναι ένας συνεχής μορφισμός (ως προς τη συμπαγή–ανοικτή τοπολογία) τότε η δράση* (G, X, φ) *με* $\varphi(g, x) = \phi(g)(x)$ *είναι συνεχής.*

Ορισμός 1.12 *Μία ισομεταβλητή απεικόνιση (equivariant map) από μια δράση* (G_1, X_1, φ_1) *σε μια δράση* (G_2, X_2, φ_2) *είναι ένα ζευγάρι* (h, f), *όπου* $h : G_1 \to G_2$ *είναι ένας συνεχής μορφισμός ομάδων και* $f : X_1 \to X_2$ *είναι μια συνεχής απεικόνιση έτσι, ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό*

$$\begin{array}{ccccc} G_1 & \times & X_1 & \overset{\varphi_1}{\to} & X_1 \\ h \times f & \downarrow & & & \downarrow f \\ G_2 & \times & X_2 & \overset{\varphi_2}{\to} & X_2 \end{array}$$

Πρόταση 1.13 *Αν ο* X *είναι τοπικά συμπαγής χώρος, τότε η* $(\phi, id_X) : (G, X, \varphi) \to (\phi(G), X, \omega)$ *είναι μια ισομεταβλητή απεικόνιση.*

Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραπάνω πρόταση ανάγει μια δράση στη "φυσική" δράση της $\phi(G) < H(X)$ επί του X (μέσω της απεικόνισης εκτίμησης). Έτσι, η θεωρία των πιστών δράσεων (G, X) σε τοπικά συμπαγείς χώρους εντάσσεται στην άποψη του Klein για τις "Γεωμετρίες" $(\phi(G), X)$ με συνέχεια.

Είναι, επίσης, αξιοσημείωτο ότι, ενώ μέχρι τα τέλη της δεκαετίας του '60 είχαμε μια σχετικά αργή ανάπτυξη της θεωρίας των (τοπολογικών) Δράσεων, από την αρχή της δεκαετίας του '70 και μετά έχουμε μια ραγδαία ανάπτυξη της θεωρίας αυτής. Σε αυτό συνέβαλε και η χρήση των οριακών συνόλων, οι ορισμοί (που προέρχονται από τους αντίστοιχους ορισμούς των Δυναμικών Συστημάτων) και οι βασικές ιδιότητες των οποίων ακολουθούν.

Ορισμοί 1.14 *Τα οριακά σύνολα, τα επεκτεταμένα οριακά σύνολα και οι επεκτάσεις των τροχιών ορίζονται αντίστοιχα:*

1. $L(x) = \{y \in X : \exists\, g_i \to \infty \quad \text{με } g_i x \to y\}$
2. $J(x) = \{y \in X : \exists\, g_i \to \infty \quad \text{και } x_i \to x \quad \text{με } g_i x_i \to y\}$
3. $D(x) = \{y \in X : \exists\, g_i \in G \quad \text{και } x_i \to x \quad \text{με } g_i x_i \to y\} = G(x) \cup J(x).$

Εδώ $g_i \to \infty$ *σημαίνει ότι το δίκτυο* $\{g_i\, , \;\; i \in I\}$ *δεν έχει συγκλίνοντα υποδίκτυα στην* G. *Προφανώς:* $L(x) \subseteq J(x) \subseteq D(x)$.

Πρόταση 1.15 *Αν η ομάδα* G *είναι τοπικά συμπαγής, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. $L(x)=\bigcap\{\overline{(G\setminus K)x} : K$ *συμπαγές* $\subseteq G\}$

2. $J(x)=\bigcap\{\overline{(G\setminus K)V} : K$ *συμπαγές* $\subseteq G,\ V$ *περιοχή του* $x\}$

3. $D(x)=\bigcap\{\overline{GV} :\ V$ *περιοχή του* $x\}$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το (1). Τα (2) και (3) αποδεικνύονται με όμοιο τρόπο.

Έστω $y \in L(x)$. Υπάρχει $g_i \to \infty$ έτσι, ώστε $g_i x \to y$. Δοθέντος ενός συμπαγούς $K \subseteq G$, υπάρχει i_0 έτσι, ώστε $\forall\ i \geq i_0$ να ισχύει $g_i \notin K$, οπότε $y \in \overline{(G\setminus K)x}$ και $L(x) \subseteq \bigcap\{\overline{(G\setminus K)x} : K$ συμπαγές $\subseteq G\}$.

Αντίστροφα, αν $y \in \bigcap\{\overline{(G\setminus K)x} : K$ συμπαγές $\subseteq G\}$, τότε το σύνολο $D = \{(U,K) : U$ περιοχή του $y,\ K$ συμπαγές στην $G\}$ ορίζει μια κατεύθυνση "$\leq$": $(U_1,K_1) \leq (U_2,K_2) \Leftrightarrow U_2 \subseteq U_1$ και $K_1 \subseteq K_2$. Για κάθε $\lambda=(U,K) \in D$, $\exists\, g_\lambda$ έτσι, ώστε $g_\lambda x \in U$ και $g_\lambda \notin K$. Από την τοπική συμπάγεια της G είναι προφανές ότι $g_\lambda \to \infty$, ενώ από τον τρόπο επιλογής των g_λ έπεται ότι, $g_\lambda x \to y$. □

Πόρισμα 1.16 *Τα L–, J– και D–σύνολα είναι κλειστά και αμετάβλητα (: περιέχουν πλήρεις τροχιές).*

Παρατήρηση 1.17 *Αν η G δεν είναι τοπικά συμπαγής, τα L– και J–σύνολα δεν είναι απαραιτήτως κλειστά.*

Αντιπαράδειγμα: στη δράση (Q,R,φ) της προσθετικής ομάδας των ρητών αριθμών επί του R μέ $\varphi(q,x)=x+q$, ισχύει $L(x)=\{x+\alpha : \alpha \in R\setminus Q\}$.

Πολλοί συγγραφείς (πρβλ., π.χ., [33], [24]) ορίζουν τα οριακά σύνολα όπως στην Πρόταση 1.15, θεωρώντας (λανθασμένα) την πρόταση αυτή και τον Ορισμό 1.14 ως ισοδύναμα, ανεξάρτητα από την τοπική συμπάγεια της G (πρβλ. [24, p. 84]).

Πρόταση 1.18 *1. Η τροχιά $G(x)$, είναι κλειστή, αν και μόνο αν το $L(x)$ είναι υποσύνολο της $G(x)$.*

2. Ο χώρος των τροχιών, G/X, είναι Hausdorff, αν και μόνο αν το $J(x)$ είναι υποσύνολο της $G(x)$ για κάθε $x \in X$.

3. Έστω ότι η ομάδα ισοτροπίας G_x του x είναι συμπαγής και η G είναι τοπικά συμπαγής. Τότε η απεικόνιση $\varphi_x : G/G_x \to G(x)$, με $\varphi_x(gG_x) = gx$, είναι ομοιομορφισμός, αν και μόνο αν $x \notin L(x)$.

4. Έστω ότι η G είναι τοπικά συμπαγής. Αν $x_i \to x$, $y_i \in J(x_i)$ και $y_i \to y$, τότε $y \in J(x)$.

Απόδειξη. Το μόνο που ίσως χρειάζεται κάποιο σχολιασμό είναι η διαγώνια διαδικασία που είναι αναγκαία για το (4) (πρβλ. [2]).

Στο σύνολο $D = \{(U, K, V) : U$ περιοχή του x, K συμπαγές $\subseteq G$, V περιοχή του $y\}$ ορίζουμε την κατεύθυνση "$\leq$" ως εξής: $(U_1, K_1, V_1) \leq (U_2, K_2, V_2) \Leftrightarrow U_2 \subseteq U_1$, $K_1 \subseteq K_2$ και $V_2 \subseteq V_1$. Από την υπόθεση, για κάθε $\lambda = (U, K, V) \in D$ υπάρχει $(x_\lambda, g_\lambda) \in X \times G$ έτσι, ώστε $x_\lambda \in U$, $g_\lambda \notin K$ και $g_\lambda x_\lambda \in V$. Άρα $x_\lambda \overset{\lambda \in D}{\to} x$, $g_\lambda x_\lambda \overset{\lambda \in D}{\to} y$ και, επειδή $g_\lambda \notin K$, συμπεραίνουμε ότι $g_i \notin K$, $\forall i \geq \lambda$. Από αυτό και την τοπική συμπάγεια της G προκύπτει $g_\lambda \overset{\lambda \in D}{\to} \infty$. □

Ορισμός 1.19 *Μια δράση λέγεται γνήσια (proper), αν η απεικόνιση $\phi : G \times X \to X \times X$ με $\phi(g, x) = (x, gx)$ είναι γνήσια (proper) [13, Ch. 3, 4.1].*

Πρόταση 1.20 *([44]) Μια δράση είναι γνήσια, αν και μόνο αν ισχύει $J(x) = \emptyset$ για κάθε $x \in X$. (Οι Cartan–δράσεις ορίστηκαν ανάλογα στην [20]).*

Ορισμός 1.21 *Μια δράση λέγεται D–ευσταθής, αν ισχύει $D(x) = \overline{G(x)}$ για κάθε $x \in X$.*

Στην [38] επισημαίνεται ότι τα οριακά σύνολα L– και J– οδηγούν σ' ένα είδος "ιεραρχίας" των δράσεων ως εξής: Στις δράσεις συμπαγών ομάδων τα L– και J–σύνολα είναι κενά, κατά τετριμμένο τρόπο. Οι γνήσιες δράσεις χαρακτηρίζονται από την απαίτηση να ισχύει $J(x) = \emptyset$, για κάθε $x \in X$. Ως επόμενη κλάση δράσεων προσφέρεται ("φυσιολογικά" μέσω των οριακών συνόλων) εκείνη, για την οποία ισχύει $L(x) = J(x)$, για κάθε $x \in X$ (οι δράσεις ισοσυνεχών υποομάδων της $H(X)$ είναι τέτοιες, ενώ αν ο X δεν είναι συνεκτικός χώρος αυτές δεν είναι κατ' ανάγκη γνήσιες, επιπλέον, κάθε γνήσια δράση είναι ισοσυνεχής [Πρόταση 4.6 (2)]). Όπως αποδεικνύεται στο [33], η παραπάνω απαίτηση για μια D–ευσταθή δράση, ικανοποιείται σ' ένα πυκνό υποσύνολο του X. Άρα η κλάση των D–ευσταθών δράσεων εμπεριέχει *γνήσια* όλες τις προηγούμενες κλάσεις. Ας σημειώσουμε ότι η παραπάνω πρόταση στην [33] όπως και δύο άλλες στην ίδια εργασία (γενικού περιεχομένου, αλλά όχι πάντα αποδεδειγμένες με αλάνθαστες διαδικασίες) είναι ουσιαστικά *τα μόνα γνωστά αποτελέσματα* των D–ευσταθών δράσεων.

Ένα από τα κύρια προβλήματα των δράσεων (G, X) είναι η μελέτη της δομής των τροχιών $G(x)$ και της συνολικής κατανομής τους στον χώρο X.

Τελευταία, ο προβληματισμός στα πλαίσια της Ποιοτικής Θεωρίας των Δυναμικών Συστημάτων (Δ.Σ.) επικεντρώθηκε στο επόμενο διττό ερώτημα (πρβλ. [8], [38]):

- Ποιές κλάσεις Δ.Σ. μας δίνουν πληροφορίες για τη δομή του υποκείμενου στο Δ.Σ. χώρου;
- Ποιά είναι η συνολική κατανομή των τροχιών των παραπάνω Δ.Σ. σε καθένα από τους αντίστοιχους υποκείμενους χώρους;

Με το πρώτο ερώτημα εισάγονται οι "δυναμικές ιδιότητες" κατάλληλα επιλεγμένων "ομάδων συμμετριών" του χώρου ως μεθοδολογικό εργαλείο για την διερεύνηση της δομής του, ενώ το δεύτερο ερώτημα έχει αυτόνομο ενδιαφέρον στα πλαίσια της Ποιοτικής Θεωρίας. Ας σημειωθεί ότι έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί συμπεράσματα που αφορούν το δεύτερο ερώτημα προκειμένου να περιγραφεί η δομή του χώρου (πρβλ., π.χ., [8], [37], [38]).

Κρίσιμο στοιχείο στην επιλογή κατάλληλων κλάσεων Δ.Σ. ήταν οι ιδιότητες του Δ.Σ. σε σχέση με τα οριακά σύνολα, τις επεκτάσεις των τροχιών και τα επεκτεταμένα οριακά σύνολα. Έτσι, στα πλαίσια αυτά, η επιλογή της D–ευστάθειας σαν κλάση των Δ.Σ. (: δράσεων του R) σε 2–πολλαπλότητες δικαιώθηκε από την πλήρη απάντηση των παραπάνω ερωτημάτων (εκτός από την περίπτωση που η πολλαπλότητα είναι μη συμπαγές ελάχιστο σύνολο), που δόθηκε στις [38], [37].

Θεώρημα 1.22 *([38, Th. 4.2]) Έστω M μία προσανατολίσιμη 2–πολλαπλότητα με πεπερασμένο γένος. Αν (R, M) είναι ένα D–ευσταθές Δ.Σ., τότε ένα μόνο από τα παρακάτω μπορεί να ισχύει:*

1. *Το Δ.Σ. (R, M) είναι παραλληλήσιμο και είτε $M = R^2$ είτε $M = R \times S^1$.*

2. *Η (R, M) είναι μια ελάχιστη ροή (: κάθε τροχιά είναι πυκνή στην M) και, αν η M είναι συμπαγής, τότε $M = T^2$.*

3. *Η (R, M) χαρακτηρίζεται από τις επόμενες τέσσερεις, ανεξάρτητες μεταξύ τους, συνθήκες:*

   (a) *Το σύνολο P των περιοδικών τροχιών είναι μη κενό και ανοικτό.*

   (b) *Η τομή μιας συνοριακής συνεκτικής συνιστώσας του P στην M^+ (: τη συμπαγότητα με τα πέρατα της M) με το σύνολο Γ το σύνολο των τροχιών που είναι ομοιομορφικές με το R περιέχει τουλάχιστον μια τροχιά.*

   (c) *Ο περιορισμός του Δ.Σ. σε κάθε μία από τις συνεκτικές συνιστώσες του Γ είναι παραλληλήσιμος.*

   (d) *Το σύνολο F των σταθερών σημείων, αν είναι μη κενό, αποτελείται από τοπικά κέντρα (: κάθε σταθερό σημείο περικλείεται από περιοδικές τροχιές).*

   Σ' αυτή την περίπτωση ισχύει $M^+ = S^2$ ή $M^+ = T^2$ και το (ενδεχομένως κενό) σύνολο των περάτων της M είναι αριθμήσιμο. Αντίστροφα: κάθε τέτοιο M δέχεται ένα D-ευσταθές Δ.Σ. με τις ιδιότητες (a)-(d).

Τα συμπεράσματα αυτά, που, μαζί με τα αντίστοιχα της εργασίας [8], δείχνουν ότι το προηγούμενο διττό ερώτημα επιδέχεται απαντήσεις σε ειδικές περιπτώσεις, ενίσχυσαν ακόμα περισσότερο την επικαιρότητα του ερωτήματος "να διερευνηθούν οι D-ευσταθείς δράσεις για γενικότερες της R ομάδες δράσης και για τοπολογικούς χώρους που δεν είναι αναγκαστικά πολλαπλότητες". Αυτός ακριβώς είναι ο γενικός προβληματισμός της εργασίας αυτής.

Όπως είναι φυσικό, επειδή η θεώρηση του προηγούμενου προβληματισμού στο πλαίσιο των δράσεων αποτελεί πολύ γενικότερο ερευνητικό εγχείρημα, δεν περιμένει κανείς πλήρη και λεπτομερή αποτελέσματα όπως στο Θεώρημα 1.22. Ορισμένοι περιορισμοί τόσο για την ομάδα που δρα, όσο και για τον υποκείμενο χώρο είναι αναγκαίοι, για να συναχθούν κάπως περιεκτικά αποτελέσματα. Η άποψη αυτή ενισχύεται από το ότι, ακόμα και στην ειδική περίπτωση των Δ.Σ. σε πολλαπλότητες διάστασης μεγαλύτερης από 2, δεν υπάρχουν ικανοποιητικές απαντήσεις στο προηγούμενο διττό ερώτημα. Επίσης, αξίζει να αναφερθεί ότι, η έρευνα για τη δομή των ελαχίστων συνόλων (που είναι οι "δομικοί λίθοι" ενός Δ.Σ.) σε Δ.Σ. πάνω σε 3–διάστατες πολλαπλότητες βρίσκεται, προς το παρόν, στο αρχικό της στάδιο (κάθε θήκη τροχιάς σε μια D–ευσταθή δράση, είναι ελάχιστο σύνολο (minimal) [33, Pr. 2]).

Ορισμός 1.23 *Ένα σύνολο $A \subseteq X$ λέγεται ελάχιστο (ως πρός τη δράση (G, X)), αν είναι κλειστό, αμετάβλητο και δεν περιέχει κανένα γνήσιο μη κενό υποσύνολο με τις ιδιότητες αυτές.*

Τα κυριότερα αποτελέσματα της διατριβής είναι τα εξής:
Στη συνέχεια θα θεωρούμε δράσεις (G, X) όπου G είναι μια συνεκτική, τοπικά συμπαγής τοπολογική ομάδα και X είναι ένας τοπικά συμπαγής χώρος.

(A) Χαρακτηρισμός και δομή των D–ευσταθών δράσεων.

Θεώρημα 1.24 *(α) Έστω*

$$\begin{aligned} M\Pi &= \{x \in X : x \in J(x)\} \\ \Pi &= X \setminus M\Pi \\ \Sigma L &= \{x \in X : L(x) \neq \emptyset \ \text{ και συμπαγές}\}. \end{aligned}$$

Τότε τα σύνολα $M\Pi$, Π και ΣL είναι αμετάβλητα.
(β) Η δράση (G, X) είναι D–ευσταθής, αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες (1)-3(c):

1. *Η δράση (G, Π) είναι γνήσια ή, ισοδύναμα, αν ο χώρος G/Π είναι Hausdorff.*

2. *Αν $\Sigma L \neq \emptyset$, η απεικόνιση $\mu : X \to Y(X)$ με $\mu(x) = \overline{G(x)}$ είναι άνω ημισυνεχής στο ΣL, όπου $Y(X)$ είναι ο χώρος των μη κενών, κλειστών υποσυνόλων του X εφοδιασμένος με την ομαλή δομή που προκύπτει αν θεωρήσουμε ως βάση τα σύνολα $\{(A, B) : A \subseteq D(B)$ και $B \subseteq D(A)\}$, $D \in \mathcal{D}$, όπου το $\mathcal{D}$ είναι μια ομαλή δομή του X.*

3. *Για κάθε $x \in M\Pi \setminus \Sigma L$ το $J(x)$*

   (a) είναι συνεκτικό

   (b) περιέχει αριθμήσιμο πλήθος από διακεκριμένες θήκες τροχιών, και

(c) *αν περιέχει κάποιο* ω *με* $L(\omega)$ *μη συμπαγές, η απεικόνιση* $\pi : J(x) \to J(x)/\approx$ *με* $\pi(\alpha) = \overline{G(\alpha)}$ *είναι κλειστή, όπου με* $J(x)/\approx$ *συμβολίζουμε το σύνολο* $\{\overline{G(y)} : y \in J(x)\}$ *με την τοπολογία–πηλίκο που επάγει η* π.

(γ) *Οι παραπάνω πέντε συνθήκες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.*

(B) Η συμπεριφορά της δράσης στα πέρατα του υποκείμενου χώρου περιγράφεται από τις παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση 1.25 *Έστω* X^+ *η συμπαγότητα με τα πέρατα του* X *(πρβλ. Ορισμό 3.20).*

1. *Αν ο* X *είναι μετρικοποιήσιμος, η απεικόνιση* $\mu : X \to Y(X^+)$ *όπου* $\mu(x) = \overline{G(x)}^+$ *(: η θήκη της τροχιάς στον* X^+*) είναι* <u>*πάντα*</u> *κάτω ημισυνεχής.*

2. *Η δράση* (G, X) *είναι* D*–ευσταθής, αν και μόνο αν η απεικόνιση* μ *είναι άνω ημισυνεχής.*

Πρόταση 1.26 *Σε κάθε* $\omega \in X$ *με την ιδιότητα η θήκη της τροχιάς του στον* X *να μην είναι συμπαγής αντιστοιχούμε το κλειστό σύνολο* $(X^+ \setminus X) \cap \overline{G(\omega)}^+ \equiv \Lambda(\omega)$ *(: το σύνολο των περάτων που περιέχει η* $\overline{G(\omega)}^+$*). Αν η δράση* (G, X) *είναι* D*–ευσταθής, τότε η προκύπτουσα απεικόνιση* $\Lambda : X \setminus \Sigma L \to Y(X^+ \setminus X)$ *είναι άνω ημισυνεχής, αλλά όχι απαραίτητα και συνεχής.*

Σχόλιο για το συσχετισμό ισοσυνέχειας και συνεκτικότητας:

Στα τέλη της δεκαετίας του '20 και για δύο περίπου δεκαετίες (1928-1948) δημοσιεύτηκε μια σειρά εργασιών ([48], [7], [6], [36], [17]) με επίκεντρο το ερώτημα "ποιές ιδιότητες ενός ομαλού (uniform) χώρου εξασφαλίζουν την τοπική συμπάγεια μιας ισοσυνεχούς υποομάδας ομοιομορφισμών του, ως προς την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του;". Το ερώτημα αυτό απαντήθηκε πλήρως το 1948 από τον J. Dieudonné (στην [17]) για την περίπτωση των <u>συνεκτικών</u> και τοπικά συμπαγών ομαλών χώρων που είναι επιπλέον <u>πλήρεις</u> . Στις εργασίες [36] και [48], επίσης, αντιμετωπίστηκαν και άλλα, παρεμφερή ερωτήματα, όπως η γενίκευση του Θεωρήματος του Ascoli ([36]) ή η εξειδίκευση του παραπάνω ερωτήματος στην περίπτωση των μετρικών χώρων για την ομάδα των επί–ισομετριών ([48]). Το τελευταίο αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον, στα πλαίσια της άποψης του F. Klein, δηλαδή της μελέτης ενός χώρου μέσω της ομάδας των συμμετριών του (που στην περίπτωση των μετρικών χώρων είναι οι επί–ισομετρίες).

Τα πρώτα ουσιαστικά αποτελέσματα τόσο για την δομή του χώρου, όσο και για δυναμικές ιδιότητες της δράσης της αντίστοιχης ομάδας των ισομετριών δόθηκαν μόλις το 1974 (πρβλ. [47], [46], [44]) για την περίπτωση των τοπικά συμπαγών μετρικών χώρων. Τα σχετικά συμπεράσματα δεν ήταν πλήρη για μη συνεκτικούς χώρους.

Στο τρίτο, λοιπόν, μέρος της παρούσας διατριβής θα μας απασχολήσει η μελέτη της δομής ενός τοπικά συμπαγούς και όχι αναγκαστικά συνεκτικού ομαλού χώρου, που δέχεται μια δράση μιας μη συμπαγούς, τοπικά συμπαγούς, ισοσυνεχούς υποομάδας της ομάδας των ομοιομορφισμών του καθώς, επίσης, και η γενική μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς της παραπάνω δράσης. Πρέπει να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι τα αποτελέσματα της διατριβής αφορούν μόνο την τοπολογική δομή του X, και όχι την εκάστοτε ομαλή δομή του. Η συγκεκριμένη ομαλή δομή του X παίζει ένα ρόλο ανάλογο με αυτόν στο Θεώρημα Ascoli, δηλαδή, αυτό που χρησιμοποιείται ουσιαστικά είναι η ομαλοποιησιμότητα του X.

Ας σημειωθεί, τέλος, ότι, εν γένει οι μέθοδοι της εργασίας αυτής είναι διαφορετικές από αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στις αρχικές εργασίες [17], [48], [36], [7], [6] στις οποίες η συνεκτικότητα του υποκείμενου τοπολογικού χώρου έπαιξε ουσιαστικό ρόλο.

(Γ) Τα κυριότερα αποτελέσματα της διατριβής, όσον αφορά την ισοσυνέχεια, δίνονται από τις παρακάτω προτάσεις:

Ορισμός 1.27 *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και Y ένας ομαλός χώρος. Ένα υποσύνολο F του $C(X,Y)$ λέγεται ισοσυνεχές στο $x \in X$ αν, για κάθε περιβάλλον σύνολο V (πρβλ. Ορισμό 4.2) του Y, υπάρχει μια περιοχή U του $x \in X$ έτσι, ώστε $(f(x), f(y)) \in V$ για κάθε $y \in U$ και $f \in F$. Το F λέγεται ισοσυνεχές αν, είναι ισοσυνεχές για κάθε $x \in X$.*

Ορισμός 1.28 *Έστω X και Y δύο ομαλοί χώροι. Ένα υποσύνολο F του $C(X,Y)$ λέγεται ομοιόμορφα ισοσυνεχές αν, για κάθε περιβάλλον σύνολο V του Y, υπάρχει ένα περιβάλλον σύνολο U του X έτσι, ώστε $(f(x), f(y)) \in V$ οποτεδήποτε $(x,y) \in U$ και $f \in F$.*

Πρόταση 1.29 *Έστω $(X, \mathcal{D})$ ένας ομαλός χώρος (το $\mathcal{D}$ συμβολίζει την ομαλή δομή του X) και G μια ισοσυνεχής υποομάδα της $H(X)$. Τότε, υπάρχει μια ομαλή δομή "λεπτότερη" της αρχικής, που επάγει την τοπολογία του X και κάνει την G ομοιόμορφα ισοσυνεχή.*

Από την προηγούμενη πρόταση συνάγεται ότι η ισοσυνέχεια υποκαθιστά την ιδιότητα της πληρότητας για τον υποκείμενο χώρο, η οποία θεωρήθηκε απολύτως αναγκαία υπόθεση στις εργασίες [17] και [36].

Ορισμός 1.30 *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Ημισυνεκτική συνιστώσα του $x \in X$ λέγεται η τομή όλων των ανοικτών–κλειστών υποσυνόλων του X που περιέχουν το x. Ο χώρος–πηλίκο των ημισυνεκτικών συνιστωσών του X θα συμβολίζεται με $H\Sigma(X)$.*

Πρόταση 1.31 *Έστω X ένας τοπικά συμπαγής ομαλός χώρος με την ιδιότητα ο $H\Sigma(X)$ να είναι συμπαγής και (G, X) η δράση μιας κλειστής υποομάδας του $C(X, X)$.*

1. *Αν η G είναι ισοσυνεχής, τότε είναι και τοπικά συμπαγής τοπολογική ομάδα.*

2. *Αν, επιπλέον, ο X είναι συνεκτικός, τότε η δράση είναι γνήσια.*

Θεώρημα 1.32 *Έστω $(X, \mathcal{D})$ ένας τοπικά συμπαγής ομαλός χώρος και (G, X) η δράση μιας μη συμπαγούς, τοπικά συμπαγούς, ισοσυνεχούς υποομάδας του $H(X)$. Τότε, ο X διασπάται στα επόμενα τρία, αμετάβλητα, ξένα μεταξύ τους, ανοικτά και κλειστά σύνολα*

$$\begin{aligned} M\Sigma L &= \{x \in X : L(x) \neq \emptyset \ \text{ και μη συμπαγές}\} \\ \Sigma L &= \{x \in X : L(x) \neq \emptyset \ \text{ και συμπαγές}\} \\ \Pi &= \{x \in X : L(x) = \emptyset\}, \end{aligned}$$

για τα οποία ισχύουν τα εξής:

1. *Κάθε στοιχείο του ΣL έχει ευσταθή θήκη τροχιάς (: κάθε περιοχή της θήκης περιέχει μια αμετάβλητη περιοχή της).*

2. *Υπάρχει μια ισοδύναμη ομαλή δομή η οποία έχει μια G–αμετάβλητη βάση από περιβάλλοντα σύνολα (surroundings: πρβλ. Ορισμό 4.2). Έστω $V_x^* = \{g \in G : gx \in V(x)\}$, όπου V είναι ένα από τα περιβάλλοντα σύνολα της προηγούμενης βάσης, και F_k η οικογένεια $\{V_x^* : \overline{V_x^{*k}(x)} \text{ συμπαγές}\}$, $k \in N^*$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(a) $x \in \Pi$ αν και μόνο αν, η ομάδα ισοτροπίας G_x του x είναι συμπαγής και τα σύνολα V_x^* αποτελούν βάση περιοχών της G_x καθώς το V "διατρέχει" τη βάση από τα αμετάβλητα περιβάλλοντα σύνολα.

(b) Έστω ένα $x \in X$ έτσι, ώστε η τροχιά του να έχει συμπαγή χώρο ημισυνεκτικών συνιστωσών. Τότε το $x \in \Sigma L$ αν και μόνο αν, υπάρχει k_0 και $V_x^* \in F_{k_0}$ έτσι, ώστε $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_x^{*n} = V_x^{*k_0}$.

Το 2(a) γενικεύει το [44, Prop. 4.3] που έχει αποδειχθεί για ισομετρίες.

Θεώρημα 1.33 *Με ίδιες τις υποθέσεις της προηγούμενης πρότασης τόσο για την ομάδα G, όσο και για τον υποκείμενο χώρο X.*

1. *Αν $x \in X$ και $\{g_i\}$ είναι ένα δίκτυο έτσι, ώστε $g_i x \to y$, τότε κάθε υποδίκτυο του $\{g_i\}$ έχει ένα συγκλίνον υποδίκτυο σε μια συνάρτηση ψ , με $\psi(x) = y$, ορισμένη σ' ένα ανοικτό και κλειστό υποσύνολο A του X και τιμές σ' ένα ανοικτό υποσύνολο του X. Αν ο X είναι δεύτερος αριθμήσιμος και η g_i είναι ακολουθία, τότε το σύνολο τιμών της ψ είναι και κλειστό.*

2. *Αν η G είναι σ–συμπαγής (π.χ., αν ο X είναι δεύτερος αριθμήσιμος) και υπάρχει ένα στοιχείο $\alpha \in A$ έτσι, ώστε (α) η $G(\alpha)$ να είναι κλειστή στον X και (β) η ομάδα ισοτροπίας G_α να είναι κλειστή στο $C(A, X)$, τότε η προηγούμενη ψ είναι ο περιορισμός κάποιου $\gamma \in G$. Οι συνθήκες (α) και (β) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.*

Πρόταση 1.34 *Υποθέσεις όπως στην προηγούμενη πρόταση. Αν ο X είναι δεύτερος αριθμήσιμος και η $G(x)$ είναι κλειστή για κάποιο $x \in X$, τότε το μη κενό του $L(x)$ οφείλεται <u>αποκλειστικά</u> και μόνο στη μη συμπάγεια της ομάδας ισοτροπίας του x.*

Θεώρημα 1.35 (Μελέτη κατά συνεκτικές συνιστώσες) *Έστω S_i μια συνεκτική συνιστώσα του X. Αν (G, X) είναι όπως στην προηγούμενη πρόταση, θέσουμε $G_i = \{g \in G : g\, S_i = S_i\}$ και ορίσουμε την $\phi : G_i \to H(S_i)$, από την ισότητα $\phi(g)(x) = gx$, $\forall x \in S_i$, τότε:*

1. *Η G_i είναι κλειστή υποομάδα της G.*

2. *Η δράση* $(\overline{\phi(G_i)}, S_i)$ *είναι* <u>*γνήσια*</u>*, όπου* $\overline{\phi(G_i)}$ *είναι η θήκη της* $\phi(G_i)$ *στον* $C(S_i, S_i)$ *ως προς την συμπαγή–ανοικτή τοπολογία.*

3. *Με την επιπλέον υπόθεση ότι η* $\overline{\phi(G_i)}$ *δεν είναι συμπαγής, αν υπάρχει ένα* $x \in S_i$ *έτσι, ώστε ο* $H\Sigma(\overline{\phi(G_i)}(x))$ *να είναι συμπαγής ως προς την τοπολογία–πηλίκο, τότε η* S_i *έχει έναν* R*–παράγοντα (: δηλαδή* $S_i \simeq R \times Y$*, όπου* Y *είναι ένας συνεκτικός, τοπικά συμπαγής και κλειστός υπόχωρος του* S_i*).*

4. *(Συνθήκη ώστε η* $\phi(G_i)$ *να είναι κλειστή). Αν υπάρχει ένα* $x \in S_i$ *έτσι, ώστε η τροχιά* $G_i(x)$ *να είναι κλειστή στον* X *και η* $\phi(G_x)$ *να είναι κλειστή στον* $C(S_i, S_i)$ *τότε η* $\phi(G_i)$ *είναι κλειστή στον* $C(S_i, S_i)$*.*

Το (3) γενικεύει το [47, Satz. 3.1 (a)] που έχει αποδειχθεί ειδικά για ισομετρίες.

Κεφάλαιο 2

Βελτιώσεις και προεκτάσεις της γενικής θεωρίας των Δράσεων

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε μεθόδους και συμπεράσματα από τη Θεωρία των Δράσεων που είτε είναι γνωστά (οπότε θα δίνεται ακριβής βιβλιογραφική υπόδειξη) είτε αποτελούν γενικεύσεις ή/και επεκτάσεις γνωστών αποτελεσμάτων (οπότε θα δηλώνεται η κατεύθυνση της βελτίωσης). Έτσι από τη μια μεριά θα αναδειχθούν ορισμένα καινούρια στοιχεία που έχουν ενδιαφέρον στο σύγχρονο πλαίσιο της Θεωρίας των Δράσεων και, από την άλλη, θα προετοιμασθεί το έδαφος για τις αποδείξεις των κύριων αποτελεσμάτων της διατριβής.

Ακολουθίες και Οριακά Σύνολα

Όπως έχει ήδη δειχθεί από τους O. Hajek και D. Simanaitis με αντιπαράδειγμα [25], δεν είναι πάντα δυνατή η περιγραφή των οριακών συνόλων με ακολουθίες, ακόμα και στην περίπτωση των Δ.Σ. Στις δύο παρακάτω προτάσεις δίνονται συνθήκες ώστε αυτό να συμβαίνει.

Πρόταση 2.1 *Έστω (G, X) μια δράση μιας σ-συμπαγούς τοπολογικής ομάδας G επί ενός πρώτου αριθμήσιμου χώρου X. Τότε τα L-, J- και D-σύνολα ορίζονται μέσω ακολουθιών.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι, τα J-σύνολα ορίζονται μέσω ακολουθιών. Ανάλογες αποδείξεις γίνονται και για τα L- και D- σύνολα.

Λόγω της σ–συμπάγειας η G γράφεται $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, όπου τα G_n είναι σχετικά συμπαγή και ανοικτά υποσύνολα της G με την ιδιότητα $\overline{G_n} \subseteq G_{n+1}$ [18, Th. 7.2, p. 241]. Έστω $y \in J(x)$. Από τον ορισμό του J–συνόλου υπάρχουν δίκτυα $x_i \in X$ και $g_i \in G$ έτσι, ώστε $g_i x_i \to y$, $x_i \to x$ και $g_i \to \infty$. Από την πρώτη αριθμησιμότητα του X μπορούμε να επιλέξουμε δύο αριθμήσιμες βάσεις περιοχών $\{U_x^n\}$ και $\{U_y^n\}$ για τα x και y αντίστοιχα. Έτσι για κάθε n υπάρχουν $g_n \in G$ και $x_n \in X$ έτσι, ώστε $g_n x_n \in \{U_y^n\}$, $x_n \in \{U_x^n\}$ και $g_n \notin \overline{G_n}$. Λόγω της επιλογής των g_n και x_n, έχουμε $g_n x_n \to y$ και $x_n \to x$, ενώ ισχύει $g_n \to \infty$, διότι, αν $g_j \to g_0$, από την τοπική συμπάγεια της G θα υπήρχαν n_0 και j_0 έτσι, ώστε $g_j \in G_{n_0}, \forall j \geq j_0$. Από την ομοτελικότητα του υποδικτύου, θα υπήρχε υπακολουθία $g_{n_k} \in G_{n_0}$, πράγμα άτοπο αφού $g_{n_k} \notin G_{n_k}$. □

Η επόμενη πρόταση έχει αποδειχθεί στο [41, Lemma 7.8, p. 65], για την περίπτωση των Δ.Σ.

Πρόταση 2.2 *Έστω X ένας πρώτος αριθμήσιμος χώρος και (G, X) μια δράση, τότε:*

1. $\overline{G(x)} = \{\alpha \in X :$ **για κάθε** $\omega_n \to x,\ \exists\, g_n \in G$ *έτσι, ώστε* $g_n \omega_n \to \alpha\,,\ n \in N\}$.

2. *Αν* $G = R^n$, *τότε* $L(x) = \{\alpha \in X :$ **για κάθε** $\omega_n \to x,\ \exists\, g_n \to \infty$ *έτσι, ώστε* $g_n \omega_n \to \alpha\,,\ n \in N\}$.

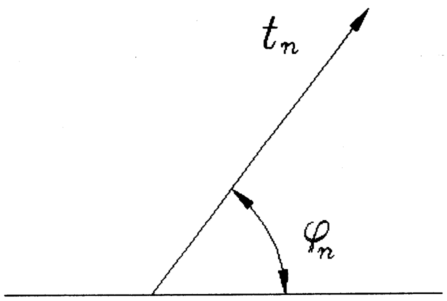
Απόδειξη. (1) Έστω $Q(x) = \{\alpha \in X :$ για κάθε $\omega_n \to x$, $\exists$ υπακολουθία ω_{k_n} και $g_{k_n} \in G$ έτσι, ώστε $g_{k_n} \omega_{k_n} \to \alpha\,,\ n \in N\}$. Θα δείξουμε ότι $Q(x) = \overline{G(x)}$.

Έστω $y \in Q(x)$. Αν θεωρήσουμε $\omega_n = x$ (: σταθερή ακολουθία), τότε $y \in \overline{G(x)}$ και άρα $Q(x) \subseteq \overline{G(x)}$. Επιλέγοντας $g_{k_n} = e$, όπου e είναι το μοναδιαίο στοιχείο της G, συμπεραίνουμε $x \in Q(x)$. Προφανώς το $Q(x)$ είναι αμετάβλητο.

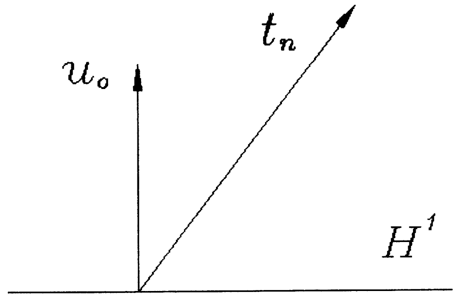
Θα δείξουμε ότι το $Q(x)$ είναι και κλειστό υποσύνολο του X. Έστω $y_k \to y$, $k \in N$, $y_k \in Q(x)$ και $\omega_n \to x$. Έστω $\{U_y^n\}$ μια αριθμήσιμη βάση περιοχών για το y. Για κάθε U_y^n υπάρχει $y_{k_n} \in U_y^n$. Άρα, από τον ορισμό του $Q(x)$, υπάρχουν ω_{k_n} και g_{k_n} έτσι, ώστε $g_{k_n} \omega_{k_n} \in U_y^n$ και $k_n \geq \max\{k_{n-1}, n\}$. Συνεπώς, $y \in Q(x)$ και άρα το $Q(x)$ είναι κλειστό. Εφόσον το $Q(x)$ είναι κλειστό, αμετάβλητο και ισχύει $x \in Q(x)$, έχουμε $\overline{G(x)} \subseteq Q(x)$.

Θα δείξουμε ότι $Q(x) = \{y \in X : \forall\, \omega_n \to x,\ \exists\, g_n \in G$ έτσι, ώστε $g_n \omega_n \to y\}$. Προφανώς το τελευταίο σύνολο είναι υποσύνολο του $Q(x)$. Θα δείξουμε και το αντίστροφο: Αν $y \in Q(x)$ και $\omega_n \to x$ τότε υπάρχουν ω_{k_n} και g_{k_n} έτσι, ώστε $g_{k_n}\omega_{k_n} \to y$. 'Εστω $\{U_y^k\}$ μια αριθμήσιμη βάση περιοχών για το y. Για την U_y^1 υπάρχουν n_1 και μια ακολουθία g_n^1 έτσι, ώστε $g_n^1\omega_n \in U_y^1$, $\forall n \geq n_1$. 'Ομοια για την U_y^2 υπάρχουν $n_2 > n_1$ και ακολουθία g_n^2 έτσι, ώστε $g_n^2\omega_n \in U_y^2$, $\forall n \geq n_2$. Θέτουμε $h_{n_1} = g_{n_1}^1$, $h_{n_2} = g_{n_2}^2$ και $h_n = g_n^1$ για κάθε $n_1 < n < n_2$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, κατασκευάζουμε ακολουθία $\{h_n\}$ έτσι, ώστε $h_n\omega_n \to y$.

(2) Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Για $n = 1$, δηλαδή για την περίπτωση των Δ.Σ., το συμπέρασμα έχει αποδειχθεί στο [41, Lemma 7.8, p. 65]. Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει για κάθε $n < k$. Το R^k χωρίζεται από ένα υπερεπίπεδο σε δύο ανοικτούς ημιχώρους H^1, H^2. Αν $y \in L(x)$, υπάρχει $t_n \to \infty$



Σχ. 1



Σχ. 2

έτσι, ώστε $t_n x \to y$. Από την υπόθεση της επαγωγής μπορούμε να υποθέσουμε ότι $t_n \in H^1$. Οι γωνίες φ_n των διανυσμάτων t_n ως προς το υπερεπίπεδο (Σχ. 1) έχουν κάποιο σημείο συσσώρευσης φ_0. Θεωρώντας το μοναδιαίο διάνυσμα u_0 στην κατεύθυνση που ορίζει η φ_0 και παίρνοντας για υπερεπίπεδο το κάθετο υπερεπίπεδο στο u_0 (Σχ. 2) έχουμε: Το H^1 είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων και, αν $s_n \in H^1$, το $s_n + t_n \to \infty$. 'Ετσι για ένα σταθερό n_0 ισχύει $t_n - t_{n_0} \in H^1$ τελικά για κάθε n. Θέτουμε $Q^1(x) = \{y \in X :$ για κάθε $x_n \to x$, υπάρχει $g_{n_k} \in H^1$ έτσι, ώστε $g_{n_k}x_{n_k} \to y\}$. Το $Q^1(x)$ είναι H^1–αμετάβλητο και περιέχει το x (: αρκεί να θεωρήσουμε $g_n \in H^1$ έτσι, ώστε $g_n \to 0$). 'Οπως στο (1) μπορούμε να αποδείξουμε ότι $Q^1(x) = \overline{H^1(x)}$. Αφού $t_n x = (t_n - t_{n_0}).(t_{n_0}x)$ για κάθε n_0, έχουμε $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{H^1(t_n x)}$. 'Αρα $y \in Q^1(t_n x)$, $\forall n \in N$. 'Εστω $\{U_y^n\}$ μια αριθμήσιμη βάση περιοχών για το y. Αν $x_k \to x$, τότε $t_n x_k \to t_n x$ $\forall n \in N$, και για κάθε U_y^n υπάρχουν x_{k_n} και $g_{k_n} \in H^1$ έτσι, ώστε $g_{k_n}(t_n x_{k_n}) \in U_y^n$, με $k_n \geq \max\{k_{n-1}, n\}$, οπότε $\omega_{k_n} = g_{k_n} + t_n \to \infty$ και $\omega_{k_n} x_{k_n} \to y$. Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή $\{y \in X :$ για κάθε $x_n \to x,$ υπάρχει $t_{k_n} \to \infty$ έτσι, ώστε $t_{k_n} x_{k_n} \to y\} \subseteq L(x)$. Με ανάλογη διαδικασία αποδεικνύεται ότι $L(x) = \{y \in X :$ για κάθε $x_n \to x$ υπάρχει $t_n \to \infty$ έτσι, ώστε $t_n x_n \to y\}$. □

Η απόδειξη της πρότασης που ακολουθεί είναι ανάλογη εκείνης του [11, Th. 2.8, p. 34]. Εκεί θεωρείται η ειδική περίπτωση $G = R$ και υποτίθεται ότι ο X είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος.

Πρόταση 2.3 *Έστω (G, X) μια δράση μιας σ-συμπαγούς τοπολογικής ομάδας G επί ενός τοπικά συμπαγούς χώρου X. Αν η ομάδα ισοτροπίας G_x του x είναι συμπαγής, τότε το σύνολο $L(x) \setminus G(x)$ είναι πυκνό στο $L(x)$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in L(x)$. Αρκεί ν' αποδειχθεί ότι $x \in \overline{L(x) \setminus G(x)}$, δηλαδή ότι ισχύει $V \cap (L(x) \setminus G(x)) \neq \emptyset$ για κάθε συμπαγή περιοχή V του x. Από το [18, Th. 7.2, p. 241], η G γράφεται σαν ένωση σχετικά συμπαγών, ανοικτών υποσυνόλων της G_n, με την ιδιότητα $\overline{G_n} \subseteq G_{n+1}$. Εφόσον $x \in L(x)$, υπάρχει $g_1 \notin G_1$ με $g_1 x \in V^\circ$ και $g_1 x \notin G_1 x$. Το τελευταίο επιτυγχάνεται ως εξής: Αφού $x \in L(x)$, υπάρχει $g_i \to \infty$ έτσι, ώστε $g_i \notin G_1$ με $g_i x \in V^\circ$, για κάθε $i \in I$. Αν ίσχυε $g_i x \in G_1 x$, θα υπήρχαν $\omega_i \in G_1$ και $h_i \in G_x$ έτσι, ώστε $g_i = \omega_i h_i$, άτοπο. Συνεπώς, υπάρχει μία συμπαγής περιοχή V_1 του $g_1 x$ με $V_1^\circ \subseteq V$ και $V_1 \cap G_1 x = \emptyset$. Αλλά $g_1 x \in L(x)$ [Πόρισμα 1.16]. Επαγωγικά κατασκευάζουμε μια ακολουθία $\{g_n x\}$ και μια ακολουθία περιοχών V_n έτσι, ώστε $V_{n+1}^\circ \subseteq V_n$, $g_n \notin G_n$ και $g_n x \in V_n$. Από την συμπάγεια της V υπάρχει $z \in V$ έτσι, ώστε $g_{\phi(i)} x \to z$ για κάποιο υποδίκτυο της $\{g_n x\}$ με κατευθυνόμενο σύνολο δεικτών I και $\phi : I \to N$ αντίστοιχη συνάρτηση. Αφού $g_{\phi(i)} \notin G_{\phi(i)}$, έχουμε $g_{\phi(i)} \to \infty$ και, επομένως, $z \in L(x)$. Επειδή $g_{\phi(i)} x \in V_{\phi(i)} \subseteq V_{\phi(j)}$, $\forall j \geq i$, ισχύει $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$. Τέλος, επειδή $V_n \cap G_n x = \emptyset$, ισχύει $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus G_n x) = X \setminus G(x)$, άρα $z \in V \cap (L(x) \setminus G(x))$. □

Πρόταση 2.4 *Έστω (G, X) μια δράση μιας τοπικά συμπαγούς ομάδας G επί ενός τοπικά συμπαγούς χώρου X. Έστω ότι η ομάδα των ημισυνεκτικών συνιστωσών της G είναι συμπαγής. Αν, επιπλέον, ισχύει $J(x) \neq \emptyset$, για κάποιο $x \in X$ και $J_o(x)$ είναι το επεκτεταμένο οριακό σύνολο του x για τον περιορισμό της δράσης στη συνεκτική συνιστώσα C*

του μοναδιαίου στοιχείου της G, τότε:

1. *$J_\circ(x) \neq \emptyset$ και υπάρχει συμπαγές $F \subseteq G$ έτσι, ώστε $J(x) = \bigcup_{g\in F} gJ_\circ(x)$.*

2. *$D(x) = \bigcup_{g\in F} gD_\circ(x)$.*

Απόδειξη. (1) Σε τοπικά συμπαγείς τοπολογικές ομάδες οι συνεκτικές και οι ημι-συνεκτικές συνιστώσες ταυτίζονται [50, 29 E.6]. 'Αρα $H\Sigma(G) = G/C$. Αν με $p : G \to G/C$ συμβολίσουμε την απεικόνιση πηλίκο, από το [50, 18 E.4] υπάρχει ένα $F \subseteq G$ συμπαγές έτσι, ώστε $p(F) = G/C$. Συνεπώς $G = F \cdot C$. Θα δείξουμε ότι $J_\circ(x) \neq \emptyset$ και $J(x) = \bigcup_{g\in F} gJ_\circ(x)$. 'Εστω $y \in J(x)$ και $x_i \to x$, $g_i \to \infty$ με $g_i x_i \to y$. Υπάρχουν $f_i \in F$ και $\omega_i \in C$ έτσι, ώστε $g_i = f_i\omega_i$. Από την συμπάγεια του F υπάρχει υποδίκτυο $f_j \to f \in F$. 'Αρα, $\omega_j x_j = f_j^{-1} g_j x_j \to f^{-1}y$. Επειδή $\omega_j \to \infty$, αφού $g_j \to \infty$ και $f_j \to f$, ισχύει $f^{-1}y \in J_\circ(x)$ και, συνεπώς, $y \in \bigcup_{g\in F} gJ_\circ(x)$. Από την άλλη, αφού η C είναι κλειστή υποομάδα της G, έχουμε $J_\circ(x) \subseteq J(x)$ και άρα $J(x) = \bigcup_{g\in F} gJ_\circ(x)$.

Η απόδειξη του (2) είναι ανάλογη. □

Τα δύο πρώτα συμπεράσματα της πρότασης που ακολουθεί είναι γνωστά για Δ.Σ., δηλαδή για $G = R$ (πρβλ. [11, Lemma 4.5, p. 27], [11, Th. 4.4, p. 26]).

Πρόταση 2.5 *'Εστω (G, X) η δράση μιας τοπικά συμπαγούς και συνεκτικής ομάδας G επί ενός τοπικά συμπαγούς τοπολογικού χώρου X.*

1. *Αν για κάποιο $x \in X$ το $J(x)$ είναι μη κενό και συμπαγές, τότε και το $L(x)$ είναι μη κενό και συμπαγές.*

2. *Αν το $D(x)$ είναι συμπαγές, τότε είναι και συνεκτικό.*

3. *Η υπόθεση της συνεκτικότητας για την G είναι αναγκαία, προκειμένου να ισχύει το (2).*

4. *Αν ο χώρος πηλίκο $H\Sigma(G)$ είναι συμπαγής, τότε ισχύει το (1), ενώ, αν το $D(x)$ δεν είναι συμπαγές, δεν έχει καμιά συμπαγή συνεκτική συνιστώσα. Η υπόθεση για τη συμπάγεια του $H\Sigma(G)$ είναι αναγκαία για το τελευταίο συμπέρασμα.*

Απόδειξη. (1) Η απόδειξη είναι ανάλογη του [11, Lemma 4.5, p. 27] για Δ.Σ.: Αν $L(x) = \emptyset$ τότε η $G(x)$ είναι κλειστή και ισχύει $G(x) \cap J(x) = \emptyset$, γιατί αλλιώς $\overline{G(x)} \subseteq J(x)$ και άρα $L(x) \neq \emptyset$. Συνεπώς, υπάρχουν ανοικτά σύνολα U και V έτσι, ώστε $J(x) \subseteq U$, $G(x) \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$. Λόγω της συμπάγειας του $J(x)$, το U μπορεί να θεωρηθεί σχετικά συμπαγές. Αν $y \in J(x)$ τότε, υπάρχουν $g_i \to \infty$ και $x_i \to x$ έτσι, ώστε $g_i x_i \to y$. Από την συνεκτικότητα των τροχιών $G(x_i)$ υπάρχουν $h_i \in G$ έτσι, ώστε $h_i x_i \in \partial U$. Λόγω της συμπάγειας του ∂U υπάρχουν υποδίκτυο $\{h_j x_j\}$ και $\omega \in \partial U$ έτσι, ώστε $h_j x_j \to \omega$. Αν $h_j \to \infty$, τότε $\omega \in J(x)$, άτοπο γιατί $J(x) \cap \partial U = \emptyset$ ενώ, αν υπάρχει συγκλίνον υποδίκτυο του $\{h_i\}$, τότε $\omega \in G(x)$, άτοπο. Άρα $L(x) \neq \emptyset$ και βέβαια είναι συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο του $J(x)$.

(2) Η απόδειξη είναι ανάλογη του [11, Th. 4.4, p. 26] για Δ.Σ.: Αν το $D(x)$ είναι συμπαγές αλλά όχι συνεκτικό τότε, υπάρχουν δύο μη κενά, ξένα μεταξύ τους, συμπαγή σύνολα A και B έτσι, ώστε $D(x) = A \cup B$. Από το [18, Th. 6.2, p. 238] υπάρχουν δύο ανοικτά, σχετικά συμπαγή σύνολα U και V έτσι, ώστε $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$. Επειδή $x \in D(x)$, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \in A$. Έστω $y \in B$. Από τον ορισμό του $D(x)$, υπάρχουν $g_i \in G$ και $x_i \to x$ έτσι, ώστε $g_i x_i \to y$. Όπως και στο (1), υπάρχουν $h_j \in G$ και $\omega \in \partial U$ έτσι, ώστε $h_j x_j \to \omega$. Άρα $\omega \in D(x)$, πράγμα άτοπο, γιατί $D(x) \cap \partial U = \emptyset$.

(3) Το ότι η συνεκτικότητα της G είναι αναγκαία, φαίνεται από το ακόλουθο αντιπαράδειγμα:

Έστω G η διακριτική τοπολογική ομάδα που παράγεται από μια στροφή κατά $\frac{\pi}{2}$ στο S^1. Το $D(x)$ ενός σημείου $x \in S^1$ για τη δράση (G, S^1) αποτελείται, προφανώς, από το ίδιο το x και το αντιδιαμετρικό του στο S^1. Έτσι, ενώ το $D(x)$ είναι συμπαγές, δεν είναι συνεκτικό.

(4) Όπως αναφέρθηκε στην απόδειξη της Πρότασης 2.4 (1), ισχύει $G = F \cdot C$, όπου F είναι ένα συμπαγές υποσύνολο της G και C είναι η συνεκτική συνιστώσα της μονάδας, και $J(x) = \bigcup_{g \in F} g J_\circ(x)$. Στο (1) δείξαμε ότι το $L_\circ(x)$ είναι μη κενό και συμπαγές. Προφανώς $L_\circ(x) \subseteq L(x)$. Άρα το $L(x) \neq \emptyset$ είναι συμπαγές.

Στη συνέχεια της απόδειξης θα χρησιμοποιήσουμε τα ήδη γνωστά τοπολογικά Λήμματα 2.6–2.8. Έστω $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ η συμπαγότητα κατά Alexandroff του X. Η δράση (C, X) επεκτείνεται (συνεχώς) σε μια δράση $(C, \tilde{X}, \gamma)$, που ορίζεται θέτοντας

$\gamma(g,\infty)=\infty$, για κάθε $g\in C$. Για τη δράση αυτή το $\tilde{D}_o(x)$ είναι συμπαγές [Πόρισμα 1.16] άρα και συνεκτικό, όπως δείξαμε στο (2). Αφού το $D_o(x)$ δεν είναι συμπαγές, πρέπει να ισχύει $\tilde{D}_o(x)=D_o(x)\cup\{\infty\}$. Το $D_o(x)$ είναι ανοικτό στη σχετική τοπολογία του $\tilde{D}_o(x)$. Από το Λήμμα 2.8, αν N_o είναι μια συνεκτική συνιστώσα του $D_o(x)$, θα έχει οριακά σημεία στο σύνορο του $D_o(x)$ στο $\tilde{D}_o(x)$ που είναι το $\{\infty\}$. Αυτό δείχνει ότι η N_o δεν είναι συμπαγής. Έτσι, αν N είναι μια συνεκτική συνιστώσα του $D(x)$ και $z\in N$, τότε $z=gz_o$, $g\in F$ και $z_o\in D_o(x)$. Αν N_o είναι η συνεκτική συνιστώσα του z_o στο $D_o(x)$ τότε, $gN_o\subseteq N$ και το gN_o είναι μη συμπαγές και κλειστό υποσύνολο της N. Άρα η N δεν είναι συμπαγής.

Στην περίπτωση που η $H\Sigma(G)$ δεν είναι συμπαγής έχουμε το ακόλουθο αντιπαράδειγμα:

Θεωρούμε την δράση (Z,Z,γ), όπου $\gamma(k,n)=k+n$. Προφανώς $H\Sigma(Z)=Z$ και $D(x)=Z$, $\forall x\in Z$. Εδώ, το $D(x)$ δεν είναι συμπαγές, αλλά έχει όλες τις συνεκτικές συνιστώσες του συμπαγείς. □

Τα επόμενα τοπολογικά λήμματα είναι γνωστά. Παρ' όλα αυτά θα σκιαγραφηθούν οι αποδείξεις τους, επειδή δεν φαίνεται να έχουν δημοσιευθεί.

Λήμμα 2.6 *Έστω X ένας συμπαγής χώρος Hausdorff και A,B δύο μη κενά, κλειστά και ξένα υποσύνολα του X, για τα οποία δεν υπάρχει καμιά συνεκτική συνιστώσα του X που να τέμνει ταυτόχρονα το A και το B. Τότε υπάρχει ένα ανοικτό και κλειστό υποσύνολο K του X έτσι, ώστε $A\subseteq K$ και $B\subseteq X\setminus K$.*

Απόδειξη. Σ' ένα συμπαγή χώρο οι ημισυνεκτικές συνιστώσες του ταυτίζονται με τις συνεκτικές συνιστώσες του (πρβλ. [29, p. 99]).

Έστω ένα $x\in A$ και $\{\grave{A}_i(x), i\in I\}$ η οικογένεια όλων των ανοικτών και κλειστών υποσυνόλων του X που περιέχουν το σημείο x. Επειδή το $\bigcap_{i\in I}A_i(x)$ είναι συνεκτικό και $A\cap(\bigcap_{i\in I}A_i(x))\neq\emptyset$ συμπεραίνουμε ότι $B\cap(\bigcap_{i\in I}A_i(x))=\emptyset$, γιατί αλλιώς η συνεκτική συνιστώσα του X που περιέχει το $x\in A$ θα έτεμνε και το A και το B. Άρα $B\subseteq\bigcup_{i\in I}(X\backslash A_i(x))$, οπότε υπάρχουν $i_1,\dots,i_{n_0}\in I$ έτσι, ώστε $B\subseteq\bigcup_{k=1}^{n_0}(X\backslash A_{i_k}(x))$. Το σύνολο $K_x=\bigcap_{k=1}^{n_0}A_{i_k}(x)$ είναι ανοικτό και κλειστό και $B\subseteq X\backslash K_x$. Η οικογένεια $\{K_x,\ x\in A\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμα του A. Άρα υπάρχουν $x_1,\dots,x_\lambda\in A$ έτσι, ώστε $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\lambda}K_{x_i}$. Τότε το σύνολο $K=\bigcup_{i=1}^{\lambda}K_{x_i}$ είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του X ενώ $A \subseteq K$ και $B \subseteq X \setminus K$. □

Λήμμα 2.7 *Έστω X ένας συνεκτικός, συμπαγής χώρος Hausdorff και U ένα ανοικτό γνήσιο υποσύνολο του X. Τότε για κάθε συνεκτική συνιστώσα C του $\overline{U}$ ισχύει $C \cap \partial U \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει μια συνεκτική συνιστώσα C του $\overline{U}$ έτσι, ώστε $C \cap \partial U = \emptyset$. Επειδή ο X είναι συνεκτικός $\partial U \neq \emptyset$. Τότε τα C και ∂U είναι δύο μη κενά, κλειστά και ξένα υποσύνολα του $\overline{U}$ με την ιδιότητα καμιά συνεκτική συνιστώσα του $\overline{U}$ δεν τέμνει και τα δύο. Άρα υπάρχει ένα ανοικτό και κλειστό υποσύνολο K του $\overline{U}$ έτσι, ώστε $C \subseteq K$ και $\partial U \subseteq \overline{U} \setminus K$ [Λήμμα 2.6]. Τότε $X = (X \setminus \overline{U}) \cup (\overline{U} \setminus K) \cup K$, ενώ $\overline{(X \setminus \overline{U}) \cup (\overline{U} \setminus K)} \subseteq (X \setminus \overline{U}) \cup \partial U \cup (\overline{U} \setminus K) = (X \setminus \overline{U}) \cup (\overline{U} \setminus K)$. Άρα τα σύνολα $(X \setminus \overline{U}) \cup (\overline{U} \setminus K)$ και K είναι ξένα μεταξύ τους, κλειστά και βέβαια μη κενά. Αυτό σημαίνει ότι ο X δεν είναι συνεκτικός, πράγμα άτοπο. □

Λήμμα 2.8 *Έστω X ένας συνεκτικός, συμπαγής χώρος Hausdorff και U ένα ανοικτό γνήσιο υποσύνολο του X. Τότε για κάθε συνεκτική συνιστώσα C του U ισχύει $\overline{C} \cap \partial U \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει συνεκτική συνιστώσα C του U έτσι, ώστε $\overline{C} \cap \partial U = \emptyset$. Επειδή $\overline{C} \subseteq \overline{U} = U \cup \partial U$ έχουμε ότι $\overline{C} \subseteq U$. Άρα $C = \overline{C}$. Από το [18, Th. 6.2, p. 238] υπάρχει ένα ανοικτό, σχετικά συμπαγές σύνολο V έτσι, ώστε $C \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Έστω H η συνεκτική συνιστώσα του $\overline{V}$ που περιέχει το C. Από το [Λήμμα 2.7] προκύπτει ότι $H \cap \partial V \neq \emptyset$. Άρα το H είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο του U έτσι, ώστε $C \subseteq H$ και $C \neq H$, πράγμα άτοπο αφού το C είναι συνεκτική συνιστώσα του U. □

Η επόμενη πρόταση αποτελεί *ουσιαστική* γενίκευση της [44, Prop. 4.3] η οποία αναφέρεται σε μετρικούς χώρους. Ας σημειωθεί ότι στις υποθέσεις της πρότασης αυτής η συνθήκη "η G είναι κλειστή υποομάδα της $I_d(X)$" πρέπει να αντικατασταθεί από την "η G είναι κλειστή υποομάδα της $\overline{I_d(X)} \subseteq C(X,X)$".

Πρόταση 2.9 *Έστω (G, X) η δράση μιας τοπικά συμπαγούς τοπολογικής ομάδας. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. $x \notin L(x)$.

2. Η G_x είναι συμπαγής και, αν $\{V_i,\ i \in I\}$ είναι μια βάση περιοχών του $x \in X$, τότε τα σύνολα $V_i^* = \{g \in G : gx \in V_i\}$ αποτελούν μια βάση περιοχών της G_x στην G.

Απόδειξη. Έστω ότι $x \notin L(x)$. Προφανώς η G_x είναι συμπαγής. Από τη συνέχεια της δράσης, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, κάθε V_i^* είναι ανοικτή περιοχή της G_x. Ορίζουμε μια κατεύθυνση στην οικογένεια $\{V_i,\ i \in I\}$ ως ακολούθως: $V_i \leq V_j \Leftrightarrow V_j \subseteq V_i$. Έτσι, αν τα $\{V_i^*\}$ δεν αποτελούν βάση περιοχών για την G_x στην G, τότε υπάρχουν μια περιοχή U της G_x και ένα δίκτυο $g_{V_i} \in G$ έτσι, ώστε $g_{V_i}x \in V_i$ και $g_{V_i} \notin U$, $\forall\, i \in I$. Προφανώς $g_{V_i}x \to x$. Αλλά $x \notin L(x)$. Άρα, υπάρχει υποδίκτυο g_j του g_{V_i} και $g \in G$ έτσι, ώστε $g_j \to g$. Συνεπώς $g_jx \to gx$ και $g \in G_x$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $g \in U$ και $g_j \notin U$, $\forall j$.

Αντίστροφα, από την τοπική συμπάγεια της G και την συμπάγεια της G_x, υπάρχει V_i έτσι, ώστε το V_i^* να είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο της G. Έτσι, αν ίσχυε $x \in L(x)$, θα υπήρχε $g_j \to \infty$ έτσι, ώστε $g_jx \to x$, απ' όπου έπεται $g_j \in V_i^*$ τελικά για κάθε j. Αυτό είναι άτοπο, διότι το $\overline{V_i^*}$ είναι συμπαγές και $g_j \to \infty$. □

Η επόμενη πρόταση γενικεύει για δράσεις ένα γνωστό για τα Δ.Σ. συμπέρασμα (πρβλ. [11, Th. 2.15, p. 36]).

Πρόταση 2.10 *Έστω (G, X) μια δράση μιας σ–συμπαγούς ομάδας G επί ενός τοπικά συμπαγούς, μετρικοποιήσιμου χώρου X. Αν ισχύει $x \in J(x)$ για κάθε $x \in X$, τότε το σύνολο $\{x \in X : x \in L(x)\}$ είναι πυκνό στον X.*

Απόδειξη. Λόγω της σ–συμπάγειας, η G γράφεται $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, όπου τα G_n είναι σχετικά συμπαγή, ανοικτά υποσύνολα της G, με την ιδιότητα $\overline{G_n} \subseteq G_{n+1}$ [18, Th. 7.2, p. 241]. Έστω $S(x, \epsilon)$ μια σχετικά συμπαγής σφαίρα κέντρου x και ακτίνας ϵ. Αφού $x \in J(x)$, υπάρχουν $g_1 \in G$ και $x_1 \in S^{\circ}(x, \epsilon)$ έτσι, ώστε $g_1x_1 \in S^{\circ}(x, \epsilon)$ και $g_1 \notin G_1$. Από την συνέχεια της δράσης, υπάρχει $\epsilon_1 < \frac{\epsilon}{2}$ έτσι, ώστε $\overline{S(x_1, \epsilon_1)} \subseteq S^{\circ}(x, \epsilon)$ και $g_1S^{\circ}(x_1, \epsilon_1) \subseteq S^{\circ}(x_1, \epsilon_1)$.

Επαγωγικά βρίσκουμε ακολουθίες $x_n \in X$, $g_n \in G$ και ϵ_n έτσι, ώστε $\overline{S(x_{n+1}, \epsilon_{n+1})} \subseteq S^{\circ}(x_n, \epsilon_n)$, $0 < \epsilon_n < \frac{\epsilon_{n-1}}{2}$ και $g_nS^{\circ}(x_n, \epsilon_n) \subseteq S^{\circ}(x_n, \epsilon_n)$ για $g_n \notin G_n$. Από τη σχετική συμπάγεια της $S(x, \epsilon)$ και επειδή $\epsilon_n \to 0$, έπεται $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S(x_n, \epsilon_n)} = \{y\}$. Αφού

$g_n y \in \overline{S(x,\epsilon)}$, υπάρχουν $g_{n_k} y$ και $z \in X$ έτσι, ώστε $g_{n_k} y \to z$. Επειδή $g_n y \in \overline{S(x_n,\epsilon_n)}$ για κάθε n, ισχύει $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S(x_n,\epsilon_n)}$ και, επομένως $z = y$, ενώ $g_{n_k} \notin G_{n_k}$, δηλαδή $g_{n_k} \to \infty$. Συνεπώς $y \in S(x,\epsilon) \cap \{x \in X : x \in L(x)\}$. □

Η πρόταση που ακολουθεί μεταφέρει σε δράσεις το γνωστό για Δ.Σ. κριτήριο ευστάθειας του Hajek (πρβλ. [22, Th. 1] και [10, 7.6]). Ένα σύνολο λέγεται *ευσταθές* αν κάθε περιοχή του περιέχει μια G–αμετάβλητη περιοχή του. Οι αποδείξεις που θα δοθούν διαφέρουν *ουσιαστικά* των γνωστών για την ειδική περίπτωση $G = R$.

Πρόταση 2.11 *1. Έστω X ένας σ-συμπαγής και πρώτος αριθμήσιμος χώρος, (G, X) μια δράση και A ένα κλειστό υποσύνολο του X. Το A είναι ευσταθές, αν και μόνο αν $D(A) = A$ και για κάθε $\omega \in \partial A$ υπάρχει περιοχή U του ω έτσι, ώστε το $\overline{G(U) \setminus A}$ να είναι συμπαγές.*

Παρατήρηση: η ομάδα <u>δεν</u> έχει υποτεθεί συνεκτική ή τοπικά συμπαγής!

2. Αν το ∂A είναι συμπαγές, τότε ισχύει το (1) με μόνη υπόθεση ότι ο X είναι τοπικά συμπαγής και το A είναι κλειστό.

3. Αν η G είναι τοπικά συμπαγής και ο $H\Sigma(G)$ είναι συμπαγής, ο X είναι τοπικά συμπαγής και το A είναι κλειστό με συμπαγές σύνορο, τότε το A είναι ευσταθές, αν και μόνο αν $D(A) = A$, όπου $D(A) = \bigcup_{x \in A} D(x)$.

4. Με ίδιες τις υποθέσεις του (1), αν το A είναι ελάχιστο και ευσταθές, τότε είτε είναι ανοικτό και κλειστό σύνολο είτε είναι συμπαγές.

Απόδειξη. (1) Κάθε τοπικά συμπαγής χώρος είναι πλήρως κανονικός (completely regular) και άρα ομαλοποιήσιμος [50, Th. 38.2]. Έστω ότι το A είναι ευσταθές. Προφανώς $A \subseteq D(A)$, ενώ, αν $y \in D(A)$, τότε υπάρχουν $x \in A$ και $g_i \in G$ έτσι, ώστε $g_i x_i \to y$ για κάποιο δίκτυο $x_i \to x$. Αν, λοιπόν, V είναι ένα "περιβάλλον σύνολο" (πρβλ. Ορισμό 4.2), το $V(A) = \{y \in X : \exists \alpha \in A$ έτσι, ώστε $(\alpha, y) \in V\}$ είναι μια περιοχή του A. Από την ευστάθεια του A, θα περιέχει μια αμετάβλητη περιοχή του A, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε $g_i x_i \in V(A)$ τελικά για κάθε i και, συνεπώς, $y \in \overline{V(A)}$. Επομένως, για κάθε περιβάλλον σύνολο V υπάρχει $(\alpha_i, \omega_i) \in V$ έτσι, ώστε $\alpha_i \in A$ και $\omega_i \to y$. Άρα, για κάθε V υπάρχει $(\alpha_V, \omega_V) \in V$ με $(\omega_V, y) \in V$. Τα περιβάλλοντα σύνολα ορίζουν μια κατεύθυνση "$\leq$", όπου $V \leq U$ σημαίνει $U \subseteq V$. Προφανώς $\alpha_V \to y \in A$, αφού το A είναι κλειστό.

Έστω, τώρα, ότι υπάρχει $x \in \partial A$ έτσι, ώστε το $\overline{G(U) \setminus A}$ να μην είναι συμπαγές για κάθε περιοχή U του x. Επειδή ο X είναι σ–συμπαγής, γράφεται $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, όπου τα X_n είναι σχετικά συμπαγή, ανοικτά υποσύνολα του X, με την ιδιότητα $\overline{X_n} \subseteq X_{n+1}$. Αφού $G(U)\setminus A \not\subseteq X_n$ για κάθε περιοχή U του x, από την πρώτη αριθμησιμότητα του X, υπάρχουν ακολουθίες $x_n \in X$ και $g_n \in G$ έτσι, ώστε $x_n \to x$ και $g_n x_n \notin A \cup X_n$. Προφανώς, το σύνολο $B = \{g_n x_n\}$ δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης, οπότε είναι κλειστό. Άρα το $X \setminus B$ είναι μια ανοικτή περιοχή του A, η οποία δεν περιέχει καμιά αμετάβλητη περιοχή του, αφού $x_n \to x \in A$ ενώ $g_n x_n \in B$, πράγμα άτοπο, λόγω της ευστάθειας του A.

Αντίστροφα, έστω ότι $D(A) = A$ και για κάθε $x \in \partial A$ υπάρχει περιοχή U του x έτσι, ώστε το $\overline{G(U) \setminus A}$ να είναι συμπαγές. Αν το A δεν ήταν ευσταθές, θα υπήρχε περιοχή V του A που δεν θα περιείχε καμιά αμετάβλητη περιοχή του. Άρα θα υπήρχε $x \in A$ έτσι, ώστε για κάθε περιοχή U του x να ίσχυε $G(U) \not\subseteq V$. Συνεπώς, θα υπήρχαν δίκτυα $x_i \in X$ και $g_i \in G$ έτσι, ώστε $x_i \to x$ και $g_i x_i \notin V$. Αφού $D(A) = A$, το A είναι αμετάβλητο, οπότε $x \in \partial A$ (αλλιώς θα είχαμε $g_i x_i \in A^\circ \subseteq V$ τελικά για κάθε i). Ισχύει $g_i x_i \to \infty$, γιατί, αλλιώς, θα υπήρχε υποδίκτυο $g_j x_j$ και $y \in X$ έτσι, ώστε $g_j x_j \to y$, οπότε $y \in D(x) \subseteq A$ και $g_j x_j \in V$ τελικά για κάθε j, πράγμα άτοπο. Επομένως, για κάθε περιοχή U του x το $\overline{G(U) \setminus A}$ δεν θα ήταν συμπαγές και καταλήγουμε σε άτοπο.

(2) Στο μόνο σημείο που χρησιμοποιήσαμε την σ–συμπάγεια και την πρώτη αριθμησιμότητα του X στο (1) ήταν όταν, υποθέτωντας ότι το A ήταν ευσταθές, αποδείξαμε ότι για κάθε $x \in \partial A$ υπήρχε περιοχή U του x έτσι, ώστε το $\overline{G(U) \setminus A}$ να είναι συμπαγές. Στην περίπτωση μας η απόδειξη σ' αυτό το σημείο τροποποιείται ως εξής:

Αν υπήρχε ένα $x \in \partial A$ έτσι, ώστε για κάθε περιοχή U του x το $\overline{G(U) \setminus A}$ να μην είναι συμπαγές, τότε για κάθε περιοχή U του x και συμπαγές $K \subseteq X$ θα υπήρχαν $g \in G$ και $x \in U$ έτσι, ώστε $gx \notin K \cup A$. Χρησιμοποιώντας το κατευθυνόμενο σύνολο D από την απόδειξη της Πρότασης 1.15, συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $i = (U, K) \in D$, υπάρχουν $g_i \in G$ και $x_i \in X$ έτσι, ώστε $x_i \in U$ και $g_i x_i \notin K \cup A$. Το δίκτυο $g_i x_i$ δεν έχει σημεία συσσώρευσης, διότι, αν $g_j x_j \to y$, τότε θα υπήρχε συμπαγής περιοχή

K_y του y έτσι, ώστε $g_j x_j \in K_y$ για κάθε $j \geq j_0$. Θέτοντας $j_0 = (U_0^x, K_0)$ και $i_0 = (U_0^x, K_0 \cup K_y)$, θα υπήρχε $j = (U_x, K)$ έτσι, ώστε $j \geq j_0, i_0$, με συνέπεια $K_y \cup K_0 \subseteq K$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $g_j x_j \in K_y \subseteq K$ και $g_j x_j \notin K$.

Επειδή το $\{g_i x_i\}$ δεν έχει σ.σ., αν $T_\mu = \{g_\lambda x_\lambda : \lambda \geq \mu\}$, τότε $\bigcap_{\lambda \in D} \overline{T_\lambda} = \emptyset$ [50, 11 B.4]. Αφού $A \cap T_\lambda = \emptyset$ για κάθε λ, ισχύει $A^\circ \cap \overline{T_\lambda} = \emptyset$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει λ με $A \cap \overline{T_\lambda} = \emptyset$: αλλιώς, θα είχαμε $\partial A \cap \overline{T_\lambda} \neq \emptyset$ για κάθε λ και θα υπήρχε $\alpha_\lambda \in \partial A$ έτσι, ώστε $\alpha_\lambda \in \overline{T_\lambda}$, οπότε από την συμπάγεια του ∂A, θα υπήρχε υποδίκτυο $\alpha_j \to \alpha \in \partial A$. Επειδή $T_\mu \subseteq T_\lambda$ για $\mu \geq \lambda$, μπορούμε να υποθέσουμε $\alpha \in \overline{T_\lambda}$ για κάθε λ, που είναι άτοπο, αφού $\bigcap_{\lambda \in D} \overline{T_\lambda} = \emptyset$. Υπάρχει, λοιπόν, $\lambda \in D$ έτσι, ώστε $A \cap \overline{T_\lambda} = \emptyset$. Αυτό αντιφάσκει στην ευστάθεια του A, διότι, αν ίσχυε, το σύνολο $X \setminus \overline{T_\lambda}$ θα ήταν μια ανοικτή περιοχή του A, η οποία δεν θα περιείχε καμιά αμετάβλητη περιοχή του, αφού $x_i \to x \in A$ και $g_i x_i \in \overline{T_\lambda}$ τελικά για κάθε $i \in D$.

(3) Μετά την απόδειξη της (2), το μόνο που μένει να αποδείξουμε είναι ότι, αν $D(A) = A$, τότε το A είναι ευσταθές. Έστω V μια σχετικά συμπαγής και ανοικτή περιοχή του ∂A. Το $\overline{V} \cup A$ είναι μια περιοχή του A. Αν το A δεν ήταν ευσταθές, τότε, όπως και στην απόδειξη του (1), θα είχαμε $x_i \to x \in A$ και $g_i x_i \notin \overline{V} \cup A$. Αφού το A και κατά συνέπεια, το A° είναι αμετάβλητο, έχουμε $x \in \partial A$. Με το συμβολισμό από την απόδειξη της Πρότασης 2.4 (1), ισχύει $G = F{\cdot}C$, όπου F είναι ένα συμπαγές υποσύνολο της G και C είναι η συνεκτική συνιστώσα της μονάδας. Από την κλειστότητα του A, συμπεραίνουμε $\partial(\overline{V} \cup A) = \partial(\overline{V \cup A}) \subseteq \partial(V \cup A) = \partial V \cap (X \setminus A)$. Έστω $g_i = f_i \omega_i$ για κατάλληλα $f_i \in F$ και $\omega_i \in C$. Επειδή η C είναι κανονική υποομάδα της G, μπορούμε να υποθέσουμε $g_i = c_i h_i$ για $c_i \in C$ και $h_i \in F$. Από την συμπάγεια του F, υπάρχει υποδίκτυο $h_j \to h \in F$, ενώ, επειδή $x \in A$ και το A είναι αμετάβλητο, ισχύει $h_j x_j \to hx \in A$. Αλλά $g_j x_j = c_j h_j x_j \notin \partial(V \cup A)$ και, λόγω της συνεκτικότητας των τροχιών $C(h_j x_j)$, υπάρχει υποδίκτυο $s_\lambda \in G$ έτσι, ώστε $s_\lambda x_\lambda \to y \in \partial(\overline{V} \cup A)$. Άρα $y \in \partial V \cap (X \setminus A)$ και $y \in D(x) \subseteq A$, άτοπο.

(4) Κάθε $x \in \partial A$ έχει την ιδιότητα το $\overline{G(x)}$ να είναι συμπαγές. Πράγματι, αν $x \in \partial A$, από το (1), υπάρχει μια περιοχή του U έτσι, ώστε το $\overline{G(U) \setminus A}$ να είναι συμπαγές. Αφού $x \in \partial A = \overline{(X \setminus A)} \cap A$, υπάρχει δίκτυο $x_i \notin A$ έτσι, ώστε $x_i \to x$. Άρα $x_i \in G(U) \setminus A$ και συνεπώς, $x \in \overline{G(U) \setminus A}$. Αφού τα σύνολα $G(U)$ και A είναι αμετάβλητα, το $\overline{G(U) \setminus A}$ θα είναι επίσης αμετάβλητο, απ' όπου συνάγεται $\overline{G(x)} \subseteq$

$\overline{G(U) \setminus A}$ και το $\overline{G(x)}$ θα είναι συμπαγές. Έτσι, αν $A^\circ \neq \emptyset$, τότε $A^\circ = A$, διότι αν $x \in A$, αφού $\overline{G(x)} = A$ (: το A είναι ελάχιστο), θα υπάρχει $g \in G$ έτσι, ώστε $gx \in A^\circ$, οπότε $x \in A^\circ$ (: το A° είναι αμετάβλητο). Άρα το A θα είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του X. Αν $A^\circ = \emptyset$ τότε $A = \partial A$. Έτσι, αν $x \in \partial A$, τότε $\overline{G(x)} = A$ και, επιπλέον, το $\overline{G(x)}$ θα είναι συμπαγές. □

Πρόταση 2.12 *Έστω (G, X) μια δράση μιας σ–συμπαγούς ομάδας G επί ενός τοπικά συμπαγούς χώρου X και $A \subseteq X$. Αν υπάρχει ένα $x \in A$ έτσι, ώστε η τροχιά $G(x)$ είναι κλειστή στον X και η G_x να είναι (μέσω της φυσιολογικής εμβάπτισης [Ορισμός 1.10]) κλειστή στον $C(A, X)$ ως προς την συμπαγή–ανοικτή τοπολογία, τότε η G θα είναι κλειστή στον $C(A, X)$.*

Απόδειξη. Επειδή η τροχιά $G(x)$ είναι κλειστή και ο X είναι τοπικά συμπαγής χώρος, η $G(x)$ είναι ένας τοπικά συμπαγής, ομογενής χώρος. Από την σ–συμπάγεια της G, η απεικόνιση $\gamma_x : G \to G(x)$, όπου $\gamma_x(g) = gx$, είναι ανοικτή [28, Th. 2.5, p. 7]. Άρα η απεικόνιση $\varphi_x : G/G_x \to G(x)$ όπου $\varphi_x(gG_x) = gx$ είναι ομοιομορφισμός [Πρόταση 1.5]. Έστω ένα δίκτυο $g_i \in G$ και $h \in C(A, X)$ έτσι, ώστε $\phi(g_i) \to h$, όπου ϕ είναι η φυσιολογική εμβάπτιση [Ορισμός 1.10]. Προφανώς $g_i x \to h(x)$, $\forall x \in A$. Αφού η τροχιά $G(x)$ είναι κλειστή, υπάρχει $\omega \in G$ έτσι, ώστε $h(x) = \omega x$. Επειδή η φ_x είναι ομοιομορφισμός, θα έχουμε ότι $g_i G_x \to \omega G_x$. Από την τοπική συμπάγεια της G και επειδή η απεικόνιση πηλίκο $g \mapsto gG_x$ είναι ανοικτή, υπάρχει μια σχετικά συμπαγής περιοχή V του ω έτσι, ώστε $g_i = f_i \omega_i$, $f_i \in V$ και $\omega_i \in G_x$ τελικά για κάθε i. Επομένως, υπάρχουν $f \in G$ και ένα υποδίκτυο f_j έτσι, ώστε $f_j^{-1} \to f^{-1}$. Από την τοπική συμπάγεια του X και το [18, Th. 2.2, p. 259], η απεικόνιση $T : C(X, X) \times C(A, X) \to C(A, X)$, όπου $T(f, g) = f \circ g$, είναι συνεχής ως προς τη συμπαγή–ανοικτή τοπολογία. Άρα $\phi(\omega_j) = \phi(f_j^{-1} g_j) = \phi(f_j^{-1}) \circ \phi(g_j) \to \phi(f^{-1}) \circ h$ [Πρόταση 1.11]. Αλλά $\omega_j \in G_x$ και η $\phi(G_x)$ είναι κλειστή στον $C(A, X)$. Άρα υπάρχει $g \in G_x$ έτσι, ώστε $\phi(f^{-1}) \circ h = \phi(g)$. Συνεπώς $h(x) = fgx$ για κάθε $x \in A$. Επομένως $h = \phi(f \cdot g)$ και η $\phi(G)$ είναι κλειστή στον $C(A, X)$. □

Το λήμμα που ακολουθεί γενικεύει το [34, Lemma 3, App. 2].

Λήμμα 2.13 *Κάθε τοπικά διαχωρίσιμος, μετρικοποιήσιμος χώρος X με $H\Sigma(X)$ Lindelöf είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Ο $H\Sigma(X)$ θεωρείται συνήθως με την τοπολογία η οποία προκύπτει αν, θεωρήσουμε για περιοχή ενός $K \in H\Sigma(X)$ ένα σύνολο M του οποίου η αντίστροφη εικόνα μέσω της απεικόνισης πηλίκο $p : X \to H\Sigma(X)$ περιέχει μια ανοικτή και κλειστή περιοχή της ημισυνεκτικής συνιστώσας K [29, 3, p. 99]. Από την απόδειξη που ακολουθεί φαίνεται ότι ισχύει το συμπέρασμα και στην περίπτωση που εφοδιασθεί ο $H\Sigma(X)$ με την τοπολογία–πηλίκο.

Ορίζουμε $x\mathcal{R}y$, αν και μόνο αν υπάρχουν r και $\epsilon > 0$ έτσι, ώστε $y \in S(x,r)$, $x \in S(y,\epsilon)$ και οι $S(x,r)$, $S(y,\epsilon)$ να είναι διαχωρίσιμες σφαίρες. Αν $Sx = \{y \in X : y\mathcal{R}x\}$ και $S^n x = SS^{n-1}x$, το σύνολο $U(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n x$ είναι ανοικτό και διαχωρίσιμο για κάθε $x \in X$ [34, Lemma 3, App. 2]. Επιπλέον αν $U(x) \cap U(y) \neq \emptyset$, τότε $U(x) = U(y)$. Άρα κάθε $U(x)$ είναι και κλειστό. Αφού ο $H\Sigma(X)$ είναι Lindelöf, υπάρχει ακολουθία $x_n \in X$ έτσι, ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U(x_n)$ και, άρα, ο X είναι διαχωρίσιμος. □

Πρόταση 2.14 *Έστω ότι η G είναι τοπικά συμπαγής. Αν ισχύει $x \notin L(x)$ για κάποιο $x \in X$ και ο χώρος $H\Sigma(G(x))$ είναι συμπαγής ως προς την τοπολογία–πηλίκο, τότε:*

1. *Ο χώρος $H\Sigma(G)$ είναι συμπαγής.*
2. *Αν η G δεν είναι συμπαγής, τότε η συνεκτική συνιστώσα C της μονάδας δεν είναι συμπαγής.*
3. *Αν ο X είναι παρασυμπαγής και τοπικά συμπαγής, η G δεν είναι συμπαγής και η (G,X) είναι γνήσια [Ορισμός 1.19], τότε ο X έχει έναν R–παράγοντα.*

Απόδειξη. (1) Αφού $x \notin L(x)$, από την Πρόταση 1.18 (3), η φ_x είναι ομοιομορφισμός. Η απεικόνιση πηλίκο $p : G \to G/G_x$ είναι ανοικτή [26, Th. 5.17 και Th. 5.18] και, επειδή $x \notin L(x)$, είναι και κλειστή. Άρα, η $\gamma_x = \varphi_x \circ p$ είναι ανοικτή και κλειστή απεικόνιση. Η C είναι η τομή όλων των ανοικτών–κλειστών υποομάδων της G [50, 29 E.6]. Επομένως $H\Sigma(G) = G/C$. Έστω $C = \bigcap_{i \in I} G_i$, όπου $\{G_i,\ i \in I\}$ είναι η οικογένεια όλων των ανοικτών–κλειστών υποομάδων της G. Στο σύνολο δεικτών I ορίζουμε την κατεύθυνση "$\leq$": $i \leq j \Leftrightarrow G_j \subseteq G_i$. Επειδή η γ_x είναι ανοικτή και κλειστή, τα $G_i(x)$ είναι ανοικτά και κλειστά υποσύνολα της $G(x)$. Θα δείξουμε ότι $C(x) = \bigcap_{i \in I} G_i(x)$ και άρα ότι η συνεκτική συνιστώσα, η ημισυνεκτική συνιστώσα του x στην $G(x)$ και το $C(x)$ ταυτίζονται.

Πράγματι, αν $gx \in \bigcap_{i\in I} G_i(x)$, τότε $g = g_i h_i$ για κατάλληλα $g_i \in G_i$ και $h_i \in G_x$. Άρα $h_i = g_i^{-1} g$ και, επειδή η G_x είναι συμπαγής, υπάρχουν υποδίκτυο h_j και $\omega \in G_x$ έτσι, ώστε $h_j \to \omega$. Άρα $g_j \to g\omega^{-1}$. Ισχύει $g\omega^{-1} \in C$, διότι, στην αντίθετη περίπτωση, θα υπήρχε $k \in I$ έτσι, ώστε $g\omega^{-1} \notin G_k$. Αλλά $g_j \to g\omega^{-1}$. Άρα υπάρχει δείκτης $i \geq k$ έτσι, ώστε $g_i \in G \setminus G_k$, πράγμα άτοπο, αφού $g_i \in G_i \subseteq G_k$. Έτσι $gx = g\omega^{-1}x \in C(x)$.

Έστω, τώρα, ένα δίκτυο $g_i C$ της G/C. Επειδή ο $H\Sigma(G(x))$ είναι συμπαγής, υπάρχουν υποδίκτυο g_j και $g \in G$ έτσι, ώστε $g_j(C(x)) \to g(C(x))$. Αν U είναι μια σχετικά συμπαγής ανοικτή περιοχή του μοναδιαίου στοιχείου της G, τότε το $\gamma_x(g \cdot U \cdot C)$ είναι ανοικτό υποσύνολο της $G(x)$ που περιέχει ολόκληρες συνεκτικές συνιστώσες της και $g_j(C(x)) \subseteq \bigcup_{\omega \in gU} \omega C(x)$ τελικά για κάθε j. Άρα, υπάρχουν $v_j \in U$ και $\lambda_j \in C$ έτσι, ώστε $g_j x = g v_j \lambda_j x$. Συνεπώς, υπάρχουν $\omega_j \in G_x$ με $g_j = g v_j \omega_j (\omega_j^{-1} \lambda_j \omega_j)$. Αφού η C είναι κανονική υποομάδα της G [26, Th. 7.1], υπάρχουν $k_j \in C$ έτσι, ώστε $\omega_j^{-1}\lambda_j\omega_j = k_j$. Άρα $g_j C = g v_j \omega_j C$. Από την συμπάγεια των $\overline{U}$ και G_x, υπάρχουν υποδίκτυο g_n και $h \in G$ έτσι, ώστε $g_n C \to hC$, απ' όπου έπεται ότι ο $H\Sigma(G)$ είναι συμπαγής.

(2) Αν η G δεν είναι συμπαγής, τότε και η C δεν είναι συμπαγής διότι, στην αντίθετη περίπτωση, από το (1) και την απόδειξη της Πρότασης 2.4 (1), θα ίσχυε $G = F \cdot C$ για κάποιο συμπαγές υποσύνολο F της G και η G θα ήταν συμπαγής, άτοπο.

(3) Άμεσο από τα [30, Lemma 4.1. και Th. 13], [31, Th. 15 και Th. 18] και [23, Cor. 9]. □

Κεφάλαιο 3

D–ευσταθείς Δράσεις

Στο κεφάλαιο αυτό, αφού αποδείξουμε καινούριες ιδιότητες των D–ευσταθών δράσεων, θα τις αξιοποιήσουμε για να δώσουμε τους γενικούς χαρακτηρισμούς των D–ευσταθών δράσεων που αναφέρθηκαν στην εισαγωγή, μέσω των οριακών συνόλων των δράσεων και της συμπεριφοράς των τροχιών στα πέρατα του χώρου. Στο 3.28, την τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου αυτού, δίνουμε μια πλήρη κατάταξη των προσανατολίσιμων και μη συμπαγών 2–πολλαπλοτήτων πεπερασμένου γένους που δέχονται μια "ελάχιστη ροή" (minimal flow), δηλαδή ένα D–ευσταθές Δ.Σ. με μια θήκη τροχιάς: πρόκειται για τις επιφάνειες που προκύπτουν με αφαίρεση ενός συμπαγούς και ολικά μη συνεκτικού (0–διάστατου) συνόλου από οποιαδήποτε προσανατολίσιμη και συμπαγή 2–πολλαπλότητα.

Στο κεφάλαιο αυτό η G θα θεωρείται τοπικά συμπαγής.

Ορισμός 3.1 *([33]) Μια δράση (G, X) λέγεται D–ευσταθής, αν ισχύει $D(x) = \overline{G(x)}$ για κάθε $x \in X$.*

Πρόταση 3.2 *Η δράση (G, X) είναι D–ευσταθής, αν και μόνο αν ισχύει $J(x) \subseteq \overline{G(x)}$ για κάθε $x \in X$.*

Η απόδειξη της πρότασης είναι συνέπεια της ισότητας $D(x) = G(x) \cup J(x)$.

Πρόταση 3.3 *([33, Prop. 2]) Κάθε θήκη τροχιάς είναι ελάχιστο σύνολο.*

Η επόμενη πρόταση υπάρχει στο [33, Th. 4], αλλά όχι αποδεδειγμένη με αλάνθαστες διαδικασίες.

Πρόταση 3.4 *Έστω (G,X) μια D–ευσταθής δράση μιας σ–συμπαγούς ομάδας επί ενός τοπικά συμπαγούς χώρου X. Τότε, το σύνολο $\{x \in X : L(x) = J(x)\}$ είναι πυκνό στον X.*

Απόδειξη. Λόγω της Πρότασης 3.3, το σύνολο $\{x \in X : \ x \in J(x)\} = \{x \in X : \ J(x) \neq \emptyset\}$. Από την Πρόταση 1.18 (4) είναι κλειστό υποσύνολο του X. Αυτό που μένει να δείξουμε είναι ότι το σύνολο $\{x \in X : \ L(x) = J(x)\} \cap \{x \in X : x \in J(x)\}^\circ$ είναι πυκνό στο $\{x \in X : \ x \in J(x)\}^\circ$. Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού είναι εντελώς ανάλογη με την απόδειξη της Πρότασης 2.10, με την παρατήρηση ότι η D–ευστάθεια υποκαθιστά την μετρικοποιησιμότητα του X. Το μόνο σημείο διαφοροποίησης είναι εκείνο, στο οποίο η τομή των περιοχών δεν θα είναι απαραίτητα μονοσύνολο. Αλλά, αν επιλέξουμε ένα στοιχείο y της τομής, τότε υπάρχει $z \in X$ έτσι, ώστε $g_{n_k} y \to z$ και $g_{n_k} \to \infty$. Άρα $L(y) \neq \emptyset$. Αφού το $\overline{G(y)}$ είναι ελάχιστο, συμπεραίνουμε $L(y) = J(y)$. □

Πρόταση 3.5 *Αν η δράση (G,X) είναι D–ευσταθής, ο χώρος $H\Sigma(G)$ είναι συμπαγής και ο X είναι τοπικά συμπαγής, τότε κάθε συμπαγής θήκη τροχιάς είναι ευσταθής.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.11 (3) αρκεί να δείξουμε ότι $D(\overline{G(x)}) = \overline{G(x)}$ για κάθε $x \in X$. Προφανώς $\overline{G(x)} \subseteq D(\overline{G(x)})$, ενώ, αν $y \in D(z)$ για κάποιο $z \in \overline{G(x)}$, τότε $y \in D(z) = \overline{G(z)} = \overline{G(x)}$, αφού το $\overline{G(x)}$ είναι ελάχιστο σύνολο. □

Πρόταση 3.6 *Έστω (G,X) μια δράση, τότε:*

1. *Τα σύνολα*

$$\begin{aligned} M\Pi &= \{x \in X : x \in J(x)\} \\ \Sigma L &= \{x \in X : L(x) \neq \emptyset \text{ και συμπαγές}\} \end{aligned}$$

   περιέχουν ολόκληρες θήκες τροχιών.

2. *Το σύνολο $\Pi = X \setminus M\Pi$ είναι ανοικτό.*

Απόδειξη. Τα σύνολα $M\Pi$, Π και ΣL είναι, προφανώς, αμετάβλητα. Από την Πρόταση 1.18 (4), το $M\Pi$ είναι κλειστό και άρα περιέχει ολόκληρες θήκες τροχιών. Αν $x \in \Sigma L$ και $y \in \overline{G(x)}$, τότε, αν $y \in G(x)$, $L(y) = L(x)$ και άρα το $L(y)$ είναι συμπαγές, ενώ, αν $y \in L(x)$, τότε $\overline{G(y)} \subseteq L(x)$. Αφού $L(x) \neq \emptyset$, η G δεν είναι συμπαγής και άρα $L(y) \neq \emptyset$ και συμπαγές. □

Ορισμός 3.7 *([50, 36 E]) Με $Y(X)$ θα συμβολίζουμε τον χώρο όλων των μη κενών, κλειστών υποσυνόλων ενός ομαλού χώρου $(X, \mathcal{D})$ εφοδιασμένο με την ομαλή δομή που προκύπτει αν θεωρήσουμε για βάση της όλα τα $\{(A, B) : A \subseteq D(B)$ και $B \subseteq D(A)\}$, $D \in \mathcal{D}$.*

Ορισμοί 3.8 *([41, Def. 7.1, p. 62])*

1. *Μια απεικόνιση $\mu : X \to Y(X)$ λέγεται <u>άνω ημισυνεχής</u> στο $x \in X$, αν για κάθε $V \in \mathcal{D}$ υπάρχει $U \in \mathcal{D}$ έτσι, ώστε $\mu(y) \subseteq V(\mu(x))$ για κάθε $y \in U(x)$.*

2. *Αντίστοιχα, μια απεικόνιση $\mu : X \to Y(X)$ λέγεται <u>κάτω ημισυνεχής</u> στο $x \in X$, αν για κάθε $V \in \mathcal{D}$ υπάρχει $U \in \mathcal{D}$ έτσι, ώστε $\mu(x) \subseteq V(\mu(y))$ για κάθε $y \in U(x)$.*

Από αυτά και τον ορισμό της τοπολογίας του $Y(X)$ προκύπτει η επόμενη

Πρόταση 3.9 *Μια απεικόνιση $\mu : X \to Y(X)$ είναι συνεχής, αν και μόνο αν είναι άνω και κάτω ημισυνεχής.*

Πρόταση 3.10 *Έστω X ένας ομαλοποιήσιμος και πρώτος αριθμήσιμος χώρος, με την ιδιότητα κάθε θήκη τροχιάς να είναι συμπαγής. Τότε, η απεικόνιση $\mu : X \to Y(X)$, με $\mu(x) = \overline{G(x)}$, είναι κάτω ημισυνεχής.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχουν $V \in \mathcal{D}$, $x \in X$ και $x_n \to x$ έτσι, ώστε $\mu(x) \not\subseteq V(\mu(x_n))$ για κάθε $n \in N$. Θα υπάρχουν τότε $\omega_n \in \overline{G(x)}$ έτσι, ώστε $\omega_n \notin V(\overline{G(x_n)})$ για κάθε n. Συνεπώς, από την συμπάγεια του $\overline{G(x)}$, υπάρχουν $\omega \in \overline{G(x)}$ και υποδίκτυο $\omega_j \to \omega$. Από την Πρόταση 2.2 (1) υπάρχουν $h_n \in G$ έτσι, ώστε $h_n x_n \to \omega$, οπότε $(h_n x_n, \omega_j) \in V$ τελικά για κάθε n και j, πράγμα άτοπο. □

Πρόταση 3.11 *Με ίδιες τις υποθέσεις της Πρότασης 3.5 :*

1. *Ο περιορισμός της μ στο ΣL είναι μια κλειστή και άνω ημισυνεχής συνάρτηση.*

2. *Έστω "$\approx$" η σχέση ισοδυναμίας στον ΣL που ορίζεται από τη διαμέριση των θηκών των τροχιών. Ο χώρος $\Sigma L/\approx$ είναι Hausdorff.*

3. *Η απεικόνιση πηλίκο $\pi : \Sigma L \to \Sigma L/\approx$ είναι κλειστή.*

4. *Αν ο X είναι, επιπλέον, πρώτος αριθμήσιμος, τότε ο χώρος πηλίκο $\Sigma L/\approx$ είναι ομοιομορφικός με τον $\mu(\Sigma L)$.*

5. *Σε κάθε περίπτωση, το σύνολο ΣL είναι ανοικτό.*

Απόδειξη. (1) Έστω B ένα κλειστό υποσύνολο του ΣL και $\mu(x_i) \in \mu(B)$, $x_i \in B$, ένα δίκτυο έτσι, ώστε $\mu(x_i) \to \mu(x)$ για κάποιο $x \in \Sigma L$. Από την ευστάθεια του $\overline{G(x)}$ υπάρχει μια σχετικά συμπαγής, αμετάβλητη περιοχή U του $\overline{G(x)}$ έτσι, ώστε $\overline{G(x_i)} \subseteq U$, αφού τα $V(\overline{G(x)})$, $V \in \mathcal{D}$ αποτελούν βάση περιοχών του $\overline{G(x)}$ (πρβλ. [13, Cor., p. 203]). Έτσι, υπάρχουν υποδίκτυο x_j και $\omega \in X$ έτσι, ώστε $x_j \to \omega$. Άρα, το $\overline{G(\omega)}$ είναι συμπαγές και συνεπώς $\omega \in B$. Επιπλέον, αφού ο $Y(X)$ είναι Hausdorff, ισχύει $\mu(x) = \mu(\omega)$ απ' όπου έπεται $\mu(x) \in \mu(B)$.

Η μ είναι άνω ημισυνεχής, διότι, αν $x_i \to x$, για κάθε $V \in \mathcal{D}$ θα ισχύει $\overline{G(x_i)} \subseteq V(\overline{G(x)})$, τελικά για κάθε i, εξαιτίας της ευστάθειας του $\overline{G(x)}$.

(2) Έστω x_1 και $x_2 \in \Sigma L$ έτσι, ώστε $\overline{G(x_1)} \neq \overline{G(x_2)}$, οπότε $\overline{G(x_1)} \cap \overline{G(x_2)} = \emptyset$. Από το [13, Prop. 4, p. 203], υπάρχει $V \in \mathcal{D}$ έτσι, ώστε $V(\overline{G(x_1)}) \cap V(\overline{G(x_2)}) = \emptyset$. Αρκεί να δειχθεί ότι τα σύνολα $V_i = \{x \in V(\overline{G(x_i)}) : \overline{G(x)} \subseteq V(\overline{G(x_i)})\}$, $i = 1,2$ είναι ανοικτά και περιέχουν ολόκληρες θήκες τροχιών. Αυτό, όμως, επιτυγχάνεται εύκολα, αν επιλέξουμε $V \in \mathcal{D}$ έτσι, ώστε τα $V(\overline{G(x_i)})$, $i = 1,2$ να είναι σχετικά συμπαγή, αφού τότε το $\overline{G(x)}$ θα είναι ευσταθές για κάθε $x \in V_i$.

(3) Έστω B ένα κλειστό υποσύνολο του ΣL. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\pi^{-1}(\pi(B)) = \{x \in \Sigma L :$ υπάρχει $\omega_x \in B$ με $x \in \overline{G(\omega_x)}\}$ είναι κλειστό. Έστω $x_i \in \pi^{-1}(\pi(B))$ και $x_i \to x$. Από την ευστάθεια του $\overline{G(x)}$, υπάρχουν $\omega \in B$ και υποδίκτυο $\omega_j \to \omega$ έτσι, ώστε $x_j \in \overline{G(\omega_j)}$. Επειδή $\overline{G(\omega_j)} = J(\omega_j)$, από την Πρόταση 1.18 (4), προκύπτει $x \in J(\omega) = \overline{G(\omega)}$.

(4) Προφανές από το [50, Th. 9.2] και τις Προτάσεις 3.10 και 3.11 (1).

(5) Άμεσο από την ευστάθεια του $\overline{G(x)}$ για $x \in \Sigma L$ [Πρόταση 3.5]. □

Πόρισμα 3.12 *Αν ο X ικανοποιεί τις υποθέσεις της Πρότασης 2.11 (1) (π.χ., αν είναι τοπικά συμπαγής και δεύτερος αριθμήσιμος) και η G είναι όπως στην Πρόταση 3.5, τότε* *το σύνολο $\{x \in X :$ το $\overline{G(x)}$ είναι ευσταθές$\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X και περιέχει ολόκληρες θήκες τροχιών.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.11 (4), αν το $\overline{G(x)}$ είναι ευσταθές, τότε ή $x \in \Sigma L$ ή το $\overline{G(x)}$ είναι ανοικτό και κλειστό. □

Πρόταση 3.13 *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και (G, X) μία δράση. Αν η απεικόνιση $\pi : X \to X/\approx$, με $\pi(x) = \overline{G(x)}$, είναι κλειστή, όπου με $X/\approx$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{\overline{G(y)} : y \in X\}$ με την τοπολογία–πηλίκο που επάγει η π, τότε κάθε θήκη τροχιάς είναι ευσταθής.*

Απόδειξη. Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του X έτσι, ώστε $\overline{G(x)} \subseteq U$. Προφανώς $\pi^{-1}(\overline{G(x)}) \subseteq U$, οπότε, από το [18, 11.2 (1), p. 86], υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο V στον $X/\approx$ έτσι, ώστε $\pi(x) \in V$ και $\pi^{-1}(V) \subseteq U$. Το $\pi^{-1}(V)$ είναι ανοικτό και αμετάβλητο, αφού, αν $\omega \in \pi^{-1}(V)$, τότε $\pi(g\omega) = \pi(\omega) \in V \Rightarrow g\omega \in \pi^{-1}(V)$. □

Πρώτος χαρακτηρισμός και δομή των D–ευσταθών δράσεων.

Θεώρημα 3.14 *Έστω (G, X) μια δράση μιας συνεκτικής και τοπικά συμπαγούς τοπολογικής ομάδας G επί ενός τοπικά συμπαγούς χώρου X.*

(α) *Η δράση (G, X) είναι D–ευσταθής, αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες (1)-3(c), στις οποίες διατηρείται ο συμβολισμός από την Πρόταση 3.6:*

1. *Η δράση (G, Π) είναι γνήσια ή, ισοδύναμα, ο χώρος G/Π είναι Hausdorff.*
2. *Αν $\Sigma L \neq \emptyset$, η απεικόνιση $\mu : X \to Y(X)$, με $\mu(x) = \overline{G(x)}$, είναι άνω ημισυνεχής στο ΣL.*
3. *Για κάθε $x \in M\Pi \setminus \Sigma L$ το $J(x)$*
   - *(a) είναι συνεκτικό*
   - *(b) περιέχει αριθμήσιμο πλήθος από διακεκριμένες θήκες τροχιών, και*
   - *(c) αν περιέχει κάποιο ω με $L(\omega)$ μη συμπαγές, η απεικόνιση $\pi : J(x) \to J(x)/\approx$ με $\pi(\alpha) = \overline{G(\alpha)}$, είναι κλειστή, όπου με $J(x)/\approx$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{\overline{G(y)} : y \in J(x)\}$ με την τοπολογία–πηλίκο που επάγει η π.*

(β) *Οι παραπάνω πέντε συνθήκες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.*

Απόδειξη. (α) Το ευθύ είναι άμεσο από την Πρόταση 3.11. Για την απόδειξη του αντιστρόφου εργαζόμασθε ως εξής:

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι ο G/Π είναι Hausdorff, αν και μόνο αν ισχύει $J_\Pi(x) \subseteq G(x)$ για κάθε $x \in X$. Αλλά $x \notin J(x)$ για κάθε $x \in \Pi$ και $J_\Pi(x) \subseteq J(x)$. Άρα, η δράση (G, Π) είναι Cartan (πρβλ. [20]) με χώρο τροχιών Hausdorff και, κατά συνέπεια, γνήσια.

Θα δείξουμε ότι η δράση $(G, \Sigma L)$ είναι D–ευσταθής. Έστω $x \in \Sigma L$ και $y \in J(x)$. Τότε, υπάρχουν $g_i \to \infty$ και $x_i \to x$ έτσι, ώστε $g_i x_i \to y$. Από τη συνθήκη (2) και την τοπική συμπάγεια του X, το ΣL είναι ανοικτό, ενώ, από την Πρόταση 3.6, είναι και αμετάβλητο. Άρα $x_i \in \Sigma L$ και $g_i x_i \in \Sigma L$ τελικά για κάθε i. Από την άνω ημισυνέχεια της μ (συνθήκη 2), συνάγεται ότι για κάθε $V \in \mathcal{D}$ (κάθε τοπικά συμπαγής χώρος είναι ομαλοποιήσιμος [50, Th. 19.3, Th. 38.2]) ισχύει $\mu(g_i x_i) \subseteq V(\overline{G(x)})$, άρα $y \in \overline{V(\overline{G(x)})}$. Συνεπώς $y \in \overline{G(x)} \subseteq \Sigma L$ [Πρόταση 3.6 (1)]. Άρα, αφ' ενός μεν $J(x) \subseteq \overline{G(x)}$ και αφ' ετέρου, $J_{\Sigma L}(x) = J(x)$, οπότε η δράση $(G, \Sigma L)$ είναι D–ευσταθής.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in M\Pi \setminus \Sigma L$ ισχύει $J(x) = \overline{G(x)}$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Έστω $x \in M\Pi \setminus \Sigma L$ έτσι, ώστε $L(y) = \emptyset$ για κάθε $y \in J(x)$. Αν $J(x) \neq G(x)$, τότε $J(x) \neq G(y)$ για κάθε $y \in J(x)$, αφού $x \in J(x)$. Άρα, κάθε $J(x) \setminus G(y)$ είναι ανοικτό και πυκνό στο $J(x)$. Πράγματι, αρκεί να υπάρχει δίκτυο $\omega_i \in J(x) \setminus G(y)$ έτσι, ώστε $\omega_i \to gy$ για κάποιο $g \in G$, που συμβαίνει, διότι, σε αντίθετη περίπτωση, το $G(y)$ θα ήταν ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του $J(x)$, αφού $L(y) = \emptyset$, οπότε από τη συνεκτικότητα του $J(x)$ (συνθήκη 3 (a)), θα είχαμε $J(x) = G(y)$, πράγμα άτοπο. Από τη συνθήκη 3 (b), υπάρχει ακολουθία $x_n \in J(x)$ έτσι, ώστε $J(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G(x_n)$. Από το Θεώρημα Baire [18, Th. 10.1, p. 249], το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty}(J(x) \setminus G(x_n)) = \emptyset$ θα ήταν πυκνό στο $J(x)$, άτοπο. Άρα $J(x) = G(x)$.

Έστω, τώρα, $x \in M\Pi \setminus \Sigma L$ έτσι, ώστε να υπάρχει $y \in J(x)$ με $L(y) \neq \emptyset$. Ισχύει $J(x) \cap \Sigma L = \emptyset$, διότι, αν $z \in J(x) \cap \Sigma L$, θα είχαμε $x \in J(z) \subseteq \Sigma L$, άτοπο. Άρα το $L(y)$ δεν είναι συμπαγές.

Θα δείξουμε, ότι κάθε $\overline{G(\omega)}$, $\omega \in J(x)$ είναι ελάχιστο σύνολο. Πράγματι, αν $b \in \overline{G(\omega)}$, τότε $\overline{G(b)} \subseteq J(x)$. Από τη συνθήκη 3 (c) και την Πρόταση 3.13, το $\overline{G(b)}$

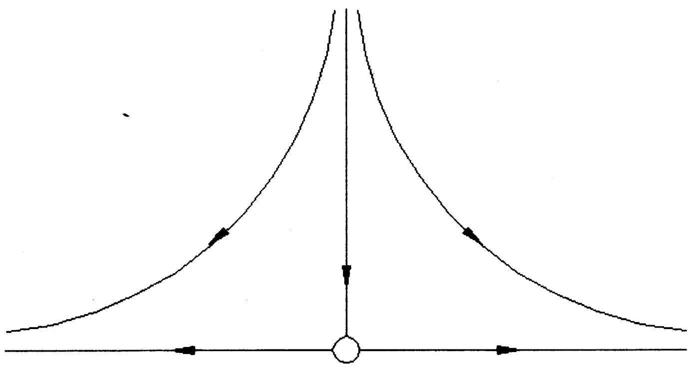
είναι ευσταθές στο $J(x)$. Επειδή $b \in \overline{G(\omega)}$, υπάρχει $g_i \in G$ έτσι, ώστε $g_i\omega \to b$. Από την ευστάθεια του $\overline{G(b)}$ στο $J(x)$ και επειδή $g_i\omega \in J(x)$, για κάθε $V \in \mathcal{D}$ ισχύει $G(g_i\omega) = G(\omega) \subseteq V(\overline{G(b)})$, οπότε $\omega \in \overline{G(b)}$ και άρα $\overline{G(\omega)} = \overline{G(b)}$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι υπάρχει $\omega \in J(x)$ έτσι, ώστε $J(x) = \overline{G(\omega)}$. Αν όχι, θα είχαμε $J(x) \setminus \overline{G(\omega)} \neq \emptyset$ για κάθε $\omega \in J(x)$. Επιπλέον, το $J(x) \setminus \overline{G(\omega)}$ είναι ανοικτό και πυκνό στο $J(x)$. Ισχύει $\overline{G(y)} = \overline{G(\omega)}$ για κάθε $y \in \overline{G(\omega)}$ και το $J(x) \setminus \overline{G(\omega)}$ είναι αμετάβλητο, επομένως, για να δείξουμε ότι το $J(x) \setminus \overline{G(\omega)}$ είναι πυκνό, αρκεί να υπάρχουν $y \in \overline{G(\omega)}$ και δίκτυο $\omega_i \in J(x) \setminus \overline{G(\omega)}$ έτσι, ώστε $\omega_i \to y$. Τέτοια ω_i και $y \in \overline{G(\omega)}$ υπάρχουν, διότι, σε αντίθετη περίπτωση, από τη συνεκτικότητα του $J(x)$, θα είχαμε $J(x) = \overline{G(\omega)}$, άτοπο.

Όπως και προηγουμένως, υπάρχει ακολουθία $x_n \in J(x)$ έτσι, ώστε $J(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{G(x_n)}$ και, από το Θεώρημα Baire, το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty}(J(x) \setminus \overline{G(x_n)}) = \emptyset$ θα είναι πυκνό στο $J(x)$, άτοπο. Άρα υπάρχει $\omega \in J(x)$ έτσι, ώστε $J(x) = \overline{G(\omega)}$. Από τα προηγούμενα, επειδή $x \in J(x)$ και το $\overline{G(\omega)}$ είναι ελάχιστο, $J(x) = \overline{G(x)}$.

Τέλος θα δείξουμε ότι αν $x \in \Pi$ ισχύει $J(x) = \emptyset$. Αν $x \in \Pi$ και $y \in J(x)$, έχουμε $y \in M\Pi$, αφού το Π είναι ανοικτό και αμετάβλητο [Πρόταση 3.6 (2)] και η δράση (G, Π) είναι γνήσια (συνθήκη 1). Όπως δείξαμε, ισχύει $J(y) = \overline{G(y)}$, επομένως το $J(y)$ είναι σε κάθε περίπτωση ελάχιστο σύνολο. Έτσι $x \in J(y) \subseteq M\Pi$, που είναι άτοπο. Άρα $J(x) = \emptyset$ και, κατά συνέπεια, $D(x) = \overline{G(x)}$. □

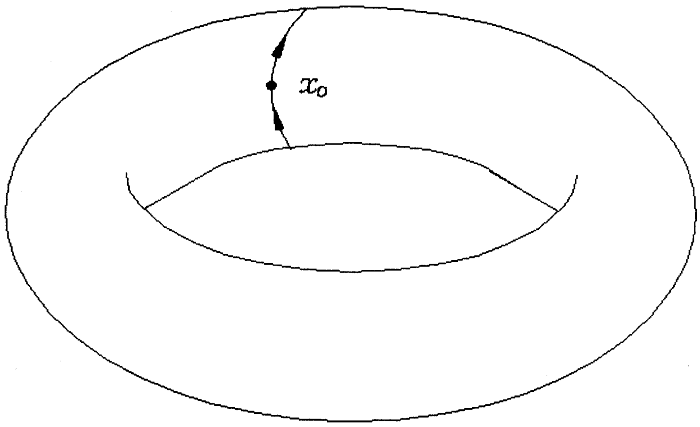
(β) Οι ανεξαρτησία των συνθηκών 1-3(c) αποδεικνύεται με τα παρακάτω παραδείγματα:



Παράδειγμα 3.15 *Στο παράδειγμα αυτό, για το $\Delta.\Sigma.$ ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες, εκτός από την πρώτη και, φυσικά, δεν είναι D-ευσταθές.*

Έστω $X = \{(x,y) : y \geq 0\} \setminus \{(0,0)\}$ και το Δ.Σ. είναι αυτό που υποδεικνύεται από το παραπάνω σχήμα. Συγκεκριμένα ισχύει $M\Pi = \emptyset$, $\Pi = X$, $\Sigma L = \emptyset$ και το Δ.Σ. (R, Π) δεν είναι παραλληλήσιμο.

Παράδειγμα 3.16 *Στο παράδειγμα αυτό ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες εκτός από την δεύτερη και το θεωρούμενο Δ.Σ. δεν είναι D–ευσταθές.*



Έστω (R, T^2, γ_α), με

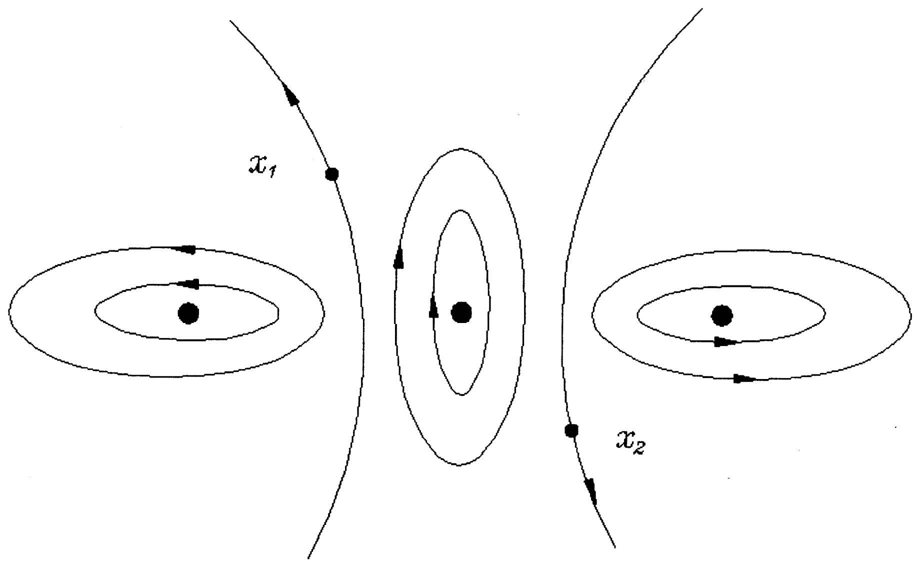
$$\gamma_\alpha(t, (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})) = (e^{2\pi i(t+x)}, e^{2\pi i(\alpha t+y)}), \quad \alpha \in R \setminus Q,$$

μια άρρητη ροή στη 2–διάστατη "σπείρα" T^2 (: torus). Έστω V μια περιοχή του $x_0 \in T^2$ και $\sigma : T^2 \to [0,1]$ μια C^∞ συνάρτηση, με $\sigma(x) = 1$ για $x \notin V$ και $\sigma(x_0) = 0$ [12, Th. 3.4, p. 67]. Πολλαπλασιάζοντας το διανυσματικό πεδίο της άρρητης ροής με την σ, παίρνουμε ένα Δ.Σ. με το x_0 ως σταθερό σημείο. Για το καινούργιο Δ.Σ. ισχύει $M\Pi = \Sigma L = T^2$. Προφανώς $\overline{C(x)} = T^2$ για κάθε $x \in T^2 \setminus \{x_0\}$ και οι συνθήκες 1-3(c) εκτός από την (2) ισχύουν άμεσα, ενώ η (2) δεν ισχύει διότι το $\{x_0\}$ δεν είναι ευσταθές.

Παράδειγμα 3.17 *Στο παράδειγμα αυτό ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες εκτός από την 3 (a) και το Δ.Σ. δεν είναι D–ευσταθές.*

Το Δ.Σ. είναι αυτό που υποδεικνύεται από το παρακάτω σχήμα, δηλαδή, έχουμε ένα Δ.Σ. στο R^2 που αποτελείται από τρείς τομείς περιοδικών τροχιών οι οποίοι διαχωρίζονται από δύο τροχιές ομοιομορφικές με το R. Εδώ $M\Pi = X$ και $\Sigma L =$

$M\Pi \setminus \{R(x_1) \cup R(x_2)\}$. Οι συνθήκες (1) και 3 (c) ικανοποιούνται κατά τετριμμένο τρόπο. Η (2) ικανοποιείται, διότι κάθε $\overline{R(x)}$ με $x \in \Sigma L$ είναι ευσταθές. Η συνθήκη 3

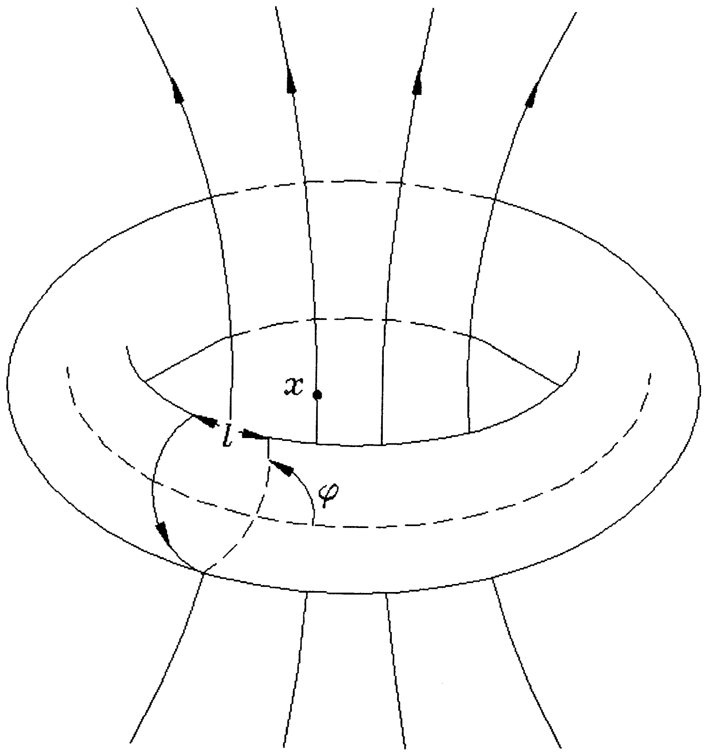


(b) ικανοποιείται επίσης, αφού $J(x_1) = R(x_1) \cup R(x_2)$. Η 3 (a) δεν ισχύει, διότι το $J(x_1) = R(x_1) \cup R(x_2)$ δεν είναι συνεκτικό.

Παράδειγμα 3.18 *Στο παράδειγμα που ακολουθεί ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες εκτός από την 3 (b) και το Δ.Σ. δεν είναι D–ευσταθές.*

Το Δ.Σ. είναι αυτό που υποδεικνύεται από το παρακάτω σχήμα, δηλαδή, έχουμε ένα Δ.Σ. ορισμένο σ' ένα υποσύνολο του R^3 που αποτελείται από δύο τομείς που διαχωρίζονται μεταξύ τους από ένα υπερβολοειδές.

Ο πρώτος τομέας αποτελείται από το υπερβολοειδές και το εσωτερικό του και το περιορισμένο Δ.Σ. είναι παραλληλήσιμο. Ο δεύτερος τομέας αποτελείται από μια "συνεχή" οικογένεια σπειρών. Σε κάθε μια "σπείρα" θεωρούμε μια άρρητη ροή, όπως στο Παράδειγμα 3.16 έτσι, ώστε να τέμνει τον ισημερινό της αντίστοιχης "σπείρας" σε γωνία φ που τείνει στο $\frac{\pi}{2}$ καθώς πλησιάζουμε στο υπερβολοειδές, ενώ το αντίστοιχο l τείνει στο 0, δηλαδή, οι τροχιές γίνονται "πυκνότερες" (τρισδιάστατο ανάλογο του Παραδείγματος 3.17). Έτσι το Π αποτελείται από όλα τα εσωτερικά σημεία του υπερβολοειδούς, ενώ το ΣL από όλα τα εξωτερικά. Προφανώς το (R, Π) είναι παραλληλήσιμο και η απεικόνιση μ είναι άνω ημισυνεχής. Αν $x \in M\Pi \setminus \Sigma L$, το $J(x)$ είναι ολόκληρο το υπερβολοειδές επομένως, αφενός μεν είναι συνεκτικό, αφετέρου αποτελείται από υπεραριθμήσιμο πλήθος από διακεκριμένες θήκες τροχιών, οπότε δεν ισχύει η 3 (b), ενώ η 3 (c) ικανοποιείται κατά τετριμμένο τρόπο.



Παράδειγμα 3.19 *Στο επόμενο παράδειγμα ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες, εκτός από την 3 (c) και πάλι το Δ.Σ. δεν είναι D–ευσταθές.*

Σε μια "ροή Denjoy" [16] υπάρχει ένα ελάχιστο γνήσιο υποσύνολο A του T^2, το οποίο δεν είναι σταθερό σημείο ή περιοδική τροχιά, και ισχύει $L^-(x) = L^+(x) = A$ για κάθε $x \in T^2$. 'Οπως και στο Παράδειγμα 3.16, δημιουργούμε ένα σταθερό σημείο p στο A. Θεωρούμε τον περιορισμό του Δ.Σ. στον $X = (A \setminus \{p\}) \cup \overline{R(x_0)}$ για κάποιο $x_0 \notin A$. Επειδή $L^-(x_0) = L^+(x_0) = A \setminus \{p\}$, ο χώρος X είναι συνεκτικός και τοπικά συμπαγής. Ισχύει $\Pi = R(x_0)$ και $\Sigma L = \emptyset$, οπότε η συνθήκη (2) ικανοποιείται κατά τετριμμένο τρόπο. Το Δ.Σ. (R, Π) είναι, προφανώς, παραλληλήσιμο. Για την 3 (a): αν $x \in M\Pi = A \setminus \{p\}$, το $J(x) = (A \setminus \{p\}) \cup \overline{R(x_0)} = X$ είναι συνεκτικό. Η 3 (b) ικανοποιείται, διότι $J(x) = \overline{R(x_0)}$. Η 3 (c) δεν ικανοποιείται, διότι το $J(x) = X$ περιέχει το $\overline{R(x)}$ που δεν είναι ευσταθές [Πρόταση 3.13].

Η συμπεριφορά της δράσης στα πέρατα του υποκείμενου χώρου.

Ορισμός 3.20 *Έστω X ένας τοπικά συμπαγής χώρος και βX η Stone–Čech συμπαγότητα του. Η* <u>*συμπαγότητα με τα πέρατα*</u> *(end point compactification ή Freudenthal compactification [50, 41 B]) X^+ του X είναι ο χώρος πηλίκο της βX ως προς τη σχέση ισοδυναμίας με κλάσεις τα μονοσύνολα του $X \subseteq \beta X$ και τις συνεκτικές συνιστώσες του $\beta X \setminus X$.*

Πρόταση 3.21 *([35, 3.9]) Το σύνολο των* <u>*περάτων*</u> *(ends) του X, δηλαδή το σύνολο $X^+ \setminus X$ είναι ολικά μη συνεκτικό και, αν ο X είναι δεύτερος αριθμήσιμος, η X^+ είναι η "μέγιστη" συμπαγότητα με την ιδιότητα αυτή.*

Πρόταση 3.22 *([1, 2.3]) Αν δοθεί μια δράση (G, X) μιας συνεκτικής ομάδας επί ενός τοπικά συμπαγούς και* <u>*συνεκτικού*</u> *χώρου X, τότε η δράση επεκτείνεται συνεχώς σε μια δράση (G, X^+) στη συμπαγότητα με τα πέρατα X^+ του X έτσι, ώστε τα πέρατα να είναι σταθερά σημεία.*

Δεύτερος χαρακτηρισμός των D–ευσταθών δράσεων.

Πρόταση 3.23 *Έστω (G, X) μια δράση μιας συνεκτικής και τοπικά συμπαγούς τοπολογικής ομάδας G επί ενός συνεκτικού και τοπικά συμπαγούς χώρου X. Τότε, η δράση (G, X) είναι D–ευσταθής, αν και μόνο αν η απεικόνιση $\mu : X \to Y(X^+)$ με $\mu(x) = \overline{G(x)}^+$ (: η θήκη στον X^+) είναι άνω ημισυνεχής.*

Απόδειξη. Έστω ότι η δράση είναι D–ευσταθής. Η ομαλή δομή του X^+ είναι η μοναδική ομαλή δομή που είναι συμβιβαστή με την τοπολογία του και μια βάση για την ομαλή δομή αυτή αποτελείται από τα σύνολα της μορφής $V = \bigcup_{i=1}^{n}(U_i \times U_i)$ [13, Th. 1, p. 199], όπου $X^+ = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ και τα U_i είναι ανοικτά υποσύνολα του X^+ [13, Remark 1]. Αφού το $X^+ \setminus X$ είναι συμπαγές και ολικά μη συνεκτικό, είναι μηδενοδιάστατο [50, Th. 29.7]. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε U_i τέτοια, ώστε $\partial U_i \subseteq X$ και άρα $\partial V \subseteq X \times X$.

Αν το B είναι ένα κλειστό υποσύνολο του X^+ και το V όπως παραπάνω, τότε $\partial V(B) \subseteq X$: αν $x \in \partial V(B)$, υπάρχει δίκτυο $x_i \in V(B)$ έτσι, ώστε $x_i \to x$, επομένως υπάρχει δίκτυο $b_i \in B$ έτσι, ώστε $(b_i, x_i) \in V$, και (εξαιτίας της συμπάγειας του B)

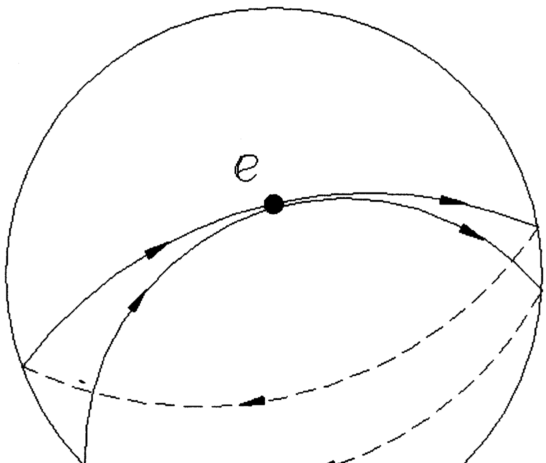
υπάρχουν υποδίκτυα b_j, x_j έτσι, ώστε $(b_j, x_j) \to (b, x)$ για $b \in B$, οπότε $(b_j, x_j) \in V$, ενώ, $(b, x) \notin V$ αφού $x \notin V(B)$. 'Αρα $(b, x) \in \partial V \subseteq X \times X$ και συνεπώς το $x \in X$.

Αν η μ δεν ήταν άνω ημισυνεχής, θα υπήρχαν V και $x \in X$ έτσι, ώστε $\mu(x_i) \nsubseteq V(\mu(x))$ για κάποιο δίκτυο $x_i \to x$. Από τα προηγούμενα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\partial V(\overline{G(x)}^+) \subseteq X$. Συνεπώς, θα υπήρχαν $\omega_i \in \overline{G(x_i)}^+$ έτσι, ώστε $\omega_i \notin V(\overline{G(x)}^+)$. Από τη συνεκτικότητα καθενός από τα $G(x_i)$, υπάρχει δίκτυο $h_i \in G$ έτσι, ώστε $h_i x_i \in \partial V(\overline{G(x)}^+)$ και επειδή το $\partial V(\overline{G(x)}^+)$ είναι συμπαγές, θα υπήρχε $b \in \partial V(\overline{G(x)}^+)$ με $b \in D(x)$, άτοπο.

Αντίστροφα, αν η μ είναι άνω ημισυνεχής και $y \in J(x)$, υπάρχουν $x_i \to x$ και $g_i \to \infty$ έτσι, ώστε $g_i x_i \to y$. 'Αρα για κάθε V έχουμε $\mu(g_i x_i) = \mu(x_i) \subseteq V(\overline{G(x)}^+)$. Συνεπώς $y \in \overline{G(x)}^+ \cap X = \overline{G(x)}$ και, λόγω της Πρότασης 3.2, η δράση (G, X) είναι D–ευσταθής. □

Πρόταση 3.24 *Με τις υποθέσεις της προηγούμενης πρότασης, αν ο X^+ είναι πρώτος αριθμήσιμος, η προηγούμενη απεικόνιση μ είναι και κάτω ημισυνεχής, δηλαδή συνεχής.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεσο πόρισμα της Πρότασης 3.10. □



Παρατηρήσεις 3.25 *1. Ο X θεωρείται με την ομαλή δομή που επάγει ο X^+. Μια συνθήκη που εξασφαλίζει την πρώτη αριθμησιμότητα του X^+ είναι η μετρικοποιησιμότητα του X [29, Th. 42, p. 116] (: "Η Freudenthal συμπαγότητα ενός*

περιφερειακά–συμπαγούς (rim–compact) χώρου X είναι μετρικοποιήσιμη, αν και μόνο αν ο X είναι διαχωρίσιμος, μετρικοποιήσιμος και ο $H\Sigma(X)$ είναι συμπαγής").

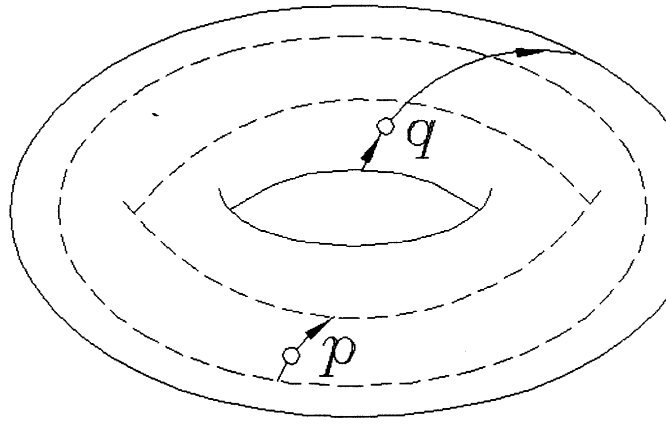
2. *Η συνέχεια της προηγούμενης απεικόνισης μ δεν εξασφαλίζει και την ευστάθεια του $\overline{G(x)}^+$ στον X^+, όπως δείχνει το επόμενο παράδειγμα:*

Αν $X = R^2$ και το Δ.Σ. είναι παραλληλήσιμο, τότε το επεκτεταμένο Δ.Σ. στον $X^+ = S^2$ είναι αυτό που υποδεικνύεται από το παραπάνω σχήμα. Προφανώς, στο Δ.Σ. αυτό η μ είναι συνεχής, αλλά το $\overline{G(x)}^+$ μη ευσταθές.

Πρόταση 3.26 *Με τις υποθέσεις της Πρότασης 3.23, αν η δράση (G,X) είναι D–ευσταθής, η απεικόνιση $\Lambda : X \setminus \Sigma L \to Y(X^+ \setminus X)$ με $\Lambda(x) \equiv (X^+ \setminus X) \cap \overline{G(x)}^+$ είναι άνω ημισυνεχής.*

Απόδειξη. Όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 3.23, αν η μ δεν ήταν άνω ημισυνεχής, θα υπήρχαν $V \in \mathcal{D}$ και $x_i \to x \in X \setminus \Sigma L$ έτσι, ώστε $\Lambda(x_i) \nsubseteq V(\Lambda(x))$ [50, 11 D(c)]. Από τη συμπάγεια του $\overline{G(x)}^+$, υπάρχουν συμπαγή υποσύνολα U_i, $i = 1, \ldots, n$ του X έτσι, ώστε $\overline{G(x)}^+ \subseteq V(\Lambda(x)) \cup (\bigcup_{i=1}^n U_i)$. Αφού $\Lambda(x_i) \nsubseteq V(\Lambda(x))$, υπάρχουν $\omega_i \in \Lambda(x_i)$ έτσι, ώστε $\omega_i \notin V(\Lambda(x)) \cup (\bigcup_{i=1}^n U_i)$. Άρα, υπάρχουν $g_i \in G$ και $y \in \partial(V(\Lambda(x)) \cup (\bigcup_{i=1}^n U_i))$ έτσι, ώστε $g_i x_i \to y$. Συνεπώς $y \in D(x)$, άτοπο. □

Παράδειγμα 3.27 *Στο παράδειγμα που ακολουθεί η προηγούμενη απεικόνιση Λ δεν είναι συνεχής, αν και το Δ.Σ. είναι D–ευσταθές. Επομένως, η προηγούμενη πρόταση δεν βελτιώνεται.*



Θεωρούμε το Δ.Σ. του Παραδείγματος 3.16. Στη συνέχεια "φουσκώνουμε" την "σπείρα" και δημιουργούμε άλλο ένα σταθερό σημείο $\{q\}$ σε μια άλλη τροχιά με διαδικασία ανάλογη του Παραδείγματος 3.16. Τέλος αφαιρούμε το $\{q\}$ και αφού ταυτίσουμε όλο το συνεχές που απαρτίζουν τα σημεία $\{p\}$ με ένα σημείο, το αφαιρούμε και αυτό. Το αποτέλεσμα είναι ένα D-ευσταθές Δ.Σ. στο οποίο η απεικόνιση Λ δεν είναι συνεχής (γιατί σημεία των οποίων οι τροχιές αντιστοιχούν σ' ένα πέρας συγκλίνουν σε σημείο της "εξωτερικής σπείρας", η τροχιά του οποίου αντιστοιχεί σε δύο πέρατα).

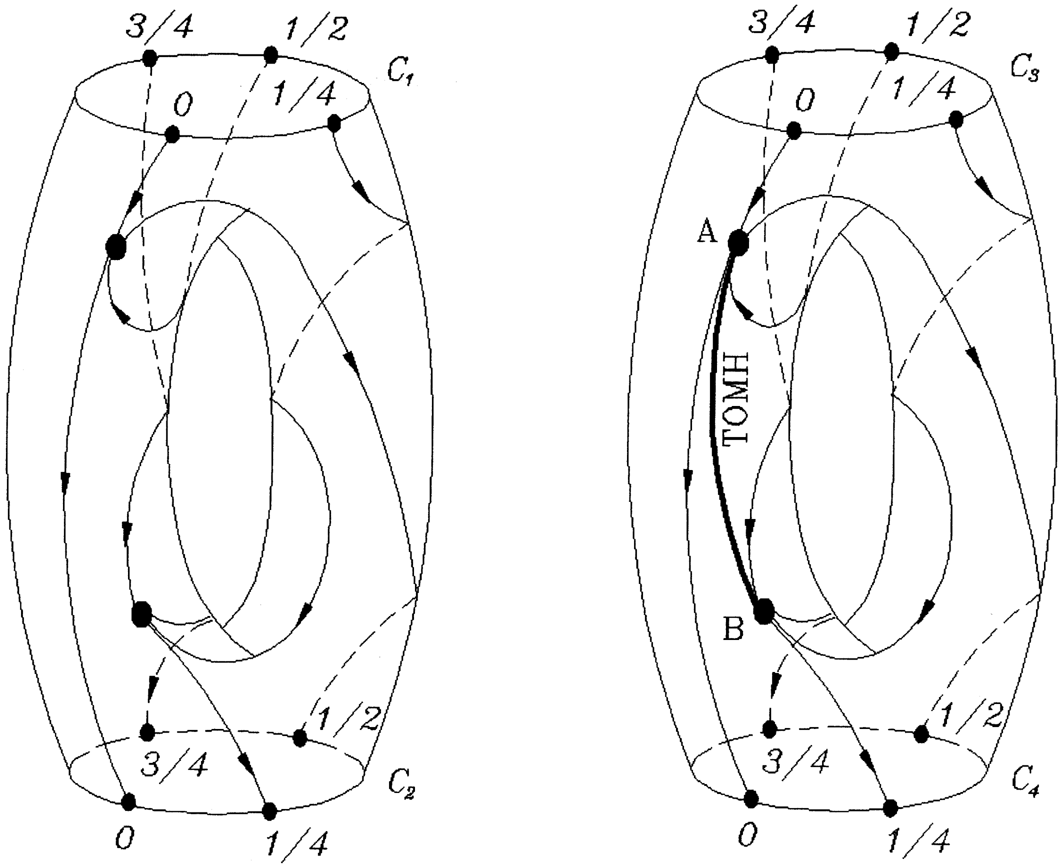
Παρατήρηση: Το προηγούμενο παράδειγμα, αναφερόμενο σε μια 3–διάστατη πολλαπλότητα, είναι το καλύτερο δυνατό: στο [38] αποδεικνύεται ότι η Λ είναι πάντα συνεχής σε D-ευσταθή Δ.Σ. πάνω σε 2–πολλαπλότητες.

Ελάχιστα (minimal) Δ.Σ. σε μη συμπαγείς, προσανατολίσιμες 2–πολλαπλότητες πεπερασμένου γένους.

3.28 Όπως ήδη έχουμε αναφέρει στην εισαγωγή, στο [38] έχει γίνει μια πλήρης μελέτη και κατάταξη όλων των D-ευσταθών Δ.Σ. σε προσανατολίσιμες 2–πολλαπλότητες πεπερασμένου γένους, εκτός από αυτές που είναι μη συμπαγή ελάχιστα σύνολα οι ίδιες (: το Δ.Σ. αποτελείται από μια θήκη τροχιάς). Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε ένα τρόπο κατασκευής τέτοιων Δ.Σ. σε κάθε μη συμπαγή επιφάνεια με θετικό γένος (για μια πλήρη κατάταξη τέτοιων Δ.Σ. πρβλ. τα [3], [4] και [5], ενώ για μια μελέτη της συμπεριφοράς στα πέρατα πρβλ. το [9]).

Από το [9, Cor. 2.2] συνάγεται ότι για μια δεδομένη (μη συμπαγή) επιφάνεια με πεπερασμένο πλήθος περάτων η εικόνα της ροής κοντά στα πέρατα εξαρτάται μόνο από τους συνδυασμούς των αντίστοιχων "δεικτών του Poincaré" των περάτων στο επεκτεταμένο Δ.Σ., ενώ η περίπτωση να έχει η επιφάνεια άπειρο πλήθος περάτων ανάγεται, κατά φυσιολογικό τρόπο, στην περίπτωση που έχουμε πεπερασμένο πλήθος από πέρατα [9, Th. 3.5].

Θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα από το [21] για να κατασκευάσουμε παραδείγματα για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς γένους και "δεικτών Poincaré" των περάτων. Τα παραδείγματα που ακολουθούν είναι για επιφάνειες γένους 3, αλλά η γενική περίπτωση αντιμετωπίζεται εντελώς ανάλογα. Άμεση συνέπεια όσων θα ακολουθήσουν, που δίνονται κατά συνοπτικό τρόπο, είναι ότι οι προσανατολίσιμες και μη συμπαγείς 2–πολλαπλότητες πεπερασμένου γένους που δέχονται μια "ελάχιστη ροή" (minimal flow) (: ένα D–ευσταθές Δ.Σ. με μια μόνο θήκη τροχιάς) είναι εκείνες, που προκύπτουν αν αφαιρέσουμε ένα συμπαγές και ολικά μη συνεκτικό (: 0–διάστατο) σύνολο από οποιαδήποτε προσανατολίσιμη και συμπαγή 2–πολλαπλότητα.

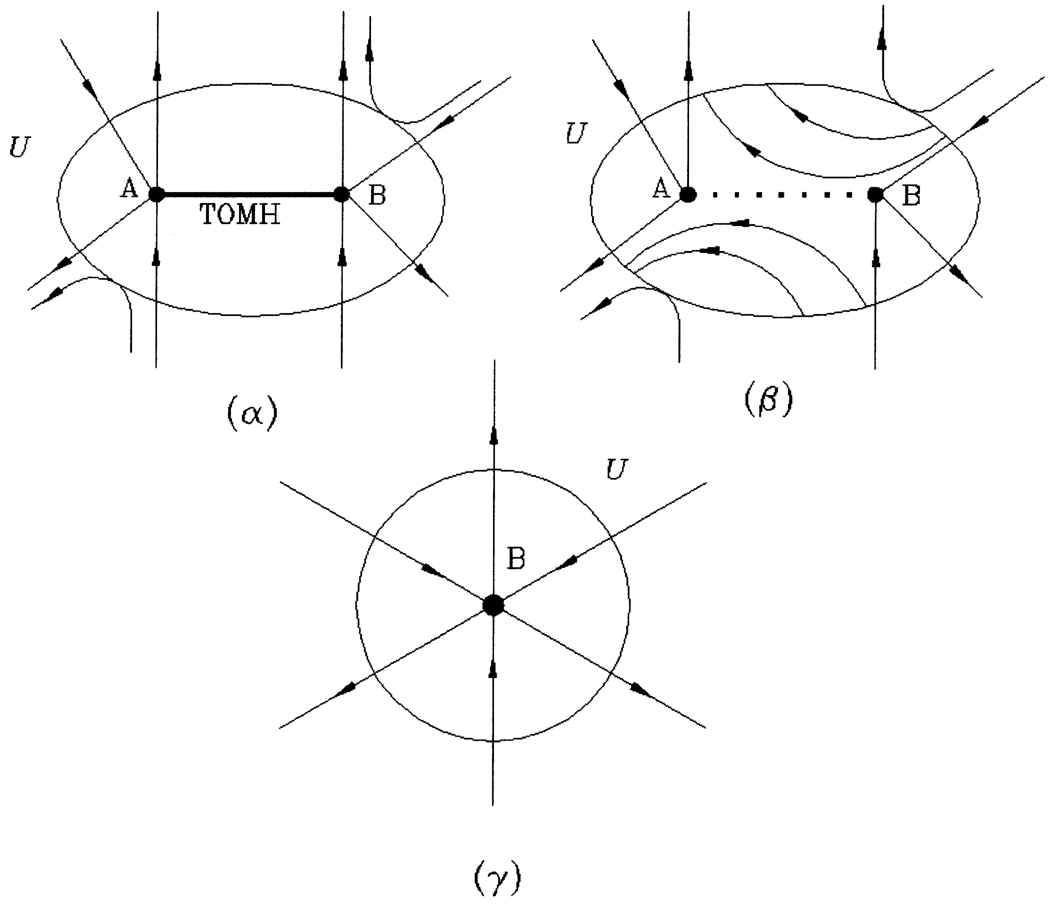


Σχ. 1

- Στο Σχ. 1 έχουμε παραμετρήσει τις καμπύλες C_i, $1 \leq i \leq 4$ έτσι, ώστε οι αντίστοιχες απεικονίσεις του Poincaré να έχουν διαφορικό ένα. Σύμφωνα με το [21], "κολλάμε" το C_2 με το C_3 και το C_4 με το C_1 μέσω της αντιστοιχίας $x \mapsto (x + \alpha) \bmod 1$ για κάποιο α άρρητο. Το τελικό αποτέλεσμα είναι μια επιφάνεια με γένος 3 που είναι ελάχιστο σύνολο. Στο Δ.Σ. που προκύπτει κάθε πέρας (: σταθερό σημείο) έχει "δείκτη Poincaré" -1, οπότε ο μέγιστος αριθμός περάτων με μη μηδενικό δείκτη είναι 4 (τα πέρατα με μηδενικό δείκτη δεν αποτελούν "ουσιώδη" σταθερά σημεία, όπως δείχνει το [9, Cor. 2.2, Fig. 3]).

- Αν το πλήθος των περάτων (που έχουν μη μηδενικό δείκτη) είναι 3, πρέπει να τροποποιήσουμε την προηγούμενη κατασκευή όπως φαίνεται στο Σχ. 2. Ακολουθεί μια σύντομη περιγραφή αυτής της κατασκευής:

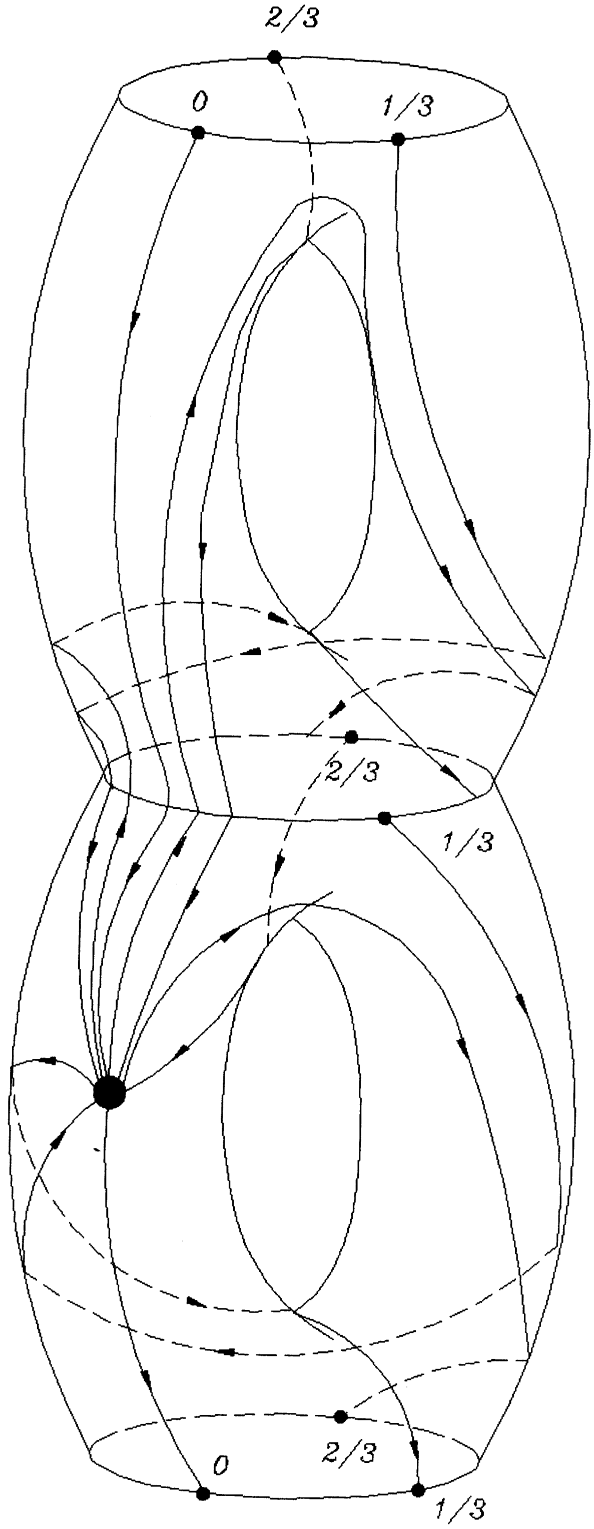
Είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε δύο διαδοχικά σταθερά σημεία A και B υπάρχει μια "τομή" που τα συνδέει (Σχ. 1). Έτσι, αν επιλέξουμε μια περιοχή U όπως στο Σχ. 2(α), μπορούμε να τροποποιήσουμε τη ροή ως ακολούθως: Πρώτα, κάνουμε κάθε σημείο της τομής σταθερό σημείο (με διαδικασία ανά-



Σχ. 2

λογη εκείνης που περιγράψαμε στο Παράδειγμα 3.16) και έπειτα, "κολλάμε" τις τροχιές κατά τον τρόπο που δείχνει το Σχ. 2(β). Επειδή η επιφάνεια είναι ελάχιστο σύνολο, μπορούμε να αποφύγουμε τη δημιουργία περιοδικών τροχιών. Τέλος, ταυτίζουμε το "ευθύγραμμο τμήμα" AB που αποτελείται από τα σταθερά σημεία από το A έως το B, με το σημείο B (Σχ. 2(γ)).

- Αν το πλήθος των περάτων είναι 2 έχουμε δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε δύο σταθερά σημεία με "δείκτη Poincaré" -2. Σ' αυτή την περίπτωση είναι αρκετό να επαναλάβουμε την προηγούμενη διαδικασία για τα εναπομείναντα δύο σημεία με δείκτη -1.

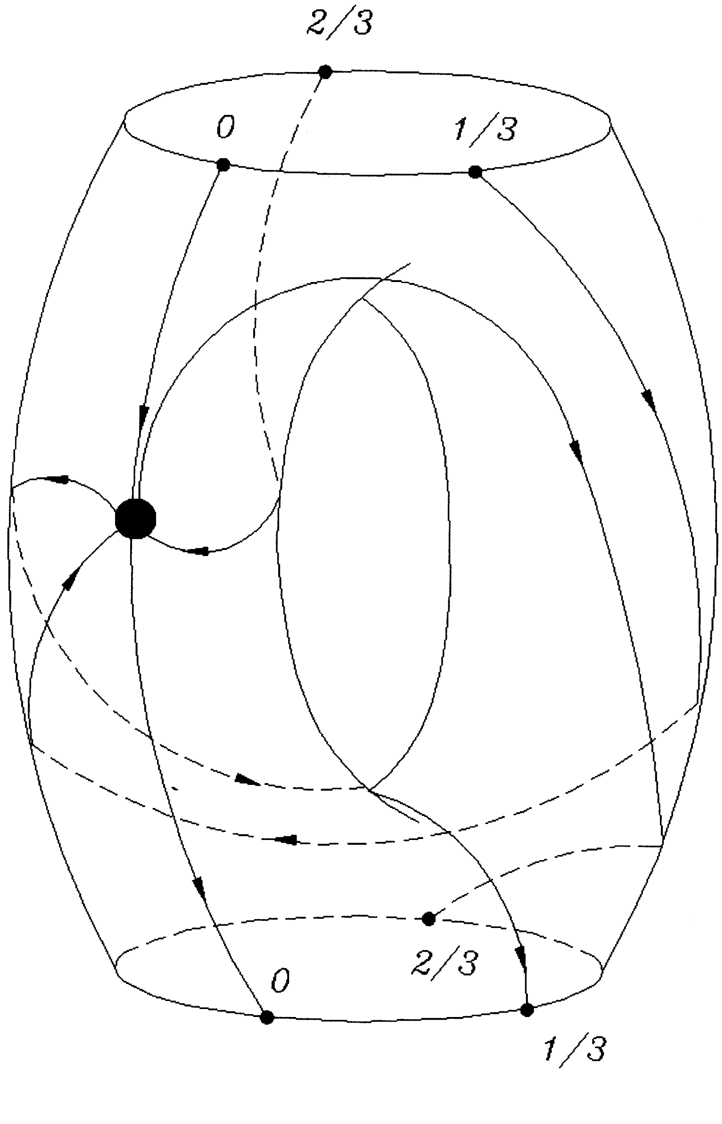


Σχ. 3

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε δύο σταθερά σημεία, ένα με δείκτη -1 και ένα με δείκτη -3. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε όπως πριν, αλλά για τα σημεία με δείκτες -1 και -2.

- Τέλος, αν έχουμε ένα μόνο πέρας, η διαδικάσια είναι εντελώς ανάλογη με την προηγούμενη. Η τελική εικόνα του Δ.Σ. είναι αυτή που περιγράφεται στο Σχ. 3.

'Αμεση εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας είναι το Παράδειγμα (b) της εικόνας (2) στο [21] για μια επιφάνεια γένους 2 με ένα πέρας (Σχ. 4).



Σχ. 4

Κεφάλαιο 4

Ισοσυνεχείς Δράσεις

Οι ισοσυνεχείς δράσεις αποτελούν μια ενδιαφέρουσα κλάση D–ευσταθών δράσεων, στην οποία περιλαμβάνονται και οι δράσεις επί μετρικών χώρων μέσω ισομετριών. Η μελέτη της δομής των δράσεων αυτών αποτελεί το αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου, τα κύρια συμπεράσματα του οποίου είναι τα Θεωρήματα 4.17, 4.29 και 4.31, όπου αναλύεται η δομή αυτή. Συμπληρωματικές πληροφορίες δίνονται σε άλλες προτάσεις, ορισμένες από τις οποίες συμπληρώνουν τη διατύπωση γνωστών προτάσεων, κυρίως για ισομετρικές δράσεις, ή/και τις γενικεύουν.

Συμβολισμός 4.1 *Αν τα U και V είναι υποσύνολα του $X \times X$, τότε $U \circ V = \{(x,y) :$ για κάποιο $z,\ (x,z) \in V$ και $(z,y) \in U\}$.*

Ορισμός 4.2 *([49]) Μια διαγώνια ομαλή δομή σ' ένα σύνολο X είναι μια συλλογή $\mathcal{D}$, από υποσύνολα του $X \times X$, τα οποία λέγονται "περιβάλλοντα σύνολα" (**surroundings**) έτσι, ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:*

1. $D \in \mathcal{D} \Rightarrow \Delta \subseteq D$, *όπου* $\Delta = \{(x,x) :\ x \in X\}$
2. $D_1,\ D_2 \in \mathcal{D} \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$
3. $D \in \mathcal{D} \Rightarrow E \circ E \subseteq D$ *για κάποιο* $E \in \mathcal{D}$
4. $D \in \mathcal{D} \Rightarrow E^{-1} \subseteq D$ *για κάποιο* $E \in \mathcal{D}$, *όπου* $E^{-1} = \{(x,y) :\ (y,x) \in E\}$
5. $D \in \mathcal{D},\ D \subseteq E \Rightarrow E \in \mathcal{D}$.

Πρόταση 4.3 *([50, Th. 35.9]) Τα ανοικτά, συμμετρικά στοιχεία της $\mathcal{D}$ αποτελούν μια βάση για την $\mathcal{D}$.*

Πρόταση 4.4 *([14, Th. 1, p. 142]) Δοθείσης μιας ομαλής δομής $\mathcal{D}$, υπάρχει μια οικογένεια από ψευδομετρικές του X που την παράγει.*

Η επόμενη πρόταση γενικεύει την [15], που αναφέρεται σε μετρικούς χώρους. Η απόδειξη που θα δώσουμε, διαφέρει ουσιαστικά εκείνης στην [15] και αναδεικνύει ορισμένες δυσκολίες που ανακύπτουν κατά τη μετάβαση από τη περίπτωση "μετρική δομή" στην "ομαλή".

Πρόταση 4.5 *Έστω (G, X) μια δράση μιας σ-συμπαγούς τοπολογικής ομάδας G επί ενός ομαλού χώρου X. Τότε, υπάρχει μια ομαλή δομή που επάγει την τοπολογία του X έτσι, ώστε κάθε στοιχείο της G να είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.*

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει σε τρία βήματα:

Βήμα 1: Έστω (G, X, γ) η δράση μιας συμπαγούς ομάδας G επί ενός ομαλού χώρου $(X, \mathcal{D})$. Τότε, υπάρχει μια νέα ομαλή δομή $\mathcal{D}^*$, που επάγει την τοπολογία του X και είναι G-αμετάβλητη, υπό την έννοια ότι υπάρχει μια βάση από περιβάλλοντα σύνολα $\{V_i,\ i \in I\}$ έτσι, ώστε $g \times g\,(V_i) = V_i$ για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη: Έστω $\{d_i\}$, $i \in I$ οι ψευδομετρικές της Πρότασης 4.4 που παράγουν την $\mathcal{D}$. Η οικογένεια των $\{d_i\}$ μπορεί να υποτεθεί κορεσμένη (saturated) [14, p. 140]. Από τη συμπάγεια της G, οι απεικονίσεις $g \mapsto d_i(gx, gy)$, $g \in G$ έχουν συμπαγείς φορείς, άρα ορίζεται η $d_i^*(x,y) = \int_G d_i(gx, gy)\, dg$. Επειδή το ολοκλήρωμα Haar είναι διγραμμικό και θετικά ορισμένο, οι $\{d_i^*\}$ είναι ψευδομετρικές. Επιπλέον, $d_i^*(\gamma_h x, \gamma_h y) = \int_G d_i(ghx, ghy)\, dg = \int_G d_i(gx, gy)\, dg = d_i^*(x,y)$, αφού το ολοκλήρωμα Haar είναι αμετάβλητο ως προς τις δεξιές μεταθέσεις. Έτσι, κάθε γ_g, $g \in G$ είναι d_i^*-ισομετρία. Θεωρούμε την ομαλή δομή $\mathcal{D}^*$ που παράγουν οι ψευδομετρικές $\{d_i^*\}$, $i \in I$. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{D}$ και η $\mathcal{D}^*$ επάγουν την ίδια τοπολογία.

Έστω $\mathcal{T}$ η επαγόμενη τοπολογία από την $\mathcal{D}$, $\mathcal{T}^*$ η επαγόμενη τοπολογία από την $\mathcal{D}^*$ και $V^*(x) = \{y \in X : d_{i_k}^*(x,y) < r,\ r > 0,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$ μια περιοχή του x στην $\mathcal{T}^*$. Αν $\delta > 0$ και $g_j \in G$, από τη συνέχεια της δράσης, υπάρχουν περιοχές N_j του g_j και $V_j(x)$ του x έτσι, ώστε $N_j V_j(x) \subseteq U(g_j x)$, όπου $U(g_j x) = \{y \in X : d_{i_k}(g_j x, y) < \delta,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$. Από τη συμπάγεια της G, υπάρχουν

N_{j_λ}, $\lambda = 1, 2, \ldots, k$ έτσι, ώστε $G = \bigcup_{\lambda=1}^{k} N_{j_\lambda}$. Θέτουμε $V(x) = \bigcap_{\lambda=1}^{k} V_{j_\lambda}(x)$ και $M_i = N_{j_i} \setminus \bigcup_{\lambda=1}^{i-1} N_{j_\lambda}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Έστω $y \in V(x)$ και $g \in G$. Υπάρχει λ έτσι, ώστε $g \in M_\lambda \subseteq N_{j_\lambda}$. Άρα

$$d_{i_k}(gx, gy) \leq d_{i_k}(gx, g_{j_\lambda}x) + d_{i_k}(g_{j_\lambda}x, gy) \leq 2\delta.$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} d^*_{i_k}(x,y) &= \int_G d_{i_k}(gx, gy)\, dg = \sum_{i=1}^{k} \int_{M_i} d_{i_k}(gx, gy)\, dg \\ &\leq 2\delta \sum_{i=1}^{k} \mu(M_i) = 2\delta\mu(G) = 2\delta \end{aligned}$$

(: λόγω της συμπάγειας της G, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu(G) = 1$, όπου μ είναι το μέτρο Haar). Επιλέγοντας δ έτσι, ώστε $2\delta < r$ έχουμε $V(x) \subseteq V^*(x)$, άρα $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}$.

Αντίστροφα, αν $\mathcal{T} \not\subseteq \mathcal{T}^*$, τότε υπάρχει μια σφαίρα $S(x,r)$ για κάποια ψευδομετρική d_k έτσι, ώστε $S_{d_i^*}(x,\epsilon) \not\subseteq S(x,r)$ για κάθε $\epsilon > 0$ και $i \in I$. Συνεπώς, για κάθε $n \in N$ και για κάθε $i \in I$ υπάρχει y_n^i έτσι, ώστε $d_i^*(x, y_n^i) < \frac{1}{n}$ και $y_n^i \notin S(x,r)$. Η $g \mapsto d_i(gx, gy_n^i)$ παίρνει ελάχιστη τιμή, αφού είναι συνεχής και η G είναι συμπαγής. Άρα υπάρχουν $g_n^i \in G$ έτσι, ώστε $d_i(g_n^i x, g_n^i y_n^i) < \frac{1}{n}$. Το σύνολο $\Lambda = \{(n,i)\}$ είναι κατευθυνόμενο, με τη σχέση: $(n,i) \leq (k,j) \Leftrightarrow n < k$ και $d_i \leq d_j$, αφού η οικογένεια $\{d_i\}$ είναι κορεσμένη. Από τη συμπάγεια της G, το δίκτυο g_n^i θα έχει συγκλίνον υποδίκτυο $g_\lambda \to g \in G$. Θα δείξουμε ότι $g_\lambda y_\lambda \to gx$ ως προς την $\mathcal{T}$. Αφού η $\{d_i\}$ είναι κορεσμένη, μπορούμε να υποθέσουμε ότι μια περιοχή του gx είναι μια σφαίρα $S_{d_i}(gx, \epsilon)$. Η συνέχεια της δράσης δίνει $d_j(g_\lambda x, gx) \to 0$ για κάθε $j \in I$. Επομένως, υπάρχει ένα $\lambda_1 = (n_1, i_1) \in \Lambda$ έτσι, ώστε $(\frac{2}{\epsilon}, i) \leq (n_1, i_1)$ και ένα λ_0 έτσι, ώστε $\lambda_0 \geq \lambda_1$ και $d_{i_1}(g_\lambda x, gx) < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$. Αν $\lambda = (n,j)$, τότε

$$d_{i_1}(g_\lambda x, g_\lambda y_\lambda) \leq d_j(g_n^j y_n^j, g_n^j x) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_1} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Άρα

$$d_{i_1}(g_\lambda y_\lambda, gx) \leq d_{i_1}(g_\lambda y_\lambda, g_\lambda x) + d_{i_1}(g_\lambda x, gx) < \epsilon.$$

Αλλά $d_i \leq d_{i_1}$ και άρα $g_\lambda y_\lambda \in S_{d_i}(gx, \epsilon)$ τελικά για κάθε λ, οπότε $g_\lambda^{-1}(g_\lambda y_\lambda) = y_\lambda \to g^{-1}gx = x$, λόγω της συνέχειας της δράσης, απ' όπου έπεται τελικά $y_\lambda \in S(x,r)$, που είναι άτοπο, αφού $y_\lambda \notin S(x,r)$ για κάθε λ.

Βήμα 2: 'Εστω ότι η G είναι σ–συμπαγής αλλά όχι συμπαγής. 'Οπως και στην απόδειξη της Πρότασης 2.3, η G γράφεται σαν ένωση σχετικά συμπαγών, ανοικτών υποσυνόλων της G_n, με την ιδιότητα $\overline{G_n} \subseteq G_{n+1}$, $n \in N$. Θα δείξουμε ότι, αν $\{d_i\}$ είναι η κορεσμένη οικογένεια των ψευδομετρικών που παράγουν την $\mathcal{D}$ (οι οποίες μπορούν να αντικατασταθούν από τις $\frac{d_i}{1+d_i}$ και, επομένως να θεωρηθούν μικρότερες του 1) τότε η οικογένεια $\{d_i^*\}$ με

$$d_i^*(x,y) = \sup_{n\in N} 2^{-\mu(G_n)} \int_{G_n} d_i(gx,gy)\,dg$$

είναι μια οικογένεια ψευδομετρικών που επάγουν την $\mathcal{T}$.

<u>Απόδειξη</u>: Από τη μη συμπάγεια της G, έχουμε $\mu(G) = +\infty$. Συνεπώς, κάθε d_i^* παίρνει πεπερασμένες τιμές, αφού

$$2^{-\mu(G_n)} \int_{G_n} d_i(gx,gy)\,dg \leq 2^{-\mu(G_n)}\mu(G_n).$$

Προφανώς, κάθε d_i^* είναι ψευδομετρική. 'Εστω $S_{d_i^*}(x,r)$ μια d_i^*–σφαίρα και $\epsilon > 0$ έτσι, ώστε να ισχύει $0 < \epsilon < \frac{r}{2}\,2^{\mu(G_1)} \leq \frac{r}{2}\,2^{\mu(G_n)}$ για κάθε $n \in N$. Αφού $\mu(G) = \infty$, υπάρχει m_0 έτσι, ώστε $\mu(G_m) < \frac{r}{2}\,2^{\mu(G_m)}$ για κάθε $m \geq m_0$. Θέτουμε $W(x) = \{y \in X : \int_{G_{m_0}} d_i(gx,gy)\,dg < \epsilon\}$. Τότε $W(x) \subseteq S_{d_i^*}(x,r)$, διότι,
αν $n \leq m_0$, τότε

$$\int_{G_n} d_i(gx,gy)\,dg \leq \int_{G_{m_0}} d_i(gx,gy)\,dg < \epsilon < \frac{r}{2}\,2^{\mu(G_n)}$$

ενώ, αν $n \geq m_0$ και $y \in W(x)$, τότε

$$\int_{G_n} d_i(gx,gy)\,dg \leq \mu(G_n) \leq \frac{r}{2}\,2^{\mu(G_n)}.$$

Αν θέσουμε, τώρα, G_{m_0} αντί για G και $N_j \cap G_{m_0}$ αντί για N_j και αν επιλέξουμε $\delta < \frac{r}{2\mu(G_{m_0})}$, με διαδικασία εντελώς ανάλογη του πρώτου βήματος, βρίσκουμε μια περιοχή $V(x)$ του x, ως προς $\mathcal{T}$ έτσι, ώστε $V(x) \subseteq W(x)$. Συνεπώς $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}$. Εργαζόμενοι όπως στο πρώτο βήμα με την G_1 αντί της G, καταλήγουμε (λόγω της σχετικής συμπάγειας του G_1) στο συμπέρασμα ότι $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^*$.

Βήμα 3: Κάθε γ_h είναι ομοιόμορφα συνεχής ως προς κάθε ψευδομετρική d_i^*.

<u>Απόδειξη</u>: 'Εστω ότι αυτό δεν συμβαίνει. Τότε υπάρχουν $\epsilon > 0$ και $x_n, y_n \in X$ έτσι, ώστε $d_i^*(x_n,y_n) < \frac{1}{n}$ και $d_i^*(hx_n,hy_n) > \epsilon$ για κάθε $n \in N$. Από τον ορισμό του

d_i^* και για κάθε n, υπάρχει $k(n)$ τέτοιο, ώστε

$$\begin{aligned}
\epsilon &< \frac{1}{2^{\mu(G_{k(n)})}} \int_{G_{k(n)}} d_i(ghx_n, ghy_n)\, dg = \frac{1}{2^{\mu(G_{k(n)})}} \int_{G_{k(n)}\cdot h} d_i(gx_n, gy_n)\, dg \\
&\le \frac{\mu(G_{k(n)} \cdot h)}{2^{\mu(G_{k(n)})}} = \frac{\mu(G_{k(n)})}{2^{\mu(G_{k(n)})}},
\end{aligned}$$

αφού το μέτρο Haar είναι αναλλοίωτο ως προς δεξιές μεταθέσεις. Εφόσον $\frac{\mu(G_n)}{2^{\mu(G_n)}} \to 0$, οι προηγούμενες σχέσεις θα ισχύουν για πεπερασμένο πλήθος από διακεκριμένα $k(n)$. Συνεπώς υπάρχει $n_0 \in N$ έτσι, ώστε $k(n) = k(n_0)$ για κάθε $n \ge n_0$. Προφανώς υπάρχει $m \in N$ τέτοιο, ώστε $\overline{G_{k(n_0)}}\, h \subseteq G_m$. 'Αρα

$$\begin{aligned}
\int_{G_{k(n)}} d_i(ghx_n, ghy_n)\, dg &= \int_{G_{k(n_0)}} d_i(ghx_n, ghy_n)\, dg = \int_{G_{k(n_0)}\cdot h} d_i(gx_n, gy_n)\, dg \\
&\le \int_{G_m} d_i(gx_n, gy_n)\, dg \le 2^{\mu(G_m)} d_i^*(x_n, y_n).
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$2^{\mu(G_{\kappa(n_0)})} \cdot \epsilon < 2^{\mu(G_m)} d_i^*(x_n, y_n),$$

άτοπο, αφού $d_i^*(x_n, y_n) \to 0$. □

Παρατήρηση: Με την προηγούμενη πρόταση γίνεται φανερό ότι, σύμφωνα με την άποψη του Klein, για τους ομαλούς χώρους θα πρέπει να περιορίσουμε την αντίστοιχη ομάδα των συμμετριών (η οποία αποτελείται από όλους τους ομαλούς ισομορφισμούς του χώρου), αν θέλουμε να αποφύγουμε τη γενική περίπτωση και να έχουμε βάσιμες προοπτικές για τη συναγωγή περιεκτικών συμπερασμάτων για τη διασύνδεση της δομής του X με τον τρόπο δράσης της ομάδας. Η ισοσυνέχεια της $G \le H(X)$ είναι μια περιοριστική επιλογή στην κατεύθυνση αυτή, όπως δείχνουν τα Θεωρήματα 4.17, 4.29 και 4.31 που ακολουθούν.

Πρόταση 4.6 *Έστω X ένας τοπικά συμπαγής χώρος εφοδιασμένος με την (μοναδική) ομαλή δομή που επάγει η συμπαγότητα του με ένα σημείο.*

1. *Αν η G είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχής και κλειστή υποομάδα του $C(X,X)$, τότε είναι συμπαγής.*

2. *Κάθε γνήσια δράση είναι ισοσυνεχής ως προς την προηγούμενη ομαλή δομή.*

Απόδειξη. (1) 'Εστω X^∞ η συμπαγότητα του X με ένα σημείο (one point compactification). Θέτουμε $F = \{g : X^\infty \to X^\infty : g \mid X \in G$ και $g(\infty) = \infty\}$ και θα αποδείξουμε ότι η ομάδα F είναι ισοσυνεχής και κλειστή στον $C(X^\infty, X^\infty)$, οπότε θα είναι συμπαγής, σύμφωνα με το Θεώρημα Ascoli [42, Th. 3, p. 164], και το ίδιο θα ισχύει για την G, που είναι ισόμορφη με μια υποομάδα της F.

Η F είναι ισοσυνεχής στον X^∞, διότι αλλιώς θα υπήρχαν $x_i \to \infty$ και $f_i \in F$ έτσι, ώστε $f_i x_i \notin V'(\infty)$ για $V' \in \mathcal{D}$. Από τη συμπάγεια του X^∞, υπάρχει υποδίκτυο $f_j x_j \to x \in X$. Θεωρούμε ένα $V \subseteq V'$ έτσι, ώστε το $V(x)$ να είναι σχετικά συμπαγές. Από την ομοιόμορφη ισοσυνέχεια της G, υπάρχει $V'' \in \mathcal{D}$ έτσι, ώστε αν $(x,y) \in V''$, τότε $(gx, gy) \in V$ για κάθε $g \in G$. Αν $W, U \in \mathcal{D}$ είναι τέτοια, ώστε $W \circ W \subseteq V''$ και $U \circ U \subseteq W$, επιλέγουμε ένα $A \in \mathcal{D}$ έτσι, ώστε το $(gx, gy) \in U$ για $(x,y) \in A$ και για κάθε $g \in G$. Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε ένα δείκτη k έτσι, ώστε $x_k \in U(\infty)$ και $f_k x_k \in A(x)$, άρα $(x_k, f_k^{-1}x) \in U$, οπότε $(f_k^{-1}x, \infty) \in W$. Επιπλέον $f_k^{-1}x_i \to \infty$, επομένως $(f_k^{-1}x_i, \infty) \in W$ τελικά για κάθε i, κατά συνέπεια $(f_k^{-1}x, f_k^{-1}x_i) \in V''$, άρα $(x, x_i) \in V$ τελικά, άτοπο.

Η F είναι κλειστή στον $C(X^\infty, X^\infty)$, διότι αν $f_i \in F$ με $f_i \to f$, τότε $f_i x \to f(x)$ για κάθε $x \in X$ και $f_i(\infty) \to f(\infty)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) \in X$ για κάθε $x \in X$. Πράγματι, αυτό ισχύει, αφού, αν υπήρχε ένα $x \in X$ με $f(x) = \infty$, τότε επιλέγοντας W και $V \in \mathcal{D}$ έτσι, ώστε $x \notin W(\infty)$ και $y \in V(\infty)$, θα είχαμε $(\infty, gy) \in W$ για κάθε $g \in F$, οπότε θα υπήρχε δείκτης k με $f_k x \in V(\infty)$, άρα $x \in W(\infty)$, άτοπο.

(2) Αν υπήρχαν $V \in \mathcal{D}$, $x_i \to x_0$ και $f_i \in G$ έτσι, ώστε $(f_i x_i, f_i x_0) \notin V$, τότε είτε το $f_i x_i$ είτε το $f_i x_0$ θα συνέκλινε σε κάποιο $y \in X$. Αφού η δράση είναι γνήσια, θα υπήρχαν $g \in G$ και υποδίκτυο f_j έτσι, ώστε $f_j \to g$, άτοπο, διότι $(f_j x_j, f_j x_0) \notin V$ για κάθε j. □

Παρατηρήσεις:

1. Η κατά σημείο ισοσυνέχεια της G δεν είναι ικανή συνθήκη ώστε να ισχύει το (1). Ως αντιπαράδειγμα αρκεί να θεωρήσουμε το Δ.Σ. (R, R, γ) με $\gamma(t,x) = x + t$, που είναι, προφανώς, παραλληλήσιμο, αλλά η $\phi(R)$ δεν είναι συμπαγής [Ορισμός 1.10].

2. Από τα [14, Th. 1, p. 289] και [50, Th. 43.7], οι τοπολογίες της κατά σημείο σύγκλισης, της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του X και η συμπαγής–ανοικτή τοπολογία συμπίπτουν για την G.

3. Η (μοναδική) ομαλή δομή $\mathcal{D}$ που επάγει η συμπαγότητα μ' ένα σημείο σ' ένα

τοπικά συμπαγή χώρο X είναι, επιπλέον, και η "ελάχιστη" ομαλή δομή που είναι συμβιβαστή με την τοπολογία του.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{D}^*$ μια άλλη ομαλή δομή, συμβιβαστή με την τοπολογία του X. Αν $\mathcal{D} \nsubseteq \mathcal{D}^*$, θα υπήρχε $V \in \mathcal{D}$ έτσι, ώστε να ισχύει $U \nsubseteq V$ για κάθε $U \in \mathcal{D}^*$. Άρα θα υπήρχε δίκτυο (x_U, y_U) έτσι, ώστε $(x_U, y_U) \in U$ και $(x_U, y_U) \notin V$. Θα υπάρχουν τότε $(x, y) \in X^\infty \times X^\infty$ και υποδίκτυο (x_j, y_j) έτσι, ώστε $(x_j, y_j) \to (x, y)$. Έτσι, αν x ή $y \in X$, επειδή η $\mathcal{D}^*$ επάγει την τοπολογία του X, θα είχαμε $x = y$ και άρα $(x_j, y_j) \in V$, άτοπο. Άρα θα πρέπει $x = y = \infty$, που είναι και πάλι άτοπο. □

Πρόταση 4.7 *Έστω $(X, \mathcal{D})$ ένας ομαλός χώρος και G μια ισοσυνεχής υποομάδα της $H(X)$. Τότε, υπάρχει μια ομαλή δομή "λεπτότερη" της αρχικής, που επάγει την τοπολογία του X και κάνει την G ομοιόμορφα ισοσυνεχή (ακριβέστερα: κάθε στοιχείο της G είναι ισομετρία ως προς κάθε ψευδομετρική από εκείνες που παράγουν την καινούρια ομαλή δομή).*

Απόδειξη. Όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 4.5, η ομαλή δομή $\mathcal{D}$ παράγεται από μια φραγμένη και κορεσμένη οικογένεια ψευδομετρικών $\{d_i,\ i \in I\}$. Θέτουμε $d_i^*(x, y) = \sup_{g \in G} d_i(gx, gy)$. Προφανώς κάθε d_i^* είναι μια ψευδομετρική στον X. Επιπλέον $d_i^*(hx, hy) = \sup_{g \in G} d_i(ghx, ghy) = d_i^*(x, y)$, άρα κάθε $h \in G$ είναι d_i^*–ισομετρία. Εάν $\mathcal{D}^*$ είναι η παραγόμενη ομαλή δομή από την οικογένεια $\{d_i^*\}$ και $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^*$ είναι οι επαγόμενες τοπολογίες από τις $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^*$ αντίστοιχα, τότε $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^*$, αφού $d_i^*(x, y) \geq d_i(x, y)$. Αντίστροφα, αν $U^*(x) = \bigcap_{k=1}^n S_{d_{i_k}^*}(x, \epsilon)$ είναι μια περιοχή του x στην $\mathcal{T}^*$, τότε από την ισοσυνέχεια της G, υπάρχει μια περιοχή $U(x)$ του x στην $\mathcal{T}$ έτσι, ώστε $U(x) \subseteq U^*(x)$. Άρα $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$ και, κατά συνέπεια, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}^*$. □

Πρόταση 4.8 *Έστω $(X, \mathcal{D})$ ένας ομαλός χώρος και G μια υποομάδα της $H(X)$. Η G είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχής, αν και μόνο αν υπάρχει μια G–αμετάβλητη βάση της $\mathcal{D}$.*

Απόδειξη. Αν η G είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχής και $V \in \mathcal{D}$, θέτουμε $V^* = \{(x, y) : (gx, gy) \in V$ για κάθε $g \in G\}$. Προφανώς $V^* \subseteq V$, ενώ από την ομοιόμορφη ισοσυνέχεια υπάρχει $W \in \mathcal{D}$ έτσι, ώστε $W \subseteq V^*$. Συνεπώς τα $\{V^*\}$ αποτελούν μια G–αμετάβλητη βάση της $\mathcal{D}$ που είναι μάλιστα "μέγιστη", υπό την έννοια ότι, αν $\{W_i\}$ είναι μια άλλη αμετάβλητη βάση, τότε $W_i^* = W_i \in \{V^*\}$. Το αντίστροφο είναι προφανές. □

Πρόταση 4.9 (Ισοσυνεχείς επεκτάσεις) *Έστω $(X, \mathcal{D})$ ένας ομαλός χώρος, G μια υποομάδα της $H(X)$ και $\phi \in H(X)$. Τότε, η ομάδα $< G, \phi >$ που παράγεται από την G και το ϕ, είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχής, αν και μόνο αν η G και η ομάδα $< \phi >$ είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχείς και, επιπλέον, η τομή των "μέγιστων" G–αμετάβλητων βάσεων που αντιστοιχούν στις δύο αυτές ομάδες σύμφωνα με την Πρόταση 4.8 είναι, επίσης, μια βάση για την $\mathcal{D}$.*

Απόδειξη. Το αντίστροφο είναι προφανές. Για το ευθύ αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι, αν $U_{G,\phi}$, U_G και U_ϕ είναι οι αντίστοιχες "μέγιστες" G–αμετάβλητες βάσεις για τις ομάδες $< G, \phi >$, G και $< \phi >$ αντίστοιχα, τότε $U_{G,\phi} \subseteq U_G \cap U_\phi$. □

Παρατήρηση: Το συμπέρασμα ισχύει, αν η $< \phi >$ είναι κανονική υποομάδα της $< G, \phi >$.

Ορισμός 4.10 *Έστω $F \subseteq G$. Με $K(F)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο $\{x \in X$: το $F(x)$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του $X\}$.*

Λήμμα 4.11 *Αν X είναι ένας τοπικά συμπαγής χώρος και G μια ισοσυνεχής υποομάδα της $H(X)$, τότε το $K(F)$ είναι ένα ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του X για κάθε $F \subseteq G$.*

Απόδειξη. Έστω $F \subseteq G$ και $x \in K(F)$. Από την Πρόταση 4.7, υπάρχουν μια ομαλή δομή $\mathcal{D}$ συμβιβαστή με την τοπολογία του X και μια βάση της $\{V_i\,,\ i \in I\}$ έτσι, ώστε $(g \times g)\, V_i = V_i, \forall i \in I$. Από τη συμπάγεια του $\overline{F(x)}$ και το [13, Cor., p. 203], ένα από τα προηγούμενα V_i είναι έτσι, ώστε το $\overline{V_i(\overline{F(x)})}$ να είναι συμπαγές. Αν $y \in V_i(x)$, τότε $(gx, gy) \in V_i\,,\ \forall g \in F$, άρα $\overline{F(y)} \subseteq \overline{V_i(\overline{F(x)})}$, επομένως $V_i(x) \subseteq \overline{V_i(\overline{F(x)})}$. Συνεπώς το $K(F)$ είναι ανοικτό.

Έστω x_i ένα δίκτυο του $K(F)$ και ένα $x \in X$ τέτοιο, ώστε $x_i \to x$, οπότε $\overline{F(y)} \subseteq \bigcup_{g \in F} W(gy)$, $\forall\, W \in \mathcal{D}$ και $y \in X$. Αν το x_{i_0} είναι τέτοιο, ώστε $(x_{i_0}, x) \in W$, από τη συμπάγεια του $\overline{F(x_{i_0})}$ υπάρχουν $g_k\,,\ k = 1, 2, \ldots, n$ έτσι, ώστε $\overline{F(x_{i_0})} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} W(g_k x_{i_0})$. Τότε, αν επιλέξουμε V_i, $W \in \mathcal{D}$ έτσι, ώστε $W \circ W \circ W \subseteq V_i$, έχουμε $\overline{F(x)} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \overline{V_i(g_k(x))}$. Προφανώς, επιλέγοντας ένα V_i έτσι, ώστε το $\overline{V_i(x)}$ να είναι συμπαγές, θα έχουμε $\overline{F(x)} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} g_k(\overline{V_i(x)})$, απ' όπου συνάγεται ότι το $\overline{F(x)}$ είναι συμπαγές. □

Παράδειγμα 4.12 *Το ακόλουθο αντιπαράδειγμα δείχνει ότι η υπόθεση για την G να είναι ομάδα είναι αναγκαία προκειμένου να ισχύει το Λήμμα 4.11 και, κατά συνέπεια, ότι ο σχετικός ισχυρισμός στο [14, 13 (d), p. 324] δεν είναι απόλυτα ακριβής.*

Έστω ότι ο X αποτελείται από όλες τις θετικές ημιευθείες του R^2 που είναι κάθετες στον άξονα των x στα σημεία $(0,0)$ και $(\frac{1}{n},0)$, $n \in N^*$, εκτός από την αρχή (0,0). Θεωρούμε $F = \{f_\lambda\}$, $\lambda \in N^*$, όπου $f_\lambda(\frac{1}{n},y) = (\frac{1}{n},\frac{y}{\lambda})$ και $f_\lambda(0,y) = (0,\frac{y}{\lambda})$ για $n, \lambda \in N^*$ και $y \in R^+$. Προφανώς, η F αποτελείται από ομοιομορφισμούς του X και είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχής ως προς την Ευκλείδεια ομαλή δομή. Επιπλέον, το $\overline{F(\frac{1}{n},y)}$ είναι συμπαγές για κάθε $n \in N^*$, $y \in R^+$, ενώ το $\overline{F(0,y)}$ όχι. Άρα το $K(F)$ είναι ανοικτό αλλά όχι και κλειστό υποσύνολο του X.

Στο παραπάνω αντιπαράδειγμα ο χώρος δεν ήταν πλήρης. Με την επιπλέον υπόθεση ότι ο X είναι πλήρης και με αποδεικτική διαδικασία ανάλογη εκείνης του Λήμματος 4.11, μπορούμε να αποδείξουμε ότι, αν η G δεν είναι απαραίτητα ομάδα αλλά είναι ισοσυνεχής, τότε το $K(F)$ είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του X.

Στην επόμενη πρόταση διερευνάται το ερώτημα, πότε μια ισοσυνεχής υποομάδα της $H(X)$ μπορεί να θεωρηθεί κλειστή.

Πρόταση 4.13 *Έστω $(X,\mathcal{D})$ ένας ομαλός χώρος και G μια ισοσυνεχής υποομάδα της $H(X)$. Η θήκη της G στον $C(X,X)$ είναι υποομάδα της $H(X)$, αν ο $H\Sigma(X)$ είναι συμπαγής και η ομαλή δομή που προκύπτει από την Πρόταση 4.7 έχει την εξής ιδιότητα: κάθε περιοχή μιας ημισυνεκτικής συνιστώσας στον $Y(X)$ περιέχει μια ανοικτή και κλειστή περιοχή της στον X (π.χ., αν ο X έχει πεπερασμένες το πλήθος συνεκτικές συνιστώσες).*

Απόδειξη. Από το [14, Cor., p. 290], η κατά σημείο θήκη της G στο σύνολο των απεικονίσεων από το X στο X συμπίπτει με τη θήκη της G στον $C(X,X)$ ως προς τη συμπαγή–ανοικτή τοπολογία. Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα:

Βήμα 1: Έστω X ένας συμπαγής ομαλός χώρος (Hausdorff). Αν η f είναι d_i–ισομετρία για κάθε ψευδομετρική d_i από αυτές που παράγουν την ομαλή δομή του X, τότε η f είναι "επί".

Απόδειξη: Το $f(X)$ είναι συμπαγές. Αν υπήρχε $y \notin f(X)$, τότε θα υπήρχε περιοχή $V(y) = \bigcap_{k=1}^{\lambda} S_{d_{i_k}}(y,\epsilon)$ έτσι, ώστε $V(y) \cap f(X) = \emptyset$. Αν $n > m$, τότε $d_{i_k}(f^{n-m}y, y) = d_{i_k}(f^n y, f^m y)$ και, επειδή $V(y) \cap f(X) = \emptyset$, θα υπάρχει $k = k(n-m)$ έτσι, ώστε

$d_{i_k}(f^n y, f^m y) \geq \epsilon$. 'Αρα $(f^n y, f^m y) \notin V$ για κάθε n και $m < n$. Συνεπώς, η ακολουθία $\{f^n y\}$ δεν θα έχει κανένα Cauchy υποδίκτυο, που είναι άτοπο, αφού ο X είναι συμπαγής.

Βήμα 2: Οι ψευδομετρικές d_i ορίζουν τις "Hausdorff ψευδομετρικές" [50, 2 F] $\{d_i^*\}$ στον $Y(X)$ (που παράγουν την ομαλή δομή του) από τον τύπο

$$d_i^*(A, B) = \max\{d_i^A(B), d_i^B(A)\},$$

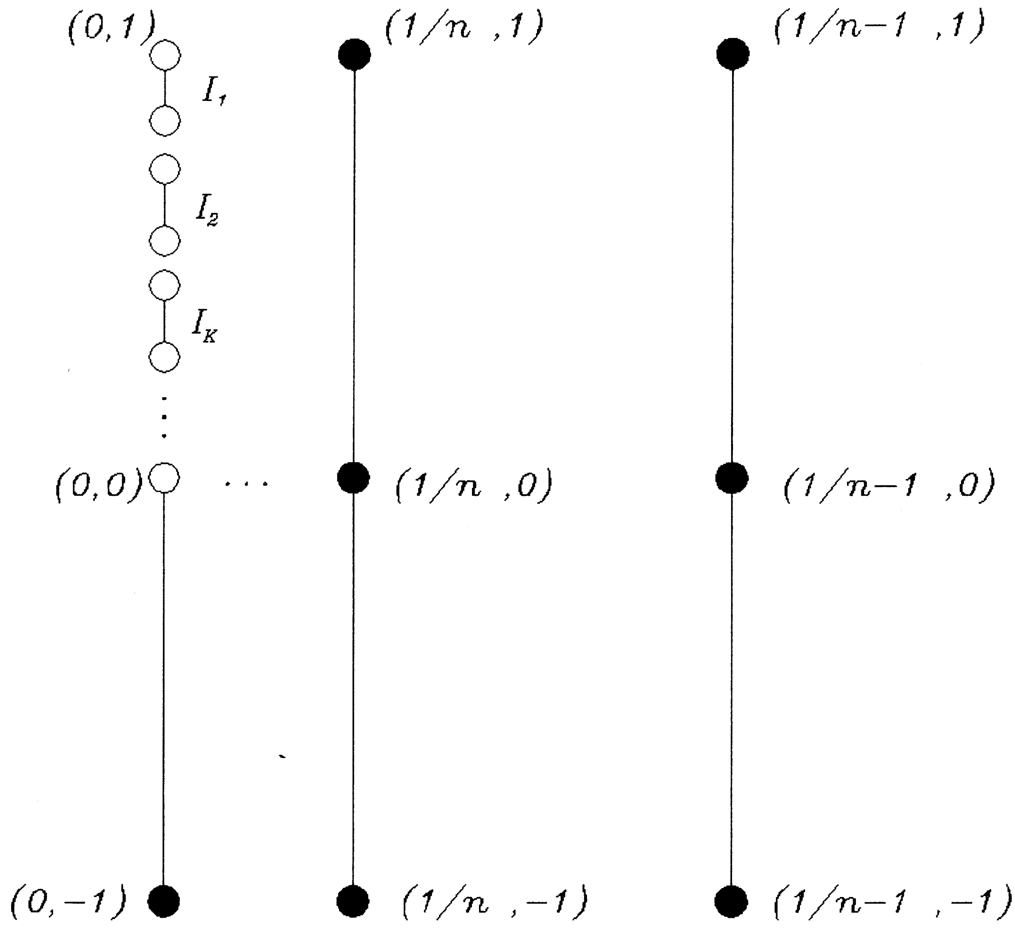
όπου

$$d_i^A(B) = \sup\{d_i(A, x) : x \in B\} \text{ και } d_i^B(A) = \sup\{d_i(B, x) : x \in A\}.$$

Κάθε $g \in G$ επάγει μια απεικόνιση g^* στον $H\Sigma(X)$ ως εξής: $g^*\Sigma_x = \Sigma_{gx}$, $\Sigma_x \in H\Sigma(X)$. Κάθε g^* είναι d_i^*–ισομετρία. 'Ετσι, αν $g_k \in G$ και $h \in C(X, X)$ με $g_k \to h$, τότε το h θα είναι μια d_i–ισομετρία, άρα θα επάγει μια απεικόνιση h^* στον $H\Sigma(X)$ με $h^*\Sigma_x = \Sigma_{hx}$ (αφού $h\Sigma_x \subseteq \Sigma_{hx}$), η οποία θα είναι και αυτή d_i^*–ισομετρία, διότι $g_k^* \to h^*$ στον $H\Sigma(X)$. Θα δείξουμε ότι η h είναι επί. Από την υπόθεση, ο $H\Sigma(X)$ (εφοδιασμένος με την επαγόμενη ομαλή δομή του $Y(X)$) είναι συμπαγής. Από το πρώτο βήμα, η h^* θα είναι "επί" του $H\Sigma(X)$. 'Ετσι, για κάθε $x \in X$ υπάρχει y_x έτσι, ώστε $h\Sigma_{y_x} \subseteq \Sigma_x$. Από την τοπική συμπάγεια του X, για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $F_x^{-1} = \{g_k^{-1} : k \geq i_x\}$ και $\omega \in \Sigma_x$ έτσι, ώστε το $\overline{F_x^{-1}(\omega)}$ να είναι συμπαγές. Από το Λήμμα 4.11, κάθε $K(F_x^{-1})$ είναι μη κενό, ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του X. Αφού $\omega \in K(F_x^{-1})$, ισχύει $\Sigma_x = \Sigma_\omega \subseteq K(F_x^{-1})$. Από τη συμπάγεια του $H\Sigma(X)$, υπάρχουν x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ έτσι, ώστε $X = \bigcup_{i=1}^n K(F_{x_i}^{-1})$. Θέτουμε $F^{-1} = \{g_k^{-1} : k \geq \max\{i_{x_1}, \ldots, i_{x_n}\}\}$. Το $\overline{F^{-1}(y)}$ είναι συμπαγές για κάθε $y \in X$. Από το Θεώρημα [42, Th. 3, p. 164], το $\overline{F^{-1}}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $C(X, X)$ και άρα υπάρχει $g \in C(X, X)$ έτσι, ώστε $g_j^{-1} \to g$ για κάποιο υποδίκτυο g_j. Επομένως, $y = g_j(g_j^{-1}y) \to h(gy)$ για κάθε $y \in X$ και η h είναι "επί". □

Παρατήρηση 4.14 *Η συμπάγεια του χώρου των συνεκτικών συνιστωσών χρησιμοποιήθηκε για την αποτελεσματική γενίκευση αποτελεσμάτων και, κυρίως, μεθόδων της θεωρίας των Δράσεων (πρβλ. [44]). Το ότι η υπόθεση για την συμπάγεια του χώρου των ημισυνεκτικών συνιστωσών που χρησιμοποιούμε στην εργασία αυτή, υπερβαίνει γνήσια το προϋπάρχον πλαίσιο φαίνεται από το επόμενο παράδειγμα, όπου ο χώρος των ημισυνεκτικών συνιστωσών είναι συμπαγής, ενώ ο χώρος των συνεκτικών συνιστωσών δεν είναι:*

Ως X θεωρούμε το υποσύνολο του R^2 που υποδεικνύεται στο Σχ. 1 για $n \in N^*$. Προφανώς οι συνεκτικές και οι ημισυνεκτικές συνιστώσες των σημείων $(\frac{1}{n}, -1)$, $n \in N^*$ συμπίπτουν. Αλλά, ενώ η συνεκτική συνιστώσα του $(0,-1)$ είναι το σύνολο $\{(0,y) : y \in [-1,0)\}$, η ημισυνεκτική συνιστώσα του θα περιέχει, επιπλέον, και τα ευθύγραμμα τμήματα I_k, $k \in N^*$, με συνέπεια ο $H\Sigma(X)$ να είναι συμπαγής, ενώ ο αντίστοιχος χώρος των συνεκτικών συνιστωσών $\Sigma(X)$ δεν είναι συμπαγής, αφού περιέχει τα I_k και το $X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X που περιέχει ολόκληρες συνεκτικές συνιστώσες.



Σχ. 1

Πρόταση 4.15 *Σε δράσεις ισοσυνεχών υποομάδων της $H(X)$ ισχύει $L(x) = J(x)$ για κάθε $x \in X$ (: οι δράσεις ισοσυνεχών υποομάδων είναι D–ευσταθείς).*

Απόδειξη. Από τις Προτάσεις 4.7 και 4.8, υπάρχει μια ομαλή δομή $\mathcal{D}$ που επάγει την τοπολογία του X και έχει μία G–αμετάβλητη βάση. Έτσι, αν $y \in J(x)$, υπάρχουν $x_i \to x$ και $g_i \to \infty$ έτσι, ώστε $g_i x_i \to y$. Έστω $W \in \mathcal{D}$, τότε υπάρχει $V \in \mathcal{D}$ έτσι, ώστε $V \circ V \subseteq W$, $(x_i, x) \in V$ και $(g_i x_i, y) \in V$ τελικά για κάθε i. Άρα $(g_i x, y) \in W$, συνεπώς $g_i x \to y$ και $J(x) = L(x)$. □

Από εδώ και στο εξής θα αναφερόμαστε σε δράσεις υποομάδων της $H(X)$ μέσω της απεικόνισης εκτίμησης

Πρόταση 4.16 *Έστω $(X, \mathcal{D})$ ένας τοπικά συμπαγής ομαλός χώρος έτσι, ώστε ο $H\Sigma(X)$ να είναι συμπαγής και η G να είναι μια κλειστή υποομάδα του $C(X, X)$.*

1. *Αν η G είναι ισοσυνεχής, τότε είναι και τοπικά συμπαγής.*

2. *Αν, επιπλέον, ο X είναι συνεκτικός, τότε η δράση (G, X) είναι γνήσια.*

Απόδειξη. (1) Έστω $V(x)$ μια σχετικά συμπαγής, ανοικτή περιοχή του x και $F(V(x)) = \{g \in G : gx \in V(x)\}$. Από τη συνέχεια της δράσης, το $F(V(x))$ είναι μια ανοικτή περιοχή του ουδετέρου στοιχείου e της G. Από το Λήμμα 4.11, το $K(F(V(x)))$ είναι ένα ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του X. Λόγω της συμπάγειας του $H\Sigma(X)$ και ότι $x \in K(F(V(x)))$, υπάρχουν $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, \lambda$ έτσι, ώστε $X = \bigcup_{i=1}^{\lambda} K(F(V(x_i)))$. Έτσι, αν θέσουμε $U = \bigcap_{i=1}^{\lambda} F(V(x_i))$, το U είναι μια περιοχή του e στη G με την ιδιότητα κάθε $U(x)$ να είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του X. Από το Θεώρημα του Ascoli [42, Th.3, p. 164] και επειδή η G είναι κλειστή υποομάδα του $C(X, X)$, η U είναι σχετικά συμπαγής στην G.

(2) Από τις Προτάσεις 1.20 και 4.15, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $L(x) = \emptyset$ για κάθε $x \in X$. Έστω $y \in L(x)$. Υπάρχει δίκτυο $g_i \to \infty$ έτσι, ώστε $g_i x \to y$. Αν W είναι μια σχετικά συμπαγής περιοχή του y και $F = \{g \in G : gx \in W\}$, τότε $g_i \in F$ τελικά. Από το Λήμμα 4.11, το $K(F)$ είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του X. Λόγω της συνεκτικότητας του X και επειδή το $K(F)$ είναι μη κενό, ισχύει $X = K(F)$, οπότε (από το Θεώρημα του Ascoli) το $\overline{F}$ θα είναι συμπαγές υποσύνολο της G, άτοπο, αφού $g_i \to \infty$. □

Παρατήρηση: Η Πρόταση 4.16 αποτελεί αντιπαράδειγμα στον ισχυρισμό του J. Dieudonné [17, p. 677] ότι για να ισχύει το 4.16 (1) πρέπει *απαραίτητα* ο συνεκτικός χώρος X να είναι και πλήρης.

Θεώρημα 4.17 *Έστω $(X,\mathcal{E})$ ένας τοπικά συμπαγής ομαλός χώρος και (G,X) η δράση μιας μη συμπαγούς, τοπικά συμπαγούς και ισοσυνεχούς υποομάδας του $H(X)$. Τότε, ο X διασπάται στα επόμενα τρία, αμετάβλητα, ξένα μεταξύ τους, ανοικτά και κλειστά σύνολα*

$$\begin{aligned} M\Sigma L &= \{x \in X : L(x) \neq \emptyset \ \text{ και μη συμπαγές}\} \\ \Sigma L &= \{x \in X : L(x) \neq \emptyset \ \text{ και συμπαγές}\} \\ \varPi &= \{x \in X : L(x) = \emptyset\}, \end{aligned}$$

για τα οποία ισχύουν τα εξής:

1. *Κάθε στοιχείο του ΣL έχει ευσταθή θήκη τροχιάς (: κάθε περιοχή της θήκης περιέχει μια αμετάβλητη περιοχή της).*

2. *Αν $\mathcal{D}$ είναι η ομαλή δομή που προκύπτει από την Πρόταση 4.7 και $V \in \mathcal{D}$ είναι ένα G–αμετάβλητο περιβάλλον σύνολο ορίζουμε*

$$V_x^* = \{g \in G : gx \in V(x)\} \text{ και } F_k = \{V_x^* : \overline{V_x^{*k}(x)} \text{ συμπαγές}\},\ k \in N^*.$$

   Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

   (a) *$x \in \varPi$, αν και μόνο αν η ομάδα ισοτροπίας G_x του x είναι συμπαγής και τα σύνολα V_x^* αποτελούν βάση περιοχών της G_x καθώς το V "διατρέχει" τη βάση από τα αμετάβλητα περιβάλλοντα σύνολα (πρβλ. και την Πρόταση 4.18).*

   (b) *Έστω $x \in X$ έτσι, ώστε ο $H\Sigma(G(x))$ να είναι συμπαγής. Τότε $x \in \Sigma L$, αν και μόνο αν υπάρχει k_0 και $V_x^* \in F_{k_0}$ έτσι, ώστε $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_x^{*n} = V_x^{*k_0}$.*

Απόδειξη. Προετοιμάζοντας τις αποδείξεις των (1) και (2), παρατηρούμε τα εξής:

Η δράση είναι D–ευσταθής (πρβλ. Πρόταση 4.15). Επιπλέον, από την Πρόταση 3.3, κάθε θήκη τροχιάς είναι ελάχιστο σύνολο, οπότε $\varPi = \{x \in X : x \notin J(x)\}$ και το σύνολο αυτό, από τη Πρόταση 1.18 (4), είναι ανοικτό. Επιπλέον, το $\varPi$ είναι και κλειστό, διότι, αν $x_i \in \varPi$ είναι ένα δίκτυο και $x_i \to x$ για κάποιο $x \in X$, τότε υπάρχουν G–αμετάβλητα V, $W \in \mathcal{D}$ με $W \circ W \subseteq V$ και τέτοια, ώστε η $V(x)$ να είναι μια σχετικά συμπαγής περιοχή του x. Αν $x \notin \Pi$, τότε $x \in J(x) = L(x)$, συνεπώς υπάρχει δίκτυο $g_j \to \infty$ έτσι, ώστε $g_j x \to x$. Αφού $x_i \to x$, υπάρχει x_{i_0} έτσι, ώστε $(x_{i_0}, x) \in W$. Επομένως $(g_j x_{i_0}, g_j x) \in W \ \forall j$. Προφανώς $(g_j x, x) \in W$ τελικά για κάθε j, επομένως $g_j x_{i_0} \in V(x)$, οπότε, επειδή το $\overline{V(x)}$ είναι συμπαγές, θα υπάρχει συγκλίνον υποδίκτυο $g_\lambda x_{i_0} \to y$. Άρα $L(x_{i_0}) \neq \emptyset$, άτοπο.

Με το συμβολισμό από το Λήμμα 4.11 και σύμφωνα με το συμπέρασμα του, το $\Sigma L = K(G)$ είναι ανοικτό και κλειστό σύνολο.

(1) Από την Πρόταση 3.5, αν ο $H\Sigma(G)$ ήταν συμπαγής, τότε κάθε θήκη τροχιάς θα ήταν ευσταθής. Στη συνέχεια θα δείξουμε το ίδιο συμπέρασμα με υπόθεση την ισοσυνέχεια της G:

Αν $x \in \Sigma L$, τότε το $\overline{G(x)}$ είναι ευσταθές, διότι σε αντίθετη περίπτωση, θα υπήρχε G–αμετάβλητο $V \in \mathcal{D}$ έτσι, ώστε το $V(\overline{G(x)})$ να μην περιέχει καμιά αμετάβλητη περιοχή του $\overline{G(x)}$ [13, Cor., p. 203]. Θα υπάρχουν, λοιπόν, $y \in \overline{G(x)}$ και δίκτυα $g_i \in G$, $x_i \in X$ έτσι, ώστε $x_i \to y$ και $g_i x_i \notin V(\overline{G(x)})$, $\forall i \in I$. Από τη συμπάγεια του $\overline{G(x)}$, υπάρχει $\omega \in \overline{G(x)}$ και υποδίκτυο $g_j y$ έτσι, ώστε $g_j y \to \omega$. Έστω G–αμετάβλητο $W \in \mathcal{D}$ με την ιδιότητα $W \circ W \subseteq V$. Τότε $(g_j x_j, g_j y) \in W$ και $(g_j y, \omega) \in W$ τελικά για κάθε j. Επομένως $(g_j x_j, \omega) \in V$, άτοπο, αφού $g_i x_i \notin V(\overline{G(x)})$, $\forall i \in I$.

(2) Το πρώτο συμπέρασμα δεν είναι άλλο από την Πρόταση 2.9, εφόσον, $x \notin L(x)$ αν και μόνο αν $L(x) = \emptyset$.

Για το δεύτερο συμπέρασμα: Έστω $x \in X$ έτσι, ώστε ο $H\Sigma(G(x))$ να είναι συμπαγής και να υπάρχει k_0 και $V_x^* \in F_{k_0}$ με $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_x^{*n} = V_x^{*k_0}$, όπου $V_x^{*n+1} = V_x^* \cdot V_x^{*n}$ (εξαιτίας της τοπικής συμπάγειας του X και επειδή κάθε V είναι G–αμετάβλητο, ισχύει $F_k \neq \emptyset$ για κάθε $k \in N^*$). Θέτουμε $H = V_x^{*k_0}$, οπότε $H^n = H$, $\forall\ n \in N^*$. (Ας σημειωθεί ότι, αν το V είναι και συμμετρικό, όπως τα στοιχεία της βάσης της ομαλής δομής $\mathcal{D}^*$ στην Πρόταση 4.7 από το [50, 29 E.7], η H περιέχει τη συνεκτική συνιστώσα C του μοναδιαίου στοιχείου e της G).

Θα δείξουμε ότι το $H(x)$ είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του $G(x)$. Πράγματι, αν $h \in H$ και $gx \in V(h(x))$, τότε $(hx, gx) \in V$, άρα $(x, h^{-1}gx) \in V$ και $h^{-1}g \in V_x^*$. Άρα $V(h(x)) \cap G(x) \subseteq H(x)$. Έστω $h_i x \to hx$, $h_i \in H$. Υπάρχει δείκτης i έτσι, ώστε $(x, h_i^{-1}hx) \in V$. Συνεπώς $h_i^{-1}h \in V_x^*$ και άρα $h \in H$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το $\overline{H(x)} \subseteq X$ είναι συμπαγές, δηλαδή ότι κάθε δίκτυο του $H(x)$ έχει συγκλίνον υποδίκτυο στον X (αφού ο X είναι ομαλοποιήσιμος). Έστω $h_j x$, $h_j \in H$ ένα δίκτυο του $H(x)$, οπότε υπάρχουν h_j^λ, $\lambda = 1,2,\ldots,k_0$, με $h_j^\lambda \in V_x^*$ και $h_j = h_j^{k_0} \cdot h_j^{k_0-1} \cdot \ldots \cdot h_j^1$. Αν $h \in V_x^*$ και $y \in K(V_x^{*\lambda})$, τότε $hy \in K(V_x^{*\lambda-1})$, αφού $V_x^{*\lambda-1}(hy) \subseteq V_x^{*\lambda}(y)$, $\lambda = 2,3,\ldots,k_0$. Έτσι $h_j^1 x \in K(V_x^{*k_0-1})$ και, συνεπώς, θα υπάρχει συγκλίνον υποδίκτυο, που θα το συμβολίζουμε πάλι με $h_j^1 x$, έτσι, ώστε $h_j^1 x \to y_1$. Από το Λήμμα 4.11, έπεται $y_1 \in K(V_x^{*k_0-1})$. Άρα $h_j^2 y_1 \in K(V_x^{*k_0-2})$ και όπως πριν θα υπάρχει συγκλίνον υποδίκτυο $h_j^2 y_1 \to y_2 \in K(V_x^{*k_0-2})$. Επαγωγικά και μετά από πεπερασμένο πλήθος βημάτων, βρίσκουμε y_n, $n = 1,2,\ldots,k_0$, με την ιδιότητα $h_j^n y_{n-1} \to y_n$, $n = 2,\ldots,k_0$. Επειδή υπάρχει βάση από G–αμετάβλητα περιβάλλοντα σύνολα, εύκολα προκύπτει ότι το $h_j x$ έχει υποδίκτυο που συγκλίνει στο y_{k_0}. Αφού το $H(x)$ είναι ανοικτό και κλειστό στην $G(x)$ και ο $H\Sigma(G(x))$ είναι συμπαγής, υπάρχουν $g_i \in G$, $i = 1,2,\ldots,\lambda$ έτσι, ώστε $G(x) = \bigcup_{i=1}^{\lambda} g_i H(x)$. Άρα $\overline{G(x)} = \bigcup_{i=1}^{\lambda} g_i \overline{H(x)}$ και, συνεπώς, το $\overline{G(x)}$ είναι συμπαγές. Από τη μη συμπάγεια της G έπεται $x \in \Sigma L$.

Το αντίστροφο είναι προφανές για $V = X \times X$, οπότε $V_x^* = G$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_x^{*n} = V_x^*$.

□

Παρατήρηση: Η συνθήκη "ο $H\Sigma(G(x))$ να είναι συμπαγής" στο 2(b) του προηγούμενου θεωρήματος είναι αναγκαία, όπως δείχνει το ακόλουθο παράδειγμα. Θεωρούμε τη δράση (Z, R, γ), με $\gamma(z,t) = t + z$. Η τροχιά ενός $x \in R$ είναι το σύνολο $x + Z$. Αν θεωρήσουμε το Z–αμετάβλητο περιβάλλον σύνολο $V = \{(x,y) : \ |x-y| < \frac{1}{2}\}$ τότε, $V_x^* = \{0\}$, $V_x^* \in F_1$ και προφανώς $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_x^{*n} = \{0\}$, ενώ το $L(x) = \emptyset$.

Πρόταση 4.18 *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *$x \in \Pi$.*

2. *Υπάρχει $V \in \mathcal{D}$ έτσι, ώστε το V_x^* είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο της G.*

3. *Υπάρχει $V \in \mathcal{D}$ έτσι, ώστε $K(V_x^*) = X$.*

4. *Η G_x είναι συμπαγής και $G(x) \simeq G/G_x$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \Pi$. Από το Θεώρημα 4.17 2(a), υπάρχει $V \in \mathcal{D}$ έτσι, ώστε το $\overline{V_x^*}$ να είναι συμπαγές. Το αντίστροφο είναι προφανές, διότι αν $g_i \to \infty$ και $g_i x \to x$, τότε $g_i \in V_x^*$ τελικά για κάθε i. Η ισοδυναμία των (2) και (3) είναι άμεση από το Θεώρημα [42, Th. 3, p. 164] και τα [13, Prop. 8, p. 186, Cor. 1, p. 245] παρατηρώντας ότι, αν η G είναι ισοσυνεχής, η αριστερή ομαλή δομή της [13, Def. 1, p.

243] συμπίπτει με την ομαλή δομή της κατά σημείο σύγκλισης [50, p. 280] (πρβλ. την Πρόταση 4.7). Αν, τώρα, $x \in \Pi$ τότε, η G_x είναι συμπαγής. Από την Πρόταση 1.18 (3), έπεται $G(x) \simeq G/G_x$. Αντίστροφα, αν η G_x είναι συμπαγής και $G(x) \simeq G/G_x$, από την ίδια πρόταση, προκύπτει $x \notin L(x)$, δηλαδή $x \in \Pi$. □

Η παρακάτω πρόταση είναι ο χαρακτηρισμός του ΣL κατά Bourbaki.

Πρόταση 4.19 *([14, 27, p. 335]) Έστω (G, X) μια δράση μιας ισοσυνεχούς υποομάδας της $H(X)$.*

1. *Αν το $\overline{G(x)}$ είναι συμπαγές, τότε για κάθε $V \in \mathcal{D}$ υπάρχουν $g_i \in G$, $i = 1, 2, \ldots, n$ έτσι, ώστε για κάθε $y \in \overline{G(x)}$ υπάρχει ένα από τα παραπάνω g_i, ώστε $g_i^{-1}y \in V(x)$.*

2. *Αν ο X είναι πλήρης ή τοπικά συμπαγής, τότε ισχύει και το αντίστροφο συμπέρασμα του (1).*

Απόδειξη. (1) Ισχύει $\overline{G(x)} = \bigcup_{g \in G} gV(x)$, διότι αν $g_i x \to y$, τότε $g_i^{-1}y \to x$ και το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια της συμπάγειας του $\overline{G(x)}$.

(2) Αν ο X είναι τοπικά συμπαγής, επιλέγουμε ένα $V \in \mathcal{D}$ έτσι, ώστε το $V(x)$ να είναι σχετικά συμπαγές, οπότε το $\overline{G(x)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} g_i(\overline{V(x)})$ είναι συμπαγές. Αν ο X είναι πλήρης, τότε το $\overline{G(x)}$ είναι κλειστό και ολικά φραγμένο, άρα συμπαγές [50, Th. 39.9]. □

Ο πίνακας που ακολουθεί δίνει πληροφορίες για τη δομή των τροχιών $G(x)$ στην περίπτωση όπου το $x \in L(x) = J(x)$ και δείχνει ότι τα σύνολα $M\Sigma L$, ΣL και Π, που ορίστηκαν στο Θεώρημα 4.17, μπορούν να συνυπάρχουν καθ' οιονδήποτε τρόπο.

<table>
<tr><th colspan="3">ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ</th></tr>
<tr><td rowspan="8">$x \in L(x)$</td><td colspan="2">Κλειστή τροχιά και G_x μη συμπαγής: Πρβλ. 4.20, 4.25</td></tr>
<tr><td colspan="2">Κλειστή τροχιά και G_x συμπαγής: Αποκλείεται (πρβλ. 4.30)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Μη κλειστή τροχιά και G_x μη συμπαγής: Πρβλ. 4.24</td></tr>
<tr><td colspan="2">Μη κλειστή τροχιά και G_x συμπαγής: Πρβλ. 4.21</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\overline{G(x)}$ συμπαγής</td><td>G_x συμπαγής: Πρβλ. 4.21</td></tr>
<tr><td>G_x μη συμπαγής: Πρβλ. 4.22</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\overline{G(x)}$ μη συμπαγής</td><td>G_x συμπαγής: Πρβλ. 4.23</td></tr>
<tr><td>G_x μη συμπαγής: Πρβλ. 4.24</td></tr>
</table>

Παράδειγμα 4.20 *Έστω (X, d) ο μετρικός χώρος $X = \{(0,0)\} \cup A$, όπου $A = \{(2,t) : t \in R\}$ και $d = \min\{1, d_E\}$ με d_E την Ευκλείδεια μετρική. Ως G θεωρούμε την ομάδα των d–ισομετριών επί του X. Λόγω της Πρότασης 4.16, η G είναι τοπικά συμπαγής. Η $G_{(0,0)}$ περιέχει όλες τις μεταφορές του A που αφήνουν το x σταθερό και άρα δεν είναι συμπαγής. Προφανώς $\Sigma L = \{(0,0)\}$ και $\Pi = A$.*

Παράδειγμα 4.21 *Έστω $X = S^1 \cup A$, όπου $S^1 = \{e^{it} : t \in R\}$ και A όπως προηγουμένως. Στον X θεωρούμε την Ευκλείδεια μετρική. Ως G θεωρούμε την ομάδα $f_n : X \to X$, $n \in Z$, όπου $f_n(2,t) = (2, t+n)$ και $f_n(e^{it}) = e^{i(t+2\pi n\alpha)}$, $\alpha \in R \setminus Q$. Προφανώς η G είναι ισοσυνεχής και κλειστή υποομάδα του $C(X,X)$. Από την Πρόταση 4.16, η G είναι και τοπικά συμπαγής. Η $G(1,0)$ δεν είναι κλειστή, $G_x = \{f_0\}$, $\Sigma L = S^1$ και $\Pi = A$.*

Παράδειγμα 4.22 *Έστω $X = A \cup D^1$ με την Ευκλείδεια μετρική, όπου το A είναι όπως πριν και D^1 είναι ο μοναδιαίος δίσκος. Ως G θεωρούμε την ομάδα των ισοσυνεχών απεικονίσεων $f_n : X \to X$, $n \in Z$ με $f_n(2,t) = (2, t+n)$ και $f_n(\rho e^{it}) = \rho e^{i(t+2\pi n\alpha)}$, $\rho \in [0,1]$, $\alpha \in R \setminus Q$. Τότε $G(0,0) = \{(0,0)\}$, $G_x = G$, $\Sigma L = D^1$ και $\Pi = A$.*

Παρατήρηση: Όπως δείχνει το προηγούμενο παράδειγμα, είναι δυνατό να συνυπάρχουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα δύο στοιχεία x και y έτσι, ώστε $x \in L(x)$, $y \in L(y)$, το G_x να μην είναι συμπαγές και το G_y να είναι συμπαγές.

Παράδειγμα 4.23 *Έστω X το υποσύνολο του R^3, το οποίο αποτελείται από τον κύλινδρο $C = \{(e^{ix}, t) : t,\, x \in R\}$ και το παράλληλο επίπεδο $E = \{(2, y, z) : y,\, z \in R\}$ προς τον C, εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια μετρική. Ως G θεωρούμε την ομάδα των ισοσυνεχών απεικονίσεων $f_{n,\theta} : X \to X$, $n \in Z$, $\theta \in R$, όπου $f_{n,\theta}(2, y, z) = (2, y+n, z+\theta)$ και $f_{n,\theta}(e^{ix}, t) = (e^{i(x+2\pi n\alpha)}, t+\theta)$, $\alpha \in R \setminus Q$. Η G είναι τοπικά συμπαγής, αφού είναι κλειστή στον $C(X, X)$. Έτσι, αν $x = (e^{ix_0}, t_0)$, x_0, $t_0 \in R$, τότε $\overline{G(x)} = C$ και $G_x = \{f_{0,0}\}$. Προφανώς $M\Sigma L = C$ και $\Pi = E$.*

Παράδειγμα 4.24 *Μπορούμε να τροποποιήσουμε το προηγούμενο παράδειγμα ως εξής: Θεωρούμε τον προηγούμενο κύλινδρο C ως υποσύνολο του R^5 και επιλέγουμε το E ισόμορφο προς τον R^3 έτσι, ώστε $E \cap C = \emptyset$. Έστω $G = \{f_{n,k,\theta} : X \to X$, $n, k \in Z$, $\theta \in R\}$, όπου,*

$$f_{n,k,\theta}(w) = \begin{cases} (e^{i(x+2\pi k\alpha)}, t+\theta) & \text{αν } w = (e^{ix}, t) \in C,\ \alpha \in R \setminus Q \\ (x+n, y+k, z+\theta) & \text{αν } w = (x, y, z) \in E. \end{cases}$$

Αν $x = (e^{ix_0}, t_0) \in C$ έχουμε $\overline{G(x)} = C$ και $G_x = \{f_{n,0,0}\,,\ n \in Z\}$. Προφανώς $M\Sigma L = C$ και $\Pi = E$.

Παράδειγμα 4.25 *Έστω $X = K \cup E$, όπου $K = \{(x, y, 0) : x, y \in R\}$ και $E = \{(0, y, 1) : y \in R\}$ εφοδιασμένος με την Ευκλείδεια μετρική. Ως G θεωρούμε την ομάδα $\{f_{n,k} : X \to X$, $n, k \in Z\}$, όπου $f_{n,k}(x, y, 0) = (x+n, y+k, 0)$ και $f_{n,k}(0, y, 1) = (0, y+n, 1)$. Για $x = (0, 0, 1)$ έχουμε $G_x = \{f_{0,k}\,,\ k \in Z\}$. Προφανώς $M\Sigma L = E$ και $\Pi = K$.*

Παράδειγμα 4.26 *Έστω $X = \{(0, 0)\} \cup L_1 \cup L_2$ όπου, $L_1 = \{(2, t) : t \in R\}$ και $L_2 = \{(4, t) : t \in R\}$ με μετρική d αυτή του Παραδείγματος 4.20. Ως G θεωρούμε την ομάδα των d–ισομετριών επί του X. Όπως και στο Παράδειγμα 4.20, η G είναι τοπικά συμπαγής. Προφανώς $\Sigma L = \{(0, 0)\}$ και $M\Sigma L = L_1 \cup L_2$.*

Πρόταση 4.27 *Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.17, έστω $\mu : X \to Y(X)$ με $\mu(x) = \overline{G(x)}$. Τότε:*

1. *Αν η G είναι ισοσυνεχής, η μ είναι συνεχής.*

2. *Αν η G είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχής, η μ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

3. *Ο περιορισμός της μ στο ΣL είναι γνήσια απεικόνιση (δηλαδή συνεχής, κλειστή και το $\mu^{-1}(y)$ είναι συμπαγές, για κάθε $y \in \mu(\Sigma L)$).*

Απόδειξη. (1) Έστω $x_0 \in X$ και D, W, $E \in \mathcal{D}$ έτσι, ώστε $W \circ W \subseteq \mathcal{D}$. Επιπλέον, αν $x \in E(x_0)$, τότε $(gx, gx_0) \in W$ για κάθε $g \in G$. Για $y \in \overline{G(x)}$ υπάρχει $g \in G$ έτσι, ώστε $(gx_0, y) \in D$. Άρα $\overline{G(x)} \subseteq D(\overline{G(x_0)})$. Όμοια $\overline{G(x_0)} \subseteq D(\overline{G(x)})$ και συνεπώς η μ είναι συνεχής.

(2) Η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη της απόδειξης του (1).

(3) Αν $y \in \mu(\Sigma L)$, τότε υπάρχει $x \in X$ έτσι, ώστε $\mu(x) = y$. Το $\mu^{-1}(y) = \overline{G(x)}$ είναι συμπαγές. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η μ είναι κλειστή. Έστω B ένα κλειστό υποσύνολο του ΣL και $\mu(x_i) \to \mu(x)$, $x_i \in B, x \in \Sigma L$. Για κάθε $V \in \mathcal{D}$ υπάρχει $i_0 \in I$ έτσι, ώστε $\overline{G(x_i)} \subseteq V(\overline{G(x)})$ για κάθε $i \geq i_0$. Άρα, για κάθε περιοχή U του $\overline{G(x)}$ στον X και για κάθε δείκτη i υπάρχει $j \geq i$ έτσι, ώστε $x_j \in U$. Συνεπώς, υπάρχει υποδίκτυο $x_j \to x_0 \in \overline{G(x)}$. Προφανώς, $x_0 \in B$ και, αφού ο $Y(X)$ είναι Hausdorff, $\mu(x) = \mu(x_0) \in B$. □

Πόρισμα 4.28 *Ο χώρος πηλίκο $\Sigma L/\approx$, όπου $x \approx y \Leftrightarrow \overline{G(x)} = \overline{G(y)}$, είναι ομοιομορφικός με τον $\mu(\Sigma L)$.*

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.27 (3) και του [50, Th. 9.2]. □

Θεώρημα 4.29 *Έστω $(X, \mathcal{D})$ ένας τοπικά συμπαγής ομαλός χώρος και (G, X) η δράση μιας μη συμπαγούς, τοπικά συμπαγούς και ισοσυνεχούς υποομάδας του $H(X)$.*

1. *Αν $x \in X$ και $\{g_i\}$ είναι ένα δίκτυο έτσι, ώστε $g_i x \to y$, τότε κάθε υποδίκτυο του $\{g_i\}$ έχει ένα συγκλίνον υποδίκτυο σε μια συνάρτηση ψ, με $\psi(x) = y$, ορισμένη σ' ένα ανοικτό και κλειστό υποσύνολο A του X και τιμές σ' ένα ανοικτό υποσύνολο του X. Αν ο X είναι δεύτερος αριθμήσιμος και η g_i είναι ακολουθία, τότε το σύνολο τιμών της ψ είναι και κλειστό.*

2. *Αν η G είναι σ-συμπαγής (π.χ., αν ο X είναι δεύτερος αριθμήσιμος) και υπάρχει ένα στοιχείο $\alpha \in A$ έτσι, ώστε (α) η $G(\alpha)$ να είναι κλειστή στον X και (β) η*

ομάδα ισοτροπίας G_α *να είναι κλειστή στο* $C(A,X)$, *τότε η προηγούμενη* ψ *είναι ο περιορισμός κάποιου* $\gamma \in G$. *Οι συνθήκες (α) και (β) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.*

Απόδειξη. (1) Αφού $g_i x \to y$, λόγω της ισοσυνέχειας της G, έχουμε $g_i^{-1} y \to x$. Από την τοπική συμπάγεια του X, υπάρχει δείκτης i_0 έτσι, ώστε αν $F = \{g_i : i \geq i_0\}$, τότε $x \in K(F)$ και $y \in K(F^{-1})$. Θέτουμε $A = K(F)$ και $\phi_A(g_i) = g_i : A \to X$. Από το Λήμμα 4.11, το A είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του X. Από το Θεώρημα Ascoli [42, Th. 3, p. 164], το $\phi_A(F)$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του $C(A,X)$. Επομένως, υπάρχουν $\psi \in C(A,X)$ και ένα υποδίκτυο $\phi_A(g_j)$ έτσι, ώστε $\phi_A(g_j) \to \psi$. Επιπλέον, αν $\psi(x) = \psi(y) = \omega$, τότε $g_j^{-1}\omega \to x$ και $g_j^{-1}\omega \to y$, άρα η ψ είναι "1-1".

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι το $\psi(A)$ είναι ανοικτό στον X και ότι η $\psi : A \to \psi(A)$ είναι ένας ομοιομορφισμός με την ιδιότητα $\phi_{\psi(A)} g_j^{-1} \to \psi^{-1}$. Πράγματι, αν $g : \psi(A) \to A$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της ψ και $y = \psi(z)$, $z \in A$, τότε $g_j z \to \psi(z)$. Από την ισοσυνέχεια της G, έχουμε $g_j^{-1} y \to z = g(y)$, άρα η g είναι συνεχής. Έστω $y = \psi(z)$, $z \in A$ και $\omega_i \to y$. Τότε υπάρχουν $z_i \in A$ έτσι, ώστε $\omega_i = \psi(z_i)$ τελικά για κάθε i και το $\psi(A)$ ανοικτό. Πράγματι, αφού $g_j z \to \psi(z)$, έχουμε $g_j^{-1} y \to z$. Από την τοπική συμπάγεια του X, υπάρχει ένας δείκτης j_0 έτσι, ώστε αν $F_1 = \{g_j : j \geq j_0\}$, τότε $y \in K(F_1^{-1})$. Όπως και πριν, υπάρχουν $g^* \in C(K(F_1^{-1}), X)$ και ένα υποδίκτυο g_k^{-1} έτσι, ώστε $g_k^{-1} \to g^*$ στο $K(F_1^{-1})$. Αφού το $K(F_1^{-1})$ είναι ανοικτό, ισχύει $\omega_i \in K(F_1^{-1})$ τελικά για κάθε i. Άρα $g^*(\omega_i) \to g^*(y)$. Επιπλέον, $g_k^{-1} y \to g^*(y)$, άρα $g^*(y) = z \in A$. Συνεπώς $g^*(\omega_i) \in A$ τελικά, αφού το A είναι ανοικτό. Αρκεί να δείξουμε ότι, αν $\omega \in K(F_1^{-1})$ και $g^*(\omega) = x \in A$, τότε $\psi(x) = \omega$. Πράγματι, αφού $g_k^{-1}\omega \to g^*(\omega)$ και $x \in A$, έχουμε $g_k x \to \omega$ και $g_k x \to \psi(x)$. Συνεπώς $\psi(x) = \omega$.

Στην περίπτωση που ο X είναι δεύτερος αριθμήσιμος, από την Πρόταση 2.1, τα οριακά σύνολα ορίζονται μέσω ακολουθιών. Έστω $g_k x \to y$. Το σύνολο $E = (\bigcup_{k \in N}\{g_k x\}) \cup \{y\}$ είναι συμπαγές. Αν, λοιπόν, θεωρήσουμε $F_2 = \{g_k : k \in N\}$ και $A = K(F_2)$, υπάρχει (όπως και πριν) υπακολουθία g_{k_n} και $\psi : A \to \psi(A)$ έτσι, ώστε $g_{k_n} \to \psi$ (υπάρχει υπακολουθία και όχι απλώς υποδίκτυο, γιατί, από το [18, Th. 5.2, p. 265], ο $C(A,X)$ είναι δεύτερος αριθμήσιμος ως προς τη συμπαγή–ανοικτή τοπολογία). Με εντελώς ανάλογο όπως πριν τρόπο αποδεικνύεται ότι το $\psi(A)$ είναι ανοικτό.

Θα δείξουμε ότι είναι και κλειστό. 'Εστω $F = \{g_{k_n} : n \in N\}$. Τότε $\psi(A) \subseteq K(F^{-1})$, επομένως, αν $\psi(x_i) \to z$ με $x_i \in A$, θα ισχύει $z \in K(F^{-1})$ και η $g_{k_n}^{-1}$ θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $g_\lambda^{-1} \to h$ στο $K(F^{-1})$. 'Αρα $\psi(x_i) \in K(F^{-1})$ για κάθε i και, αν $\psi(x_{i_0}) \in K(F^{-1})$, τότε $g_\lambda(x_{i_0}) \to \psi(x_{i_0})$. Συνεπώς $g_\lambda^{-1}(\psi(x_{i_0})) \to x_{i_0}$ και άρα $h(\psi(x_{i_0})) = x_{i_0}$. Τελικά, $h(\psi(x_i)) = x_i$, αλλά $h(\psi(x_i)) \to h(z)$, αφού $z \in K(F^{-1})$, επομένως $x_i \to h(z)$. Από το Λήμμα 4.11, το A είναι κλειστό, άρα $h(z) \in A$. Αφού $g_\lambda^{-1}(z) \to h(z)$, τότε $g_\lambda(h(z)) \to z$, επομένως $\psi(h(z)) = z \in A$.

(2) Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.12. Η ανεξαρτησία των συνθηκών 2 (α) και 2 (β) αποδεικνύεται στα Παραδείγματα 4.21 και 4.22. Στο μεν Παράδειγμα 4.21, αν $x = (1,0)$, η τροχιά $G(x)$ δεν είναι κλειστή, ισχύει $G_x = \{f_0\}$ και η G δεν είναι κλειστή στον $C(S^1, X)$. Στο δε Παράδειγμα 4.22, αν $x = (0,0)$, τότε $G_x = G$, $G(x) = \{x\}$ και η G δεν είναι κλειστή στον $C(D^1, X)$. □

Παρατήρηση: Η δεύτερη αριθμησιμότητα του X στο Θεώρημα 4.29 εξασφαλίζεται, αν ο X είναι μετρικοποιήσιμος και τοπικά συμπαγής με $H\Sigma(X)$ Lindelöf [Λήμμα 2.13].

Πρόταση 4.30 *Με τις υποθέσεις όπως στο Θεώρημα 4.17, αν ο X είναι δεύτερος αριθμήσιμος και η $G(x)$ είναι κλειστή στον X για κάποιο $x \in X$, τότε το μη κενό του $L(x)$ οφείλεται αποκλειστικά και μόνο στη μη συμπάγεια της G_x.*

Απόδειξη. 'Εστω $y \in L(x)$. Τότε, υπάρχει $g_i \to \infty$ έτσι, ώστε $g_i x \to y$. Αφού η τροχιά του x είναι κλειστή, υπάρχει $g \in G$ έτσι, ώστε $y = gx$. 'Οπως και στην απόδειξη της Πρότασης 2.12, εξαιτίας του [28, Th. 2.5, p. 7], η απεικόνιση $\varphi_x : G/G_x \to G_x$ [Πρόταση 1.5] είναι ομοιομορφισμός. 'Αρα $g_i G_x \to g G_x$. Από την τοπική συμπάγεια της G και επειδή η απεικόνιση–πηλίκο $G \to G/G_x$ είναι ανοικτή, υπάρχει μια σχετικά συμπαγής περιοχή V του g έτσι, ώστε $g_i = f_i \omega_i$ για $f_i \in V$ και $\omega_i \in G_x$ τελικά για κάθε i. Επομένως $g_i \to \infty \Leftrightarrow \omega_i \to \infty$. □

Θεώρημα 4.31 (Μελέτη κατά συνεκτικές συνιστώσες) *'Εστω $(X, \mathcal{D})$ ένας τοπικά συμπαγής, δεύτερος αριθμήσιμος ομαλός χώρος, (G, X) η δράση μιας μη συμπαγούς, τοπικά συμπαγούς και ισοσυνεχούς υποομάδας του $H(X)$ και S_i μια συνεκτική συνιστώσα του X. Αν θέσουμε $G_i = \{g \in G : g\,S_i = S_i\}$ και ορίσουμε την $\phi : G_i \to H(S_i)$ από την ισότητα $\phi(g)(x) = gx$, $\forall x \in S_i$, τότε:*

1. *Η G_i είναι κλειστή υποομάδα της G.*

2. *Η δράση $(\overline{\phi(G_i)}, S_i)$ είναι γνήσια, όπου $\overline{\phi(G_i)}$ είναι η θήκη της $\phi(G_i)$ στον $C(S_i, S_i)$ ως προς την συμπαγή–ανοικτή τοπολογία.*

3. *Με την επιπλέον υπόθεση ότι η $\overline{\phi(G_i)}$ δεν είναι συμπαγής, αν υπάρχει ένα $x \in S_i$ έτσι, ώστε ο $H\Sigma(\overline{\phi(G_i)}(x))$ να είναι συμπαγής ως προς την τοπολογία–πηλίκο, τότε η S_i έχει έναν R–παράγοντα (: δηλαδή ισχύει $S_i \simeq R \times Y$, όπου ο Y είναι ένας συνεκτικός, τοπικά συμπαγής και κλειστός υπόχωρος του S_i).*

4. *(Συνθήκη ώστε η $\phi(G_i)$ να είναι κλειστή). Αν υπάρχει ένα $x \in S_i$ έτσι, ώστε η τροχιά $G_i(x)$ να είναι κλειστή στον X και η $\phi(G_x)$ να είναι κλειστή στον $C(S_i, S_i)$ τότε η $\phi(G_i)$ είναι κλειστή στον $C(S_i, S_i)$.*

Απόδειξη. (1) Το συμπέρασμα προκύπτει, αν λάβουμε υπόψη ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι κλειστό σύνολο.

(2) Από την Πρόταση 4.13, η θήκη της $\phi(G_i)$ στον $C(S_i, S_i)$ είναι τοπολογική ομάδα και, από την Πρόταση 4.16 (1), είναι τοπικά συμπαγής. Από την ίδια πρόταση έπεται ότι η δράση $(\overline{\phi(G_i)}, S_i)$ είναι γνήσια.

(3) 'Αμεση συνέπεια της Πρότασης 2.14 (3), αν παρατηρήσουμε ότι η S_i θα είναι παρασυμπαγής, αφού είναι δεύτερος αριθμήσιμος χώρος [50, Cor. 20.8].

(4) Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.12. □

Παρατήρηση: Εκείνο που εξασφαλίζει την ύπαρξη του R–παράγοντα, όταν η $\phi(G_i)$ είναι κλειστή, είναι η μη συμπάγεια της συνεκτικής συνιστώσας της μονάδας της $\phi(G_i)$, η οποία είναι ισόμορφη με την $\overline{p_i(C)}$, όπου C είναι η συνεκτική συνιστώσα της μονάδας στην G και $p_i : G_i \to G_i/K_i$ με $K_i = \{g \in G : gx = x, \ \forall x \in S_i\}$ είναι η απεικόνιση–πηλίκο. [26, Th. 7.12, p. 63].

Πόρισμα 4.32 *Με τις υποθέσεις της προηγούμενης πρότασης, αν ο X είναι συνεκτικός, η G δρα γνήσια ακριβώς τότε, αν υπάρχει ένα $x \in X$ έτσι, ώστε η $G(x)$ να είναι κλειστή στον X και η G_x κλειστή στον $C(X, X)$.*

Παρατήρηση: Η ισομορφία συνεκτικών συνιστωσών, μέσω κάποιου $g \in G$, συνεπάγεται την ισομορφία των αντίστοιχων δράσεων:

Αν $S_j = gS_i$ και $h(\omega K_i) = g\omega g^{-1}K_j$, $\omega \in G_i$, τότε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό και, κατά συνέπεια, οι δράσεις $(G_i/K_i, S_i)$ και $(G_j/K_j, S_j)$ είναι ισόμορφες

$$\begin{array}{ccccc} G_i/K_i & \times & S_i & \longrightarrow & S_i \\ h \times g & \downarrow & & & \downarrow g \\ G_j/K_j & \times & S_j & \longrightarrow & S_j \ . \end{array}$$

Βιβλιογραφία

[1] H. Abels. Enden von Räumen mit eigentlichen Transformationsgruppen, *Comm. Math. Helv.*, 47 (1972), 457-473.

[2] H. Abels and P. Strantzalos. *Proper Transformation Groups*, to appear.

[3] S.K. Aranson and V.Z. Grines. On some invariants of dynamical systems on two-dimensional manifolds (necessary and sufficient conditions for the topological equivalence of Transitive dynamical systems), *Math. U.S.S.R. Sbornik*, 19, No 3 (1973), 365-393.

[4] S.K. Aranson and V.Z. Grines. On the represantations of minimal sets of currents on two–dimensional manifolds by geodesics, *Math. U.S.S.R. Izvestiya*, 12, No 1 (1978), 103-124.

[5] S.K. Aranson and V.Z. Grines. Topological classification of flows on closed two–dimensional manifolds, *Russ. Math. Surv.* 41: 1 (1986), 183-208.

[6] R. Arens. A Topology for Spaces of Transformations, *Ann. Math.*, 47, No 3 (1946), 480-495.

[7] R. Arens. Topologies for Homeomorphism Groups, *Amer. J. Math.*, 68 (1946), 593-610.

[8] K. Αθανασόπουλος. *Συμβολή στη θεωρία των D^+–ευσταθών δυναμικών συστημάτων σε διδιάστατες πολλαπλότητες*, Διδακτορική Διατριβή, Αθήνα, (1986).

[9] K. Athanassopoulos and A. Manoussos. Minimal flows on multipunctured surfaces of infinite type, *to appear*.

[10] N. P. Bhatia and O. Hajek. Local semidynamical systems, *Lecture Notes Math.*, 90, Springer, (1969).

[11] N.P. Bhatia and G.P. Szegö. *Stability Theory of Dynamical Systems*, Springer, Berlin, (1970).

[12] W. Boothby. *Differential Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, (1975).

[13] N. Bourbaki. *General Topology*, Part 1, Addison–Wesley, Reading, (1966).

[14] N. Bourbaki. *General Topology*, Part 2, Addison–Wesley, Reading, (1966).

[15] J. De Groot. The action of a locally compact group on a metric space, *Nieuw Arch. Wisk.*, Ser(3), 7 (1959), 70-74.

[16] A. Denjoy. Sur les courbes définies par les équation différentielles a la surface du tore, *J. Math. Pures et Appl.*, 11 (1932), 333-375.

[17] J. Dieudonné. On Topological Groups of Homeomorphisms, *Amer. J. Math.*, 70 (1948), 659-680.

[18] J.Dugundji. *Topology*, Allyn & Bacon, Boston (1966).

[19] J. Dugundji and H.A. Antosiewicz. Parallelizable Flows and Lyapunov's Second Method, *Ann. Math.*, 73, No 3 (1961), 543-555.

[20] W.E. Dydo. Proper G–spaces, *J. Diff. Geom.*, 9 (1974), 565-569.

[21] C.J. Gardiner. The structure of flows exhibiting nontrivial recurrence on two–dimensional manifolds, *J. Diff. Eq.*, 57 (1985), 138-158.

[22] O. Hajek. Compactness and asymptotic stability, *Math. Syst. Th.*, 4 (1970), 154-156.

[23] O. Hajek. Parallelizability Revisited, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 27, No 1 (1971), 77-84.

[24] O. Hajek. Seminar on Differential Equations and Dynamical Systems 2, *Lecture Notes Math.*, 144, Springer, (1970).

[25] O. Hajek and D.J. Simanaitis. Limit points which are not Sequentially Attainable, *Math. Syst. Th.*, 5, No 4 (1971), 289-291.

[26] E. Hewitt and K.A. Ross. *Abstract Harmonic Analysis*, Vol. 1, Springer–Verlag, Berlin (1963).

[27] M. Hirsch. *Differential Topology*, Springer, (1976).

[28] G. Hochschild. *The Structure of Lie Groups*, Holden–Day Inc., (1965).

[29] J.R. Isbell. *Uniform Spaces*, Amer. Math. Soc., Providence (1964).

[30] K. Iwasawa. On some types of Topological Groups, *Ann. Math.*, 50, No 3 (1949), 507-558.

[31] I. Kaplansky. *Lie Algebras and Locally Compact Groups*, Univ. Chicago Pr., Chicago (1971).

[32] J. Keesling. Using flows to construct Hilbert Space factors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 161 (1971), 1-24.

[33] R. Knight. Prolongationally stable transformation groups, *Math. Zeit.*, 161 (1978), 181-194.

[34] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, 1, Interscience, New York (1963).

[35] J.R. Mc Cartney. Maximum zero–dimensional compactifications, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 68 (1970), 653-661.

[36] S. Myers. Equicontinuous Sets of Mappings, *Ann. Math.*, 47, No 3 (1946), 496-502.

[37] Θ. Πετρέσκου. *D–ευσταθή Δυναμικά Συστήματα σε 2–πολλαπλότητες*, Διδακτορική Διατριβή, Αθήνα, (1989).

[38] T. Petrescou and P. Strantzalos. Ends and the structure of D–stable flows on 2–manifolds, *to appear*.

[39] I. Richards. On the classification of non–compact surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 106 (1963), 259-269.

[40] R.J. Sacker and G.R. Sell. On the existence of periodic solutions on 2–manifolds, *J. Diff. Eq.*, 11 (1972), 449-463.

[41] S. Saperstone. *Semidynamical systems in infinite dimensional spaces*, Springer (1981).

[42] H. Schubert. *Topology*, Mac Donald & Co., London (1968).

[43] K.S. Sibirsky. *Introduction to Topological Dynamics*, Nordhoff, Leyden (1975).

[44] P. Strantzalos. Actions by Isometries, *Transformation groups, Proc., Osaka 1987, Ed: K. Kawakubo, Lecture Notes Math.*, 1375 (1989), 319-325.

[45] P. Strantzalos. Dynamische systeme und topologische Actionen, *Manuscripta Math.*, 13 (1974), 207-211.

[46] P. Strantzalos. Eigentlich operierende Gruppen von Isometrien, *Fundamenta Math.*, 104 (1971), 225-232.

[47] P. Strantzalos. Kompaktheitseigenschaften der Gruppe der Isometrischer Räume, *Arch. Math.*, 33 (1979), 66-75.

[48] B.L. van der Waerden and D. van Dantzig. Über metrisch homogene Räume, *Abhandlungenaus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 6 (1928), 367-376.

[49] A. Weil. Sur les Espaces á Structure Uniforme et sur la Topologie Générale, *Act. Sci. Ind.* 551, Hermann, Paris (1937).

[50] S. Willard. *General Topology*, Addison–Wesley, (1970).

ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΙΔΙΚΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

$H(X)$	:	Το σύνολο των ομοιομορφισμών του X.
$I_d(X)$	:	Η ομάδα των επί–ισομετριών ενός μετρικού χώρου (X, d).
$Y(X)$	:	(hyperspace). Ο χώρος όλων των μη κενών, κλειστών υποσυνόλων ενός ομαλού χώρου $(X, \mathcal{D})$, εφοδιασμένος με την ομαλή δομή που προκύπτει, αν θεωρήσουμε ως βάση όλα τα $\{(A, B) : A \subseteq D(B)$ και $B \subseteq D(A)\}$, $D \in \mathcal{D}$.
$H\Sigma(X)$	:	Ο χώρος των ημισυνεκτικών συνιστωσών (quasicomponents) του X.
$C(X, Y)$	:	Το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων από το X στο Y.
A°	:	Το εσωτερικό του συνόλου A.
$\overline{A}$	:	Η θήκη του συνόλου A.
∂A	:	Το σύνορο του συνόλου A.
$S(x, \epsilon)$	:	Η σφαίρα κέντρου x και ακτίνας ϵ.