Mathematisches Seminar: Zahlentheorie (Iwasawa-Theorie)

Prof. Dr. Andreas Nickel

Wintersemester 2016/17

INHALT:
Thema dieses Seminars ist die sogenannte Iwasawa-Theorie. Diese studiert arithmetische Invarianten wie die Klassengruppe eines Zahlkörpers in unendlichen Körpertürmen. Insbesondere Galoiserweiterungen, deren Galoisgruppe isomorph zu den p-adischen ganzen Zahlen ist, werden betrachtet.

Diese Theorie wurde um 1960 vom japanischen Mathematiker Kenkichi Iwasawa ins Leben gerufen, dessen 100. Geburtstag wir im kommenden Jahr 2017 feiern.

Unsere Hauptreferenzen werden die beiden Bücher [1] und [2] sein. Weitere Literatur zur Iwasawa-Theorie sind z.B. die Bücher [4] und [5].

VORKENNTNISSE:
Algebra, Höhere Algebra, Algebraische Zahlentheorie; Kenntnisse in Klassenkörpertheorie sind hilfreich, aber nicht notwendig (diese Theorie wird aber in einigen Beweisen auftauchen); es wird auch etliche rein algebraische Vorträge geben.

ZEIT UND ORT:
Mi, 12–14, Theresienstr. 39, B 251

VORBESPRECHUNG:
Mittwoch, 05.10.2016, 14 Uhr s.t. Der Raum wird noch bekannt gegeben.
Falls Sie an der Vorbesprechung teilnehmen möchten, senden Sie mir doch bitte eine kurze E-Mail. Falls Sie am Seminar teilnehmen möchten, aber nicht zur Vorbesprechung kommen können, senden Sie mir bitte unbedingt eine E-Mail.
Diese lautet: anickel3@math.uni-bielefeld.de

VORTRAGSTHEMEN:

1. *Unendliche Galois-Theorie:* Der Hauptsatz der Galois-Theorie und die Verzweigungstheorie von Primidealen in Erweiterungen von Zahlkörpern werden auf unendliche Erweiterungen verallgemeinert [2, Appendix 2].

2. $\mathbb{Z}_p$-*Erweiterungen:* Beispiele von $\mathbb{Z}_p$-Erweiterungen (insbesondere die zyklotomische $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung [2, Beispiel am Ende von §7.3]) und deren grundlegen-

de Eigenschaften [2, Chapter 13.1 bis Lemma 13.3]. Für diesen Vortrag sind Kenntnisse in Klassenkörpertheorie erforderlich.

3. *Die Leopoldt-Vermutung I:* Die Vermutung von Leopoldt wird auf zwei Weisen formuliert ([1, Conjecture 10.3.5] und [2, direkt vor Theorem 5.31]), Beweis der Äquivalenz [1, Theorem 10.3.6, (i) $\iff$ (ii)], Definition des p-adischen Regulators für total reelle Zahlkörper [1, Definition 10.3.4] und [2, Theorem 5.31] als Korollar der Äquivalenz (unabhängig von den ersten beiden Vorträgen).

4. *Die Leopoldt-Vermutung II:* Definition des Leopoldt-Defekts δ, Zusammenhang der Leopoldt-Vermutung zur Anzahl unabhängiger $\mathbb{Z}_p$-Erweiterungen [2, Theorem 13.4], bekannte Fälle der Leopoldt-Vermutung [1, Theorem 10.3.16] (ohne Beweis). Für diesen Vortrag sind Kenntnisse in Klassenkörpertheorie erforderlich.

5. *Die Iwasawa-Algebra I:* Definition der Iwasawa-Algebra $\Lambda := \mathbb{Z}_p[\![\Gamma]\!]$, Teilen mit Rest in der Iwasawa-Algebra, Weierstraßscher Vorbereitungssatz ([2, Chapter 7.1 bis Corollary 7.4], Beweis von Theorem 7.1 im nächsten Vortrag; siehe auch [1, Chapter V, §3]). Als Motivation den Λ-Modul X (Limes der p-Klassengruppen) einführen [2, Seite 277]. (bis auf die Motivation rein algebraisch und unabhängig von den Vorträgen 1 bis 4)

6. *Die Iwasawa-Algebra II:* Die wichtigsten Eigenschaften der Iwasawa-Algebra (noethersch, faktoriell, lokal etc.), Bestimmung aller irreduziblen Elemente und aller Primideale [2, Lemma 7.5 und Theorem 7.1, Proposition 13.9, Lemma 13.11], siehe auch [1, Chapter V, §3] (rein algebraisch, unabhängig von den Vorträgen 1 bis 4).

7. *Der Struktursatz I:* Reflexive Moduln und deren erste Eigenschaften, Definition von 'Pseudo-Isomorphismus' und 'pseudo-null' [1, Chapter V, §1 bis 5.1.5]; geben Sie dabei Beweise für die Bemerkungen. Beweisen Sie die Behauptung $A = \bigcap_{\mathfrak{p}\in P(A)} A_{\mathfrak{p}}$ für die Iwasawa-Algebra; ebenso die im folgenden Vortrag benötigte Behauptung '$\operatorname{supp}(T_A(M)) \cap P(A)$ ist endlich' (rein algebraisch, unabhängig von den Vorträgen 1 bis 4).

8. *Der Struktursatz II:* Moduln bis auf Pseudo-Isomorphismus (Struktursatz), insbesondere der Fall der Iwasawa-Algebra, die Invarianten eines endlich erzeugten Iwasawa-Moduls: [1, Proposition 5.1.7 und 5.1.8; Theorem 5.1.10 aus 5.1.9; Definition 5.3.9], Beweis von 5.1.9 nur falls die Zeit reicht (rein algebraisch, unabhängig von den Vorträgen 1 bis 4).

9. *Iwasawa-Moduln I:* Topologie auf der Iwasawa-Algebra (etwa [1, Seite 283 oben]), Definition von Iwasawa-Moduln [1, Definition 5.3.6], topologisches Nakayama Lemma ([1, Lemma 5.2.18], siehe auch [2, Lemma 13.16]), Definition und erste Eigenschaften von M^δ [1, Definition 5.3.12 bis Lemma 5.3.14] (rein algebraisch, unabhängig von den Vorträgen 1 bis 4).

10. *Iwasawa-Moduln II:* Asymptotisches Verhalten von Iwasawa-Moduln [1, Proposition 5.3.17]; weitere Eigenschaften von Iwasawa-Moduln [1, Proposition 5.3.19 und eventuell 5.3.20] (rein algebraisch, unabhängig von den Vorträgen 1 bis 4).

11. *Asymptotisches Verhalten von Klassengruppen in $\mathbb{Z}_p$-Erweiterungen:* Satz von Iwasawa über das asymptotische Verhalten von Klassengruppen in $\mathbb{Z}_p$- Erweiterungen [2, Theorem 13.13] (der zentrale Satz des Seminars!); beim Beweis des Satzes beachten Sie, dass wir das Nakayama Lemma schon in größerer Allgemeinheit gesehen haben, und dass man (nach [2, Lemma 13.18]) [1, Proposition 5.3.17] anwenden kann, was den Beweis erheblich verkürzt (unabhängig von den Vorträgen 3 und 4). Für diesen Vortrag sind Kenntnisse in Klassenkörpertheorie hilfreich.

12. *Iwasawa-Adjungierte:* Definieren Sie Iwasawa-Adjungierte wie in [1, Definition 5.5.5]. Folgen Sie dann [3], Remarks 3.5.7 bis Theorem 3.5.12 (Achtung: Sharifi definiert Iwasawa-Adjungierte mit einem zusätzlichen $(-)^\iota$, das dann oft hinzugefügt bzw. weggelassen werden muss). Erwähnen Sie auch [1, Proposition 5.5.6] (ohne Beweis). Behandeln Sie auch [3, 4.2.11 bis 4.2.15].

13. *Die schwache Leopoldt-Vermutung:* Führen Sie den Leopoldt-Defekt ein [1, Corollary 10.3.7] (eine Definition genügt). Erklären Sie die schwache Leopoldt-Vermutung [1, Definition 10.3.21]. Beweisen Sie diese Vermutung für die zyklotomische $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung [2, Lemma 13.30]. Zeigen Sie auch [2, Theorem 13.31]. Wenn es die Zeit erlaubt, behandeln Sie auch noch [2, Proposition 13.32].

    Alternativ können Sie in diesem Vortrag auch [3, §4.3] behandeln.

Mögliche weitere Themen:
CM-Erweiterungen, die Iwasawa-Hauptvermutung

Literatur

[1] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, Kay Wingberg: *Cohomology of Number Fields*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **323**, Springer-Verlag (2008)

[2] Lawrence Washington: *Introduction to cyclotomic fields*, Graduate Texts in Mathematics **83**, Springer-Verlag (1997)

[3] Romyar Sharifi: *Notes on Iwasawa theory*, http://math.ucla.edu/~sharifi/iwasawa.pdf

[4] Serge Lang: *Cyclotomic fields I and II*, Graduate Texts in Mathematics **121**, Springer-Verlag (1990)

[5] John Coates, Ramdorai Sujatha: *Cyclotomic Fields and Zeta Values*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag (2006)