Funktionentheorie

Prof. Dr. Friedrich Götze
mitgeschrieben von Arthur Sinulis

14. Januar 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Der Körper der komplexen Zahlen

Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ aller Paare reeller Zahlen mit der Addition und Multiplikation

$$(a_1,b_1) + (a_2,b_2) := (a_1+a_2, b_1+b_2) \tag{1.1}$$
$$(a_1,b_1) \cdot (a_2,b_2) := (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1) \tag{1.2}$$

Mit diesen Operationen wird die Menge $\mathbb{R}^2$ zu einem Körper, genannt der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit dem neutralen Element $(1,0)$ bezüglich der Multiplikation.
Das inverse Element bezüglich der Multiplikation zu $(a,b) \neq (0,0)$ ist

$$(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, a \mapsto (a,0)$ ist ein injektiver Körperhomomorphismus, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \varphi(a_1+a_2) &= \varphi(a_1) + \varphi(a_2) \\ \varphi(a_1 \cdot a_2) &= \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2) \\ \varphi(1_{\mathbb{R}}) &= 1_{\mathbb{C}} := (1,0). \end{aligned}$$

Damit enthalten die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Unterkörper.
Schreibe a statt $(a,0)$. Setzen wir $i := (0,1)$, so lässt sich $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ als $z = 1_{\mathbb{C}} \cdot a + ib$ schreiben.
$\{1, i\}$ ist eine reelle Basis von $\mathbb{C}$. Es gilt: $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$.
Man definiert das Produkt zweier komplexer Zahlen als

$$z_1 \cdot z_2 := (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1) \cdot i$$

Ist $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, so heißt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &:= x && \text{der Realteil von } z \\ \mathrm{Im}(z) &:= y && \text{der Imaginärteil von } z \\ \overline{z} &:= x - iy && \text{die zu } z \text{ komplex konjugierte Zahl} \\ |z| &:= \sqrt{x^2+y^2} && \text{der (Absolut-)Betrag von} z \end{aligned}$$

Dabei sind Re, Im: $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung und $\overline{a} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Körperautomorphismus, d.h.

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \overline{z_1z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \overline{1_{\mathbb{C}}} = 1, \overline{i} = -i.$$

Rechenregeln:

(*a*) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$

(*b*) $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$

(*c*) $|z| = \sqrt{z\overline{z}} \geq 0$

(*d*) $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

(*e*) $-|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq +|z|$

(*f*) $-|z| \leq |\mathrm{Im}(z)| \leq +|z|$

(*g*) $|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$ ($\| \, \|_2 \leq \| \, \|_1$ im $\mathbb{R}^2$)

(*h*) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$

(*i*) $z \in \mathbf{i}\,\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$

(*j*) $|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(*k*) $|w \cdot z| = |w| \cdot |z|$

(*l*) $|w + z| \leq |w| + |z|$ (Δ-Ungleichung)

Beweis:
Nachrechnen:
(k): $|w \cdot z|^2 = wz\overline{wz} = w\overline{w}z\overline{z} = |w|^2|z|^2$.
(l): Δ-Ungleichung für $\| \, \|_2$ im $\mathbb{R}^2$:

$$z = x + iy, x, y \in \mathbb{R} \Longrightarrow |z| = \left\| (x, y)^T \right\|_2$$

direkt: bei $w + z = 0$ ist (l) klar.
Sei also $w + z \neq 0$. Dann gilt mit $1 = \frac{w}{w+z} + \frac{z}{w+z}$

$$1 = \mathrm{Re}\left(\frac{w}{w+z}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{z}{w+z}\right) \overset{(e)}{\leq} \left|\frac{w}{w+z}\right| + \left|\frac{z}{w+z}\right| \overset{(h)}{=} \frac{|w|}{|w+z|} + \frac{|z|}{|w+z|}$$

Die Multiplikation mit $|w + z|$ liefert die Behauptung. $\square$

Bei der komplexen Multiplikation $z_1 \cdot z_2$ gilt: Multiplikation der Beträge, Addition der Winkel von z_1 und z_2.
Alle $(x, y) \in S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$ kann man darstellen in der Form

$$u(\varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \text{ mit } \varphi \in \mathbb{R}$$

φ ist bis auf Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt. Daher gilt

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} =: r \cdot u(\varphi) \quad \text{wobei } r \in \mathbb{R}^+ \text{ und } \varphi \in [0, 2\pi[\tag{1.5}$$

φ heißt Winkel (oder Argument) von z, geschrieben $\varphi = \arg(z)$.

Polarkoordinatendarstellung

Es gilt mit den Additiostheoremen für die trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned}
u(\varphi_1)u(\varphi_2) &= (\cos\varphi_1 + i\cdot\sin(\varphi_1))\cdot(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2)\\
&= \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\cdot(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\\
&= \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\cdot(\sin(\varphi_1+\varphi_2))\\
&= u(\varphi_1+\varphi_2)
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$z_1 = r_1 u(\varphi_1), z_2 = r_2 u(\varphi_2) \Longrightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 u(\varphi_1+\varphi_2)$$

Mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion ($e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin(\varphi)$) lässt sich dies schreiben als:

$$e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

1.2 Topologie

Um auf $\mathbb{C}$ Analysis zu betreiben, benötigen wir einen Konvergenzbegriff. Der (euklidische) Abstand in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist definiert als

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

wobei $z_1 = x_1 + i \cdot y_1, z_2 = x_2 + i \cdot y_2$.

Definition 1.8:
Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$K_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : d(z, z_0) = |z - z_0| < \varepsilon\} \subseteq U.$$

Definition 1.9:
Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt konvergent gegen $z \in \mathbb{C}$, falls in jeder Umgebung U von z alle (bis auf endlich viele) Folgeglieder von z_n liegen, d.h.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \forall\, n \geq n_0 : |z_n - z| < \varepsilon$$

z heißt der Grenzwert oder Limes der Folge und man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \text{ oder } z_n \to z.$$

Bemerkung:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0.$

ii) Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt (Hausdorff'sches Trennungsaxiom).

iii) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge, d.h. $\mathbb{C}$ ist vollständig.

Beweis:

"$\Longrightarrow$": Nutze die Dreiecksungleichung.
"$\Longleftarrow$": Nutze die Vollständigkeit des $\mathbb{R}^2$. Oder direkt:
$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge $\stackrel{1.4(e),(f)}{\Longrightarrow}$ $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}, (\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sind Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$, sodass aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ $x, y \in \mathbb{R}$ existieren mit $\mathrm{Re}(z_n) \to x$ und $\mathrm{Im}(z_n) \to y$ $\stackrel{1.4(g)}{\Longrightarrow}$ $z_n \to x + iy =: z$. □

iv) **Rechenregeln:**

$$w_n \to w, z_n \to z \Longrightarrow w_n \pm z_n \to w \pm z, w_n z_n \to wz, \frac{w_n}{z_n} \to \frac{w}{z}, \text{ falls } z \neq 0$$

Außerdem:
$z_n \to z \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z).$
$z_n \to z \Longleftrightarrow \overline{z_n} \to \overline{z}$
$z_n \to z \Longrightarrow |z_n| \to |z|$

v) Die Konvergenz von Reihen ist ein Spezialfall und ist als Konvergenz der Partialsummen definiert.

Beispiel:
$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$ für $|z| < 1$.

Es gelten die Sätze über Majorantenkriterium, Quotientenkriteriun und Wurzelkriterium auch für $\mathbb{C}$.

Wie in Analysis II führt man ein:

- Umgebung (von $z \in \mathbb{C}$).
- Offene und abgeschlossene Mengen.
- Das System der offenen Mengen, genannt Topologie.
- Der offene Kern $\mathring{A}$ einer Menge $A \subset \mathbb{C}$, wobei $\mathring{A} = \bigcup\{M \subset A, M \text{ offen}\}$
- Die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ von $A \subset \mathbb{C}$, wobei $\overline{A} = \bigcap\{A \subset M, M \text{ abgeschlossen}\}$
- Den Rand einer Menge $\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$.
- Dichte Teilmengen.
- Häufungspunkte von $A \subset \mathbb{C}$.
- Teilraumtopologie von $A \subset \mathbb{C}$.
- Den Begriff der Stetigkeit einer Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ mit $A \neq \emptyset, A \subset \mathbb{C}$.
- Kompaktheit und Folgenkompaktheit.
- Zusammenhang und Wegzusammenhang.

Definition:
Sei X ein metrischer Raum, z.B. $X = (\mathbb{C}, |\cdot|)$. Dann heißt X zusammenhängend, wenn aus $X = U \cup V$ wo U, V offen und $U \cap V = \emptyset$ folgt $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$.

Definition:
X heißt wegzusammenhängend, wenn für alle $x, y \in X$ ein stetiger Weg von x nach y existiert, der ganz in X liegt, d.h.

$$\exists\ \gamma \in \mathcal{C}([a,b], X) \text{ mit } \gamma(a) = x, \gamma(b) = y.$$

Beispiel:
$A = \overline{K_{\frac{1}{2}}(1)} \cup \overline{K_{\frac{1}{2}}(i)} \subset \mathbb{C}$ ist mit Teilraumtopologie nicht zusammenhängend.

Bemerkung:
Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Funktion.

(i) X zusammenhängend $\Longleftrightarrow$ Ist $A \subset X$ offen und abgeschlossen, so gilt $A = \emptyset$ oder $A = X$.

(ii) X zusammenhängend $\Longleftrightarrow$ Jede lokalkonstante Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist konstant.

(iii) X zusammenhängend $\Longrightarrow$ $f(X)$ zusammenhängend
X wegzusammenhängend $\Longrightarrow$ $f(X)$ wegzusammenhängend

(*iv*) X wegzusammenhängend $\Longrightarrow X$ zusammenhängend

(*v*) Ist $A \subset \mathbb{C}$ offen, so gilt auch die Umkehrung von (*iv*).

Beweis:
(*i*) − (*iv*) Analysis II. $\square$

Definition 1.10:
Jede nichtleere, offene und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$ heißt Gebiet.

1.3 Komplexe Differenzierbarkeit

Erinnerung (Grenzwert von Funktionen)**:**
Ist $M \subset \mathbb{C}$, $f : M \to \mathbb{C}$ und z_0 Häufungspunkt von M, d.h. es existiert eine Folge (z_n) in $M \backslash \{z_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, so schreiben wir $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c \in \mathbb{C}$, wenn für jede Folge $(z_n) \subset M\backslash\{z_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ auch $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = c$ gilt.

(i) In $(z_n)_n$ kommt z_0 nicht vor.

(ii) Ist $z_0 \in M$, so gilt

$$f \text{ stetig in } z_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(z_n) \text{ existiert und } \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0).$$

Definition 1.13 (Komplexe Differenzierbarkeit)**:**
Sei $M \subset \mathbb{C}$, $f : M \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in M$ ein Häufungspunkt. Dann heißt f komplex differenzierbar in z_0 mit Ableitung c, falls der Grenzwert

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: c$$

existiert. Dann heißt c Ableitung von f in z_0 und wir schreiben $c = f'(z_0)$.

Lemma 1.15:
Sei $M \subset \mathbb{C}$, $f : M \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in M$ ein Häufungspunkt von M. Dann sind äquivalent:

(i) *f ist komplex differenzierbar in z_0.*

(ii) *Es gibt eine Funktion $g : M \to \mathbb{C}$, die in z_0 stetig ist und*

$$f(z) = f(z_0) + g(z)(z - z_0) \ \forall z \in M \tag{1.16}$$

(iii) *Es gibt ein $\omega \in \mathbb{C}$ und eine Funktion $r : M \to \mathbb{C}$ mit*

$$f(z) = f(z_0) + \omega(z - z_0) + r(z) \ \textit{und} \ \lim_{z\to z_0} \frac{r(z)}{z - z_0} = 0 \tag{1.18}$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt $f'(z_0) = g(z_0) = \omega$.

Beweis: Analysis I:

$i) \implies ii)$: Setze $g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{für } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{für } z = z_0 \end{cases}$

$ii) \implies iii)$: Setze $\omega = g(z_0)$, $r(z) := (g(z) - \omega)(z - z_0)$

$iii) \implies i)$: klar.

□

Komplexe vs. reelle Differenzierbarkeit

Ist $M \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f : M \to \mathbb{R}^2$, $z_0 \in M$, so heißt f reell differenzierbar in z_0, wenn es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sowie eine Funktion $r : M \to \mathbb{R}^2$ gibt, sodass für alle $z \in M$ gilt

$$f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + r(z) \tag{1.19}$$

mit

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\|r(z)\|}{|z - z_0|} = 0 \tag{1.20}$$

Die Funktionalmatrix von $f = (u, v)$ im Punkt z_0 ist $(x, y) \xrightarrow{f} (u(x, y), v(x, y))$

$$L(\omega) := \begin{pmatrix} \frac{\partial u(z_0)}{\partial x} & \frac{\partial u(z_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(z_0)}{\partial x} & \frac{\partial v(z_0)}{\partial y} \end{pmatrix}, \omega \in \mathbb{R}^2$$

Zusammenhang von (1.18) und (1.19)? Aus (1.18) folgt (1.19), denn mit $\omega = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$ ist eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $z \mapsto \omega z$ gegeben, also auch eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $z \mapsto \omega z$ in Matrixdarstellung mit $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $1, i = (1, 0), (0, 1)$ im $\mathbb{R}^2$.
Ist umgekehrt (1.19) erfüllt, wobei b bezüglich der Basis $1, i$ die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

mit $c = -b$, $d = a$ hat, so gilt (1.18) mit $\omega = a + ib \in \mathbb{C}$.

Satz 1.21:
Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : M \to \mathbb{C}$, $z_0 \in M$ und seien $u := \mathrm{Re}(f), v := \mathrm{Im}(f)$. Dann ist f komplex differenzierbar in z_0 genau dann, wenn $f(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ in z_0 reell differenzierbar ist und

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \text{ sowie } \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \tag{1.22}$$

gilt. Es gilt dann:

$$f'(z_0) = \frac{du}{dx}(z_0) + i\frac{dv}{dx}(z_0) \tag{1.23}$$

Erinnerung:
Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, $f : M \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in M$.

- f reell differenzierbar in $z_0 \Longrightarrow u, v$ reell differenzierbar in z_0.
- u, v reell differenzierbar in $z_0 \Longrightarrow u, v$ partiell in z_0 differenzierbar.
- u, v partiell differenzierbar in einer Umgebung von z_0 + partielle Ableitung stetig $\Longrightarrow$ (u, v) reell differenzierbar in z_0.

Bemerkung 1.24:
Sei $M \subset \mathbb{C}, f : M \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in M$ Häufungspunkt von M.

(i) f komplex differenzierbar in $z_0 \Longrightarrow f$ stetig in z_0.

(ii) Es gelten Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel.

Beispiel 1.25:

(i) $f(z) := c, c \in \mathbb{C}$ fest ist auf $\mathbb{C}$ differenzierbar.

(ii) $f(z) := z$ ist komplex differenzierbar mit $f'(z) = 1$.

(iii) Also sind nach Polynomfunktionen auf $\mathbb{C}$ differenzierbar sowie rationale Funktionen auf ihrem Definitionsbereich.

(iv) $f(z) := \overline{z}$ ist in keinem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Zwar ist f als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung reell differenzierbar, die Funktionalmatrix ist aber $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

(v) $f(z) = z\overline{z} = |z|^2$ ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht komplex differenzierbar.

(vi) **Potenzreihe:** Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $(a_n) \subset \mathbb{C}$. Ein Ausdruck der Form

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

heißt Potenzreihe um z_0.
Aus Analysis I wissen wir, dass ein eindeutig bestimmtes $r \in [0, \infty]$ existiert, sodass $|z - z_0| < r \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergent und $|z - z_0| > r \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ divergiert.
Dabei heißt r der Konvergenzradius der Potenzreihe. Die Konvergenz ist gleichmäßig in $|z - z_0| \leq s < r$.
Nach dem Satz von Cauchy-Hadamard gilt

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \text{ mit den Konventionen } \frac{1}{0} := \infty \text{ und } \frac{1}{\infty} = 0$$

Für diese z gilt gleichmäßig absolute Konvergenz und man kann gliedweise differenzieren, d.h.

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

Beispiel:

$a)$ Mit $a_n \equiv 1$ erhalten wir $r = 1$. Dabei gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} \text{ für } |z| < 1$$

$b)$ Für $a_n = \frac{1}{n!}$ erhalten wir $r = \infty$ und die Exponentialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp z$$

$c)$ Für $a_n = n!$ folgt $r = 0$, d.h. die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n!(z - z_0)^n$ konvergiert nur in $z = z_0$.

d) Wir definieren die Reihen

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \text{ mit } r = \infty \qquad \text{(Cosinus-Reihe)}$$

und

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ mit } r = \infty \qquad \text{(Sinus-Reihe)}$$

Die Eulersche Formel besagt

$$\exp iz = \cos z + i \sin z$$

e) Definiere die Reihe

$$\lambda(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \text{ mit } r = 1 \qquad \text{(Logarithmus-Reihe)}$$

f)

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} z^{2n-1} \text{ mit } r = 1 \qquad \text{(Arkustangens-Reihe)}$$

g) Definiere die binomische Reihe

$$b_\delta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\delta}{n} z^n$$

wobei

$$\binom{\delta}{n+1} = \frac{\delta - n}{n+1} \binom{\delta}{n}$$

Dann ist $r = 1$ und falls $\delta \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+z)^\delta = b_\delta(z)$$

Definition 1.26:
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. $f : U \to \mathbb{C}$ heißt holomorph in U, wenn f in jedem Punkt z aus U komplex differenzierbar ist.

Satz 1.27:
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$, $u = \mathrm{Re}(f), v = \mathrm{Im}(f)$. Dann ist f genau dann holomorph, wenn f auf U reell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (Formel 1.22) erfüllen.

Beispiel 1.29:
Wird $f : K_r(z_0) \to \mathbb{C}$ auf $K_r(z_0)$ durch eine Potenzreihe dargestellt, so ist f auf $K_r(z_0)$ holomorph.

Erinnerung:

- **Multiplikation von Vektoren im $\mathbb{R}^2$**
  Seien $z = \binom{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}$ und $v = \binom{\operatorname{Re} v}{\operatorname{Im} v} \in \mathbb{R}^2$. Dann ist
  $$L_z(w) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, z \mapsto zw = wz = L_w(z)$$
  eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.
  $$h \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & -\operatorname{Im} z \\ \operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix} \cdot h$$
  Es gilt: $L_{zw}(v) = L_z(L_w(v)) = (L_z \circ L_w)(v)$.

- **Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$**
  Das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist definiert als
  $$\langle w, z \rangle := \operatorname{Re}(w\overline{z}) = \operatorname{Re}(w)\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(w)\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(\overline{w}z) = \langle z, w \rangle \tag{1.30}$$
  Dann ist $|z| = \langle z, z \rangle^{\frac{1}{2}} = \|z\|_2$ und $|\overline{z}| = |z|$. Es gilt $|\operatorname{Re} z| \leq |z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|$ (Cauchy-Schwarz) und die Identitäten
  $$\langle w, z \rangle = 0 \Leftrightarrow z, w \text{ orthogonal} \tag{1}$$
  $$z, w \cdot z \text{ orthogonal } \Leftrightarrow w \in i\,\mathbb{R} \tag{2}$$

- **Partielle Differentation nach $x, y, z, \overline{z}$**
  Ist $f : D \to \mathbb{R}^2$ in $z_0 \in D$ auf $D \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet reell differenzierbar, so gilt
  $$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z) - T(h)}{|h|} = 0$$
  für eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, hier $T = Df(z_0)$.

- $f : D \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ reell differenzierbar in $z_0 \in D \subset \mathbb{R}^2 \iff$ es gibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und eine in z_0 stetige Funktion $r : D \to \mathbb{C}$ mit
  $$f(z_0 + h) - f(z_0) + T(h) + r(h)$$
  wo obiger Limes gilt. Sei $f = u + iv$, so ist
  $$T(h) = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Re} h \\ \operatorname{Im} h \end{pmatrix}$$
  Es gilt:
  $$T(h) = T(1)\operatorname{Re}\left(\frac{h + \overline{h}}{2}\right) + T(i)\operatorname{Im}\left(\frac{h - \overline{h}}{2}\right) = \lambda h + \mu \overline{h} \tag{1.31}$$
  mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}^2$, wobei mit $r = \operatorname{Re}(h), s = \operatorname{Im}(h)$ gilt:
  $$\begin{aligned} \frac{r}{2}(T(1) + T(i)) + \frac{s}{2}(T(i) - T(i)) = \quad & \frac{1}{2}(T(1) - T(i)i) \cdot (r1 + si) \\ + \quad & \frac{1}{2}(T(1) + T(i)i) \cdot (r1 - si) \end{aligned}$$
  sowie
  $$\lambda = \frac{1}{2}(T(1) - T(i)i), \mu = \frac{1}{2}(T(1) + T(i)i) \tag{1.33}$$
  $$T(1) = u_x(z_0) + iv_x(z_0), T(i) = u_y(z_0) + iv_y(z_0)$$

Definition 1.34:
Ist f reell differenzierbar mit Differential T in z_0, so heißen die Größen

$$\begin{aligned} f_x(z_0) &:= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) && := T(1) \\ f_y(z_0) &:= \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) && := T(i) \\ f_z(z_0) &:= \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) && =: \lambda \\ f_{\overline{z}}(z_0) &:= \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) && =: \mu \end{aligned}$$

die partiellen Ableitungen von f nach $x, y, z, \overline{z}$. Es gilt

$$\begin{aligned} T(h) &= f_x(z_0) \cdot \mathrm{Re}(h) + f_y(z_0) \cdot \mathrm{Im}(h) \\ &= f_z(z_0) \cdot h + f_{\overline{z}}(z_0) \cdot h \\ &= \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\ h \\ \mathrm{Im}\ h \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Satz 1.35:
Für $f : D \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2, D \subseteq \mathbb{R}^2$ sind äquivalent:

(i) *f ist reell differenzierbar.*

(ii) *Es existieren in z_0 stetige Funktionen $\hat{f}_1, \hat{f}_2 : D \to \mathbb{C}$, sodass*

$$f(z) = f(z_0) + \hat{f}_1(z) \cdot (z - z_0) + \hat{f}_2 \cdot (\overline{z} - \overline{z_0}) \ \forall\ z \in D$$

(iii) *Es existieren in z_0 stetige Funktionen $f_1, f_2 : D \to \mathbb{C}$ mit $z = x + iy$ und*

$$f(z) = f(z_0) + f_1(z)(x - a) + f_2(z)(y - b) \ \forall\ z \in D$$

Ist eine von den drei Bedingungen erfüllt, so gilt

(i) $f_z(z_0) = \hat{f}_1(z_0)$ $\qquad$ (ii) $f_{\overline{z}}(z_0) = \hat{f}_2(z_0)$
(iii) $f_x(z_0) = f_1(z_0)$ $\qquad$ (iv) $f_y(z_0) = f_2(z_0)$

Beweis:
$i) \Rightarrow ii)$: Aus $i)$ erhält man die lineare Abbildung

$$r(h) = R(z_0 + h) \cdot h, R(z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$z \mapsto R(z)$ ist stetig in z_0 und $R(z_0) = 0$. Wie in (1.33) zerlege

$$R(z) \cdot h = R_1(z) \cdot h + R_2(z) \cdot \overline{h}$$

mit $R_i : D \to \mathbb{R}^2$.
Schließlich setze

$$\hat{f}_1(z) = \lambda + R_1(z) \text{ und } \hat{f}_2(z) = \mu + R_2(z)$$

$ii) \Rightarrow iii)$: Setze $f_1 := \hat{f}_1 + \hat{f}_2$ und $f_2 = i(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)$, $z - z_0 = (x-a) + (y-h)$.
$iii) \Rightarrow i)$:

$$T(h) := f_1(z_0)\operatorname{Re}(h) + f_1(z_0)\operatorname{Im}(h)$$

ist $\mathbb{R}$-linear und es folgt

$$\begin{aligned} f(z_0+h) - f(z_0) - T(h) &= (f_1(z) - f_1(z_0))(x-a) + (f_2(z) - f_2(z_0))(y-b) \\ &= R(z)(z-z_0) \end{aligned}$$

wobei $R(z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear, stetig in z_0 mit $R(z_0) = 0$. □

Für differenzierbare $f : D \to \mathbb{C}, f = u + iv$ sind $u_x, u_y, v_x, v_y, f_z, f_{\overline{z}}$ stetig mit

$$f_x = u_x + iv_x, f_y = u_y + iv_y, f_z = \frac{1}{2}(f_x + if_y), f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y) \tag{1.36}$$

Heuristik:
Betrachte $x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), y = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$ als Funktion der neuen Variablen $z, \overline{z}$ und wende die Kettenregel an. Aus 1.36 folgt

$$u_x = \frac{1}{2}(f_x + \overline{f_x}), u_y = \frac{1}{2}(f_y + \overline{f_y}), v_x = \frac{1}{2}(f_x - \overline{f_x}), v_y = \frac{1}{2}(f_y - \overline{f_y})$$

Es gilt: $f_x = f_z + f_{\overline{z}}, f_y = i(f_z - f_{\overline{z}})$.
Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen lauten dann für holomorphe Funktionen $f = u + iv$

$$f' = u_x + iv_x = -i \cdot (u_y + iv_y)$$

oder mit einer Gleichung

$$f' = f_x = -if_y$$

Satz 1.37:
$\overline{f} : D \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn $f_z \equiv 0$ in D und $f_{\overline{z}}(z_0)$ ist die Ableitung von f in $z_0 \in D$ (Übung).

Satz 1.38:
Sei $f : D \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar auf einem Gebiet D. Dann ist f holomorph in D genau dann, wenn

$$if_x(z) = f_y(z)\ \forall z \in D \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = f_{\overline{z}}(z) = 0\ \forall z \in D$$

Beweis:
Äquivalenz folgt aus $i) \Leftrightarrow iii)$ in Satz 1.35. □

Definition 1.39:
Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph in D, wobei $f = u + iv$, so heißt $\overline{f} = u - iv$ antiholomorph in D. Somit gilt wegen $u_x = v_y, u_y = v_x$, dass $\overline{f_z}(z_0) = 0$.

2 Holomorphe Funktionen und Winkeltreue

Definition 2.1:
Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$, D Gebiet, die reell differenzierbar in $z_0 \in D$ ist, heißt winkeltreu, falls

$$T := Df(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

eine winkeltreue lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ ist. Dabei heißt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ winkeltreu, falls T injektiv ist und

$$\frac{\langle T(w), T(z)\rangle}{\|T(w)\| \, \|T(z)\|} = \frac{\langle w, z\rangle}{\|w\| \, \|z\|}$$

Lemma 2.2:
Es sind äquivalent:

(i) $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist winkeltreu (conformal).*

(ii) $\exists\ a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *mit* $T(z) = az$ *oder* $T(z) = a\overline{z}$ *mit* $z \in \mathbb{C}$.

(iii) $\exists\ s > 0$ *mit* $\langle T(z), T(w)\rangle = \langle w, z\rangle \cdot s\ \forall w, z \in \mathbb{C}$.

Beweis:
$i) \Rightarrow ii)$: Da T injektiv ist, gilt mit $a := T(1) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $b := \frac{1}{a} \cdot T(i) \in \mathbb{C}$ in Verbindung mit 1.30

$$0 = \langle i, 1\rangle = \langle T(i), T(1)\rangle = \langle ab, a\rangle = |a|^2 \cdot \mathrm{Re}(b)$$

d.h. $\mathrm{Re}(b) = 0$ oder $b = ri, r \in \mathbb{R}$.
Also gilt mit $z = x + iy$

$$T(z) = x \cdot T(1) + y \cdot T(i) = (x + iyr) \cdot a$$

d.h. $\langle T(1), T(z)\rangle = \langle a, (x + iry)a\rangle = |a|^2 x$.
Damit folgt aus der Winkeltreue von T mit $w = 1\ \forall\ z \in \mathbb{C}$

$$|x + iy|^2 \, |a|^2 \cdot x = T(1) \, |T(z)| \, \langle T(1), T(z)\rangle = |a| \, |T(z)| \, \langle 1, z\rangle = |a| \, |a(x + iry)|$$

d.h. für alle z mit $x \neq 0$ durch Division $|x + iy| = x + iry$ oder nach Quadrieren $x^2 + y^2 = x^2 + r^2y^2$, d.h. $(r^2 - 1)y^2 = 0$ für alle y und damit folgt $r = \pm 1$.
Folglich ist $T(z) = a(x \pm iy)$, d.h. $T(z) = az$ oder $T(z) = a\overline{z}$.
$ii) \Rightarrow iii)$: Da $\langle \overline{w}, z\rangle = \mathrm{Re}(\overline{w}z) = \mathrm{Re}(\overline{\overline{w}z}) = \mathrm{Re}(w\overline{z}) = \langle w, z\rangle$, gilt in beiden Fällen $\langle T(w), T(z)\rangle = s \, \langle w, z\rangle$, $s := |a|^2 > 0$.
$iii) \Rightarrow i)$: Da stets $|T(z)| = \sqrt{s}\,|z|$, so ist T injektiv und

$$|w| \, |z| \, \langle T(w), T(z)\rangle = |w| \, |z| \, \sqrt{s}^2 \, \langle w, z\rangle = |T(w)| \, |T(z)| \, \langle w, z\rangle$$

□

Nach diesem Lemma 2.2 sind alle Abbildungen $h \mapsto \lambda h, \lambda \neq 0$ bzw. $h \mapsto \mu\overline{h}, \mu \neq 0$ winkeltreu. Also gilt:

Folgerung 2.3:
Sei $D \subset \mathbb{C}$ *offen. Seien* $f : D \to \mathbb{C}$ *oder* $\overline{f} : D \to \mathbb{C}$ *holomorph in* D *und sei* $f'(z_0) \neq 0$ *bzw.* $\overline{f}'(z_0) \neq 0$ *für alle* $z \in D$, *so ist* f *winkeltreu in* D.

Beweis:
Klar, da

$$Df(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, h \mapsto f_z(z_0) \cdot h + f_{\overline{z}}(z_0) \cdot \overline{h}$$

Nach Satz 1.38 gilt $f_{\overline{z}}(z_0) \equiv 0$ für f holomorph und $f_z(z_0) \equiv 0$ für f antiholomorph und somit nach Lemma 2.2 die Winkeltreue von f. □

Satz 2.4:
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ reell stetig differenzierbar. Dann sind äquivalent:

(i) *f ist holomorph oder antiholomorph in ganz G und $f'(z) \neq 0$ bzw. $\overline{f'(z)} \neq 0$ auf G.*

(ii) *f ist winkeltreu.*

Beweis:
Nach Folgerung 2.3 bleibt nur $ii) \Rightarrow i)$ zu zeigen. Die Abbildung

$$Df(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, h \mapsto f_z(z_0) \cdot h + f_{\overline{z}}(z_0) \cdot \overline{h}$$

ist nach Lemma 2.2 genau dann winkeltreu, falls entweder $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$ und $f_z(z_0) \neq 0$ oder $f_{\overline{z}}(z_0) \neq 0$ und $f_z(z_0) = 0$ für alle $z_0 \in G$.
Die Funktion

$$z_0 \mapsto \frac{f_z(z_0) - f_{\overline{z}}(z_0)}{f_z(z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)}$$

ist nach Voraussetzung auf G wohldefiniert und stetig. Die Funktion hat nur die Werte ± 1. Wegen dem Zusammenhang von G ist diese Funktion konstant. Dies bedeutet, dass $f_{\overline{z}} \equiv 0$ und $f_z \neq 0$ in G oder umgekehrt □

Beispiel 2.5:
Die Funktion $z \mapsto z^n$ mit $n > 1$ ver-n-facht den Winkel $\arg(z)$ in $z = 0$. Für alle anderen Punkte verschwindet die Ableitung $f'(z) = n \cdot z^{n-1}$ nicht, d.h. f ist winkeltreu auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definition 2.6:
Sei $f : D \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar. $f = u + iv$ (wobei u, v reellwertig) heißt orientierungstreu in $z_0 \in D$, falls für die Funktionaldeterminante gilt

$$d := \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} (z_0) > 0$$

Wegen Satz 1.27 (Cauchy-Riemann) gilt

$$d = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = u_x^2 + v_x^2 > 0$$

falls f holomorph und $f'(z_0) \neq 0$ ist.

Folgerung 2.7:
Sei $f : D \to \mathbb{C}$ reell stetig differenzierbar. Dann sind äquivalent:

(i) *f ist holomorph in D mit $f'(z_0) \neq 0$ für alle $z_0 \in D$.*

(ii) *f ist winkeltreu + orientierungstreu in D.*

Geometrische Deutung

Sei $f : D \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar und sei

$$\gamma : [a, b] \to D, t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

die Kurve durch den Punkt $\gamma(t_0) = z_0 \in D, t_0 \in [a, b]$.
γ heißt differenzierbar in t_0 falls $x'(t_0), y'(t_0)$ existieren, wobei $\gamma'(t_0) := x'(t_0) + iy'(t_0)$.
Falls $\gamma'(t_0) \neq 0$ so hat γ die Tangente in z_0, die gegeben ist durch

$$t \mapsto z_0 + \gamma'(t_0)t$$

und

$$f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{C}, t \mapsto f(\gamma(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$$

$f \circ \gamma$ ist differenzierbar (Kettenregel) mit

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = u_x(z_0)x'(t_0) + u_y(z_0)y'(t_0) + i(v_x(t_0)x'(t_0) + v_y(t_0)y'(t_0))$$

Falls $(f \circ \gamma)'(t_0) \neq 0$, so hat die Bildkurve $f \circ \gamma$ in $f(z_0)$ eine Tangente gegeben durch

$$t \mapsto f(z_0) + Df'(z)(\gamma'(t_0)) \cdot t$$

wobei $Df'(z)$ eine reelle $2x2$-Matrix und $\gamma'(t_0) \in \mathbb{R}^2$.
Winkeltreue:

$$|\measuredangle(\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0))| = |\measuredangle((f \circ \gamma_1)'(t_0), (f \circ \gamma_1)'(t_0))|$$

Beispiel 2.8:
Sei $f(z) = z^2$ und $z \neq 0$, sodass $f'(z) = 2z \neq 0$. Dann ist f winkeltreu in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und mit $z = x + iy$ gilt

$$u = \mathrm{Re}(f) = x^2 - y^2 \text{ und } v = \mathrm{Im}(f) = 2xy$$

Mit $z_0 = a + ib$ gilt $\{x = a\} \mapsto v^2 = 4a^2(a^2 - u)$ in (u, v)-Ebene, $\{y = b\} \mapsto v^2 = 4b^2(b^2 + u)$.
Umgekehrt sind die „Niveaukurven“ von $u = \mathrm{Re}(f) = a$ bzw. $v = \mathrm{Im}(f) = b$ gleichseitige Hyperbeln.

Beispiel 2.9:
Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \text{ mit } f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \neq 0$$

für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}$ ist winkeltreu. Betrachte hier $z = x + iy, |z| = r$

$$u = \mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\xi \text{ und } v = \mathrm{Im}(f) = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\nu$$

wo $\xi := \frac{x}{r}, \nu := \frac{y}{r}$.
f bildet Kreise und Radien ab. Kreise mit $r < 1$ werden auf Ellipsen abgebildet, denn

$$\xi^2 + y^2 = 1 \to \frac{u^2}{\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})^2} = 1$$

Radien der Form $z = ct, t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1, |c| = 1$ gehen auf Hyperbel-Äste.

Definition 2.10:
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $\hat{D} := f(D)$. Dann heißt f biholomorph von D nach $\hat{D}$, wenn $\hat{D}$ offen ist, $f : D \to \hat{D}$ bijektiv und die Umkehrabbildung $f^{-1} : \hat{D} \to D$ wieder holomorph ist.

Bemerkung 2.11:

a) Später wird gezeigt: Jede **injektive** holomorphe Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$ hat Bild $\hat{D} := f(D)$, welches automatisch **offen** ist und $f^{-1} : \hat{D} \to \mathbb{C}$ ist automatisch **holomorph**.

b) Offenbar ist ein holomorphes $f : D \to \mathbb{C}$ biholomorph von D nach $\hat{D}$ genau dann, wenn es ein holomorphes $g : \hat{D} \to \mathbb{C}$ gibt, sodass $f(D) \subset \hat{D}, f \circ g = \mathrm{Id}_{\hat{D}}, g(\hat{D}) \subset D, g \circ f = \mathrm{Id}_D$.

c) Ebenfalls rechnet man nach: $f : D_1 \to D_2, g : D_2 \to D_3$ holomorph $\Rightarrow$
$g \circ f : D_1 \to D_3$ holomorph. Insbesondere folgt aus f und g biholomorph, dass $g \circ f : D_1 \to D_3$ biholomorph.

d) Insbesondere ist die Menge aller biholomorphen Abbildungen

$$f : D \to D, D \subset \mathbb{C} \text{ offen}$$

versehen mit der Hintereinanderschaltung eine Gruppe, genannt die Automorphismengruppe von D, kurz $\mathrm{Aut}(D)$.

Beispiel 2.12:
Zu jeder komplexen $2x2$-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $c \neq 0$ oder $d \neq 0$ kann man die Transformation

$$h_A(z) := \frac{az+b}{cz+d} \tag{2.13}$$

definieren.
Es gilt:

$$h'_A(z) = \frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{\det A}{(cz+d)^2} \tag{2.14}$$

Aus $\det A = 0$ folgt, dass h_A konstant ist (Übung). Im Folgenden betrachte $\det A \neq 0$. Dann:

$$h_A = \mathrm{Id} \Leftrightarrow A = sE := s \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), s \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \tag{2.15}$$

$$h_{A \cdot B} = h_A \circ h_B \tag{2.16}$$

- $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) : h_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{az+b}{d}$ ist biholomorph.
- $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), c \neq 0 \to h_A : \mathbb{C} \setminus \{-c^{-1}d\} =: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{ac^{-1}\} =: \hat{D} \subset \mathbb{C}, z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ ist biholomorph. Umkehrabbildung von h_A ist $h_{A^{-1}}$.

Spezialfälle: Falls A eine reelle $2x2$-Matrix mit $\det A > 0$ ist, so ist h_A eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\} \subset \mathbb{C}$ nach $\mathbb{H}$. $\mathbb{H}$ heißt die offene obere Halbebene.
Für

$$C := \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right)$$

erhalten wir die Cayley-Abbildung

$$h_C : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C} \setminus \{-1\}, z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

h_C bildet $\mathbb{H}$ biholomorph auf die offene Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{E} = K_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

Die Umkehrabbildung ist durch $h_{\hat{C}}$ mit $\hat{C} = \left(\begin{smallmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben (Übung).
Ist A eine reelle $2x2$-Matrix mit $\det A > 0$, so vermittelt

$$h_C \circ h_A \circ h_{\hat{C}} \overset{(2.16)}{=} h_{CA\hat{C}} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$$

eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{E}$ nach $\mathbb{E}$. Es gilt:

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = i \begin{pmatrix} \alpha+\delta+i(\beta-\gamma) & \alpha+\delta-(\beta+\gamma) \\ \alpha+\delta+i(\beta+\gamma) & \alpha+\delta-i(\beta-\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

3 Komplexe Integralrechnung

Vor.: Riemann-Integral Analysis I: Folgende Eigenschaften + Definitionen.

Definition 3.1:
Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ heißt **stückweise stetig**, wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1, \ldots, t_n = b$ des Intervalls I gibt, sodass f auf $(t_{k-1}, t_k), k = 1, \ldots, n$ stetig ist und auf $[t_{k-1}, t_k]$ stetig fortgesetzt werden kann.
Entsprechend heißt $f : I \to \mathbb{C}$ **stückweise differenzierbar**, wenn es eine Zerlegung wie oben gibt und f auf (t_{k-1}, t_k) stetig differenzierbar ist und in den Randpunkten einseitige Ableitungen existieren. Jedoch die müssen die beiden einseitigen Ableitungen in $t_k, t_{k+1}, k = 1, \ldots, n-1$ nicht übereinstimmen.

Definition 3.2:
Das Integral von $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, f stückweise stetig, wird definiert durch

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt := \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt}$$

Proposition 3.3:
Für $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ und stückweise stetige Funktionen $f, f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{C}$ gilt:

i) $\int_a^b (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t))\ dt = c_1 \int_a^b f_1(t)\ dt + c_2 \int_a^b f_2(t)\ dt$

ii) $\int_a^b \overline{f(t)}\ dt = \overline{\int_a^b f(t)\ dt}$

iii) $\int_r^x f(t)\ dt + \int_x^s f(t)\ dt = \int_r^s f(t)\ dt\ \forall x \in [a, b], r, s \in [a, b], r \leq x \leq s$

iv) $\int_b^a f(t)\ dt = -\int_a^b f(t)\ dt$

v) $\mathrm{Re}(\int_a^b f(t)\ dt) = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\ dt$, *analog* $\mathrm{Im}(\int_a^b f(t)\ dt) = \int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\ dt$

vi) *$f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig und $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $F' = f$. Dann gilt $\int_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a)$. F heißt dann Stammfunktion zu f. Sind F_1, F_2 zwei Stammfunktionen zu f, dann ist $F_1 - F_2$ konstant in $[a, b]$.*

vii) *Sei $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ reelle monotone stückweise stetig differenzierbar mit $\varphi([a, b]) = [c, d]$, $f : [c, d] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig.*
Substitutionsregel: $\int_a^b f(\varphi(s))\varphi'(s)\ ds = \int_c^d f(t)\ dt$
Der Integrand vom ersten Integral muss nicht in allen Punkten definiert sein.

viii) *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig. Partielle Integration*

$$\int_a^b f(t)g'(t)\ dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)\ dt$$

Beweis:

i) Integral ist $\mathbb{R}$-linear + Definition. Nachrechnen ergibt $\mathbb{C}$-Lineartität.

ii) − v) Nachrechnen.

vi) Hauptsatz für $\mathrm{Re}(f) + \mathrm{Im}(f)$.

vii) Sei F Stammfunktion zu f in [a,b]. Dann $\int_{\varphi(r)}^{\varphi(s)} f(t)dt = F(\varphi(s)) - F(\varphi(r))$ für $r, s \in [a, b]$. Fundamentalsatz für φ (stetig differenzierbar) und

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$$

Daher gilt mit *vi)*

$$\int_r^s f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F \circ \varphi(s) - F \circ \varphi(r)$$

viii) Ist F eine Stammfunktion von $f'g$, so ist $fg - F$ Stammfunktion zu fg', woraus die Behauptung folgt.

□

Proposition 3.4:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig. Dann gilt:

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt}$$

Beweis:
Für $s \in \mathbb{R}$ ist $\exp(is) = \cos s + i \sin s$ mit $\left|e^{is}\right|^2 = \left|e^{is}\overline{e^{is}}\right| = 1$.
Damit gilt:

$$e^{is} \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(t)e^{is}dt$$

und daher

$$\operatorname{Re}\left(e^{is} \int_a^b f(t)\ dt\right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)e^{is})dt \leq \int_a^b \left|e^{is}f(t)\right| dt = \int_a^b |f(t)|\, dt$$

Falls $\int_a^b f(t)dt = 0$, dann ist die Ungleichung trivial. Falls $\int_a^b f(t)dt \neq 0$, dann setze

$$s = -\arg\left(\int_a^b f(t)\ dt\right)$$

Dann $\frac{\int_a^b f(t)dt}{\left|\int_a^b f(t)dt\right|} = e^{-is}$, sodass die rechte Seite der obigen Gleichung $= \left|\int_a^b f(t)dt\right|$. □

Definition 3.5:

i) Unter einem Integrationsweg versteht man einen parametrisierten Weg in $\mathbb{C}$, d.h. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}, \gamma$ ist **stückweise** stetig differenzierbar.

ii) Ein Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt auf $[c, d] \subset (a, b)$ glatt, wenn γ dort **stetig differenzierbar** ist und $\gamma'(t) \neq 0\ \forall t \in [c, d]$.

iii) $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt **geschlossen**, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$.

iv) Ist γ geschlossen und auf (a, b) injektiv, so heißt γ **einfach geschlossen** (oder ohne Doppelpunkte), die Bildmenge $|\gamma| := \gamma([a, b])$ heißt Spur von γ. Ist $M \subset \mathbb{C}$ Spur eines Integrationsweges γ, so wird M durch γ parametrisiert.

Beispiel 3.6:

1) Sei $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$, $\kappa : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto z_0 + re^{it}$ ist stetig differenzierbar mit $\kappa'(t) = rie^{it}$. Dieser Weg ist einfach wird mit $\kappa(r, z_0)$ bezeichnet und heißt **positiv orientierte Kreislinie**. $\kappa(r, z_0)$ ist einfach geschlossen und glatt.

2) Für $z_0, z_1 \in \mathbb{C}, z_0 \neq z_1$ parametrisiert

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}, t \mapsto z_0 + t(z_1 - z_0)$$

die Verbindungsstrecke von z_0 nach z_1. Wir bezeichnen diesen Weg mit $[z_0, z_1]$.

3) Für Punkte $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ wird durch $\gamma : [0, n] \to \mathbb{C}$ mit

$$\gamma(t) = z_k + (t - k)(z_{k+1} - z_k), t \in [k, k + 1]$$

ein Streckenzug γ durch $z_0, \ldots, z_n$ beschrieben und $\gamma = [z_0, z_1, \ldots, z_n]$. Speziell für ein Dreieck Δ mit Ecken z_0, z_1, z_2 parametrisiert $[z_0, z_1, z_2, z_0]$ den Rand von Δ.

Definition 3.7:

i) Die Integrationswege

$$\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C} \text{ und } \gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$$

können zusammengesetzt werden, falls $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Dies ergibt den **zusammengesetzten Weg** $\gamma_1\gamma_2$ mittels:

$$\gamma_1\gamma_2 : [a, b + (d - c)] \to \mathbb{C}, t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t - b + c) & t \in [b, b + (d - c)] \end{cases}$$

Allgemein kann man n Wege $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ zusammensetzen, falls Anfangs und Endpunkte von γ_k und γ_{k+1} zusammenfallen. So ist z.B.

$$[a_0, \ldots, a_n] = [a_0, a_1][a_1, a_2] \ldots [a_{n-1}, a_n]$$

ii) Umgekehrt: Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ Integrationsweg und

$$a = t_0, < t_1 < \ldots < t_n = b$$

Zerlegung von $[a, b]$, so ist $\gamma_k := \gamma_{[t_{k-1}, t_k]}$ Integrationsweg mit $\gamma = \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n$ und γ_k heißt Teilweg von γ. Gibt es eine Unterteilung von γ in glatte Teilwege, so heißt γ stückweise glatt.

iii) Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ Integrationsweg. Dann ist der entgegengesetzte Weg zu γ gegeben durch

$$\gamma^{-1} : [a, b] \to \mathbb{C}, t \mapsto \gamma^{-1}(t) = \gamma(a + b - t)$$

Es gilt $\mathrm{Spur}(\gamma) = \mathrm{Spur}(\gamma^{-1})$, also $\gamma(a) = \gamma^{-1}(b), \gamma(b) = \gamma^{-1}(a)$.

Beispiel 3.8:

i) Sei $\gamma = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$. Dann ist $\gamma^{-1} = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0]$.

ii) Sei $\gamma = \kappa(r, z_0)$. Dann ist $\gamma^{-1} = \kappa^{-1}(r, z_0)$, wobei

$$\kappa^{-1}(r, z_0) : t \mapsto z_0 + re^{-it}, t \in [0, 2\pi]$$

eine im Uhrzeigersinn (d.h. negativ) durchlaufene Kreislinie.

Definition 3.9:
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Als Wegintegral von f über γ schreiben wir:

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt}$$

Beispiel 3.10:

i) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig und integriere $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ über $\kappa(r, z_0)$, so erhält man

$$\int_{\kappa(r,z_0)} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i$$

Das Ergebnis ist unabhängig vom Radius. Oft schreibt man

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz \text{ oder } \int_{\delta D} f(z)dz$$

ii) Ist $[a, b]$ ein reelles Intervall, $\gamma : [a, b] \to [a, b], t \mapsto t$ die Parametrisierung der Strecke $[a, b]$. Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(t)dt$$

Das Wegintegral und das Riemann-Integral über $[a, b]$ stimmen hierbei überein.

iii) Ist $|\gamma| = \{z_0\}$, so gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Sei nun ein Weg im Sinne von 3.5(i), den wir als $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_n$ in stetig differenzierbare Teilwege zerlegen. Sei $f \in \mathbb{C}(|\gamma|)$. Dann gilt

$$\int_\gamma f dz := \sum_{\mu=1}^{n} \int_{\gamma_\mu} f(z)dz$$

Die rechte Seite ist wohldefiniert, da $|\gamma_\mu| \subset |\gamma|$. Der Wert der Summe ist unabhängig von der Zerlegung in stetig differenzierbare Teilwege. Benutze Proposition 3.3 $iii) - vii)$ und zu zwei Zerlegungen eine gemeinsame Verfeinerung.

Interpretation des Wegintegrals als Grenzwert von komplexen Riemann Summen

Nach Definition von $I := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein hinreichend kleines $\delta(\varepsilon) > 0$, sodass für alle Unterteilungen $a = t_0 < \dots < t_n = b$ mit $\max |t_{k+1} - t_k| < \delta(\varepsilon), k = 0, \dots, n-1$ gilt:

$$\underbrace{\left| I - \sum_{k=0}^{n-1} f(\gamma(t_k))\gamma'(t_k)(t_{k+1} - t_k) \right|}_{=:J_n} < \varepsilon$$

Aus der stetigen Differenzierbarkeit von γ auf $[a,b]$ folgt

$$\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k) = \gamma'(t_k)(t_{k+1} - t_k) + r_k(t_{k+1})(t_{k+1} - t_k)$$

wo $s + r_k(s)$ stetig mit $r_k(t_k) = 0$ ist und $\max |r_k(t_{k+1})| < \varepsilon$ für hinreichend kleines $\delta(\varepsilon) > 0$. Dann gilt mit

$$I_n := \sum_{k=0}^{n-1} f(\gamma(t_k))(\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k))$$

dass

$$|I_n - J_n| \leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\gamma(t_k)) r_k(t_{k+1})(t_{k+1} - t_k) \right|$$

$$\overset{\Delta-Ugl.}{\leq} \max_{t\in[a,b]} \left| f(\gamma(t))\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} |t_{k+1} - t_k| \right| \leq c_f \varepsilon \, |b-a|$$

Also $|I - J_n| \leq (c_f \, |b-a| + 1)\varepsilon$.

Definition 3.11:
Zwei Wege $\gamma : I \to \mathbb{C}$ und $\hat{\gamma} : J \to \mathbb{C}$, $I = [a,b], J = [\hat{a}, \hat{b}]$ heißen äquivalent, wenn es eine stetig differenzierbare Bijektion $\varphi : J \to I$ gibt mit $\varphi'(t) \neq 0 \ \forall t \in J$, sodass $\hat{\gamma} = \gamma \circ \varphi$. Hierbei heißt φ Parametertransformation. $\varphi(\hat{a}) = a, \varphi(\hat{b}) = b$. $\hat{\gamma}$ heißt Umparametrisierung von γ.

Proposition 3.12:

- *Sind φ, ψ Parametertransformationen, so auch $\varphi \circ \psi$ sowie φ^{-1}.*
- *Ist $\gamma : I \to \mathbb{C}$ Integrationsweg, $\varphi : J \to I$ eine Parametertransformation, so ist auch $\gamma \circ \varphi : J \to \mathbb{C}$ Integrationsweg.*
- *Eine Parametertransformation lässt Anfangs- und Endpunkte und die Spur von γ invariant.*

Satz 3.13:
Seien γ_1, γ_2 stetig differenzierbare Integrationswege in $\mathbb{C}$, γ_2 eine Umparametrisierung von γ_1. Dann gilt für jede stetige Funktion $f : |\gamma_1| \to \mathbb{C}$

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Beweis:
Seien $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$, wobei $\varphi : [c,d] \to [a,b]$, d.h. $a = \varphi(c), b = \varphi(d)$. Es gilt die Substitutionsregel 3.3(vi) für Integrale über $[a,b]$ sowie $\gamma_2'(t) = \gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t)$ für $t \in [c,d]$. Daher:

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_c^d f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt = \int_c^d f(\gamma_1 \circ \varphi(t))\gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Substitution führt zu:

$$= \int_a^b f(\gamma_1(s))\gamma_1'(s)ds = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

□

Eigenschaften komplexer Wegintegrale

Sei $\mathcal{C}(|\gamma|)$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf $|\gamma|$.

Proposition 3.14 (Rechenregeln)**:**
Sei γ Integrationsweg, $\forall f, g \in \mathcal{C}(|\gamma|)$ gilt:

(i) $\int_\gamma (f+g)dz = \int_\gamma f dz + \int_\gamma g dz, \int_\gamma cf dz = c\int_\gamma f dz \; \forall c \in \mathbb{C}$

(ii) *Ist $\hat{\gamma}$ ein Integrationsweg, der im Endpunkt von γ beginnt, so gilt:*

$$\int_{\gamma\hat{\gamma}} f dz = \int_{\hat{\gamma}} f dz + \int_\gamma f dz$$

(iii) $\int_{\gamma^{-1}} f dz = -\int_\gamma f dz$ *(Umkehrregel)*

(iv) *$g : \hat{D} \to D$ holomorphe Abbildung des Gebietes $\hat{D}$ in D mit stetiger Ableitung g'. Sei $\hat{\gamma}$ Integrationsweg in $\hat{D}$ und $\gamma := g \circ \hat{\gamma}$ der Bildweg in D. Dann:*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\hat{\gamma}} f(g(w))g'(w)dw \; \forall f \in \mathcal{C}(|\gamma|)$$

Beweis:

(i) Wegen Definition 3.9 genügt es (i) für stetig differenzierbare Wege zu zeigen. Dies folgt aus Proposition 3.3(i) für zerlegte Wege.

(ii) Definition 3.9.

(iii) Es genügt für γ stetig differenzierbar zu betrachten.
Substitutionsregel 3.3 vii) liefert mit

$$\varphi : [a,b] \to [a,b], t \mapsto a+b-t$$

für $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ mit $\varphi(a) = b, \varphi(b) = a$:

$$\int_{\gamma^{-1}} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(\varphi(t)))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_b^a f(\gamma(s))\gamma'(s)ds$$
$$= -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = -\int_\gamma f(z)dz$$

(iv) Ohne Einschränkung sei $\hat{\gamma}$ stetig differenzierbar. Dann gilt mit Kettenregel:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(\hat{\gamma}(t)))\gamma'(\hat{\gamma}(t))\hat{\gamma}'(t)dt = \int_{\hat{\gamma}} f(g(w))g'(w)dw$$

□

Definition 3.15:
Für jeden stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}, t \mapsto \gamma(t) := x(t) + iy(t)$ mit $x(t), y(t) \in \mathbb{R}$ heißt das reelle Integral

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

die euklidische Länge von γ. Man zeigt, dass $L(\gamma)$ unabhängig von der Parametrisierung von $|\gamma|$ ist.

Beispiel 3.16:

i) Strecke $[z_0, z_1]$ mit $z(t) = (1-t)z_0 + tz_1, t \in [0,1]$ und $z'(t) = z_1 - z_0$. Dann ist

$$L([z_0, z_1]) = \int_0^1 |z_1 - z_0|\, dt = |z_1 - z_0|$$

ii) Sei γ ein Kreisbogen auf der Kreisscheibe $\overline{K_r}(z_0)$ mit

$$z(t) = z_0 + re^{it}, t \in [a,b] \subset [0, 2\pi]$$

Dann ist

$$|z'(t)| = \left| rie^{it} \right| = r$$

und daher $L(\gamma) = r(b-a)$.

Ist γ ein zusammengesetzter Weg $\gamma = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_m$ mit stetig differenzierbaren Teilwegen γ_j, so gilt

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^{m} L(\gamma_i)$$

Dies ist unabhängig von der Zerlegung von γ.

Satz 3.17 (Standardabschätzung für Wegintegrale)**:**
Für jeden stückweise differenzierbaren Weg γ in $\mathbb{C}$ und jede stetige Funktion auf $|\gamma|$ gilt:

$$\int_\gamma |f|\, dz \leq |f|_\gamma\, L(\gamma) \;\; mit \;\; |f|_\gamma := \max_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| = \max_{z\in|\gamma|} |f(z)|$$

Beweis:
Sei γ zunächst stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\left| \int_\gamma f dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \right| \overset{(3.4)}{\leq} \int_a^b |f(\gamma(t))|\, |\gamma'(t)|\, dt$$

Wobei die letzten zwei Integranden reell sind. Da $|f(\gamma(t))| \leq |f|_\gamma, t \in [a,b]$ folgt aus der Monotonie reeller Integrale:

$$\left| \int_\gamma f dz \right| \leq \int_a^b |f|_\gamma\, |\gamma'(t)|\, dt = |f|_\gamma\, L(\gamma)$$

Für $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_m$ mit stetig differenzierbaren Teilwegen gilt:

$$\int_\gamma f dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f dz \leq \sum_{j=1}^{m} \left| \int_{\gamma_j} f dz \right| \leq \sum_{j=1}^{m} |f|_\gamma\, L(\gamma_j) = |f|_\gamma\, L(\gamma)$$

mit $|f|_{\gamma_j} \leq |f|_\gamma$ wegen $|\gamma_j| \subset |\gamma|$. □

Bemerkung:
Gilt für ein $z \in |\gamma|, \gamma$ glatt (d.h. $\gamma'(t) \neq 0\ \forall t$) $|f(z)| < |f|_\gamma$, so gilt in 3.17 eine echte Ungleichung, da der Integrand in einer Umgebung von t_0 mit $\gamma(t_0) = z_0$ stetig ist und dort $|\gamma'(t)| > 0$ ist. (Übung)

Folgerung 3.18:
Es gilt:

$$|\exp(z) - 1| < |z| \ \ \forall z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) < 0$$

Beweis:
Es gilt:

$$\int_{[0,z]} \exp(w)\ dw = \int_0^1 \exp(zt) \cdot z\ dt = \exp(zt)\ |_0^1 = \exp(z) - 1$$

und mit $|\exp(w)| = \exp(\mathrm{Re}(w)) < 1$ wegen $\mathrm{Re}(w) < 0$ und der verschärften Standardabschätzung für $\gamma = [0, z], f(w) = \exp(w)$ folgt

$$|\exp(w) - 1| \leq \left| \int_{[0,z]} \exp(w)\ dw \right| < |z|$$

$\square$

Folgerung 3.19 (Vertauschungssatz für...)**:**

i) .. Folgen: Sei γ ein Integrationsweg und $f_n \in \mathcal{C}(|\gamma|)$ eine Folge stetiger Funktionen, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ für alle $z \in |\gamma|$ existiert und die Konvergenz auf $|\gamma|$ gleichmäßig ist. Dann gilt $f \in \mathcal{C}(|\gamma|)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n dz = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n dz = \int_\gamma f dz$$

ii) .. Reihen: Sei γ wie oben und $\sum_\mu f_\mu$ $(f_\mu \in \mathcal{C}(|\gamma|))$ konvergiere gleichmäßig auf $\mathcal{C}(|\gamma|)$ mit Limes $f := \sum_{\mu=1}^\infty f_\mu : |\gamma| \to \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\sum_{\nu=1}^\infty \int_\gamma f_\nu dz = \int_\gamma \sum_{\nu=1}^\infty f_\nu dz = \int_\gamma f dz$$

Beweis:
Es reicht (i) zu zeigen mit $f \in \mathcal{C}(|\gamma|)$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz existiert $\int_\gamma f dz$. Mit $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n - f| = 0$ auf $|\gamma|$ und wegen der Standardabschätzung gilt

$$\left| \int_\gamma f_n dt - \int_\gamma f dt \right| = \left| \int_\gamma (f_n - f) dt \right| \leq |f_n - f|_\gamma\, L(\gamma) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

da $L(\gamma) \in \mathbb{R}$ fest. $\square$

Beispiel:
Sei $K := \overline{K_r(z_0)}$ eine Kreisscheibe. Untersuche das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta K} \frac{dw}{w - z}$$

wobei $\delta K = K_r(z_0)$ der Rand und $\gamma(t) = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \delta K$. Dann benötigt man folgendes Lemma.

Lemma 3.20:
Es gilt:

i)
$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^r$$
für alle w, z mit $|z-z_0| \leq |w-z_0|$.

ii)
$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z-z_0}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^r$$
für alle w, z mit $|z-z_0| > |w-z_0|$.

Beweis:
Man rechne mit der geometrischen Reihe die obigen Identitäten nach. Setzt man $q = \frac{|z-z_0|}{r}$, so gilt $0 \leq q < 1$ für festes $z \in K$ und $\max\limits_{w\in\delta K}\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|^n = q^n$ und daher sind beide Summen auf δK absolut und gleichmäßig konvergent. □

Satz 3.21:
Es gilt:
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta K}\frac{dw}{w-z} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } z \in \mathring{K} \\ 0 & \text{wenn } z \notin \overline{K} \end{cases}$$

Beweis:

a) Falls $z \in K$ so gilt nach *i)* :
$$\int_{\delta K}\frac{dw}{w-z} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(z-z_0)^\nu \int_{\delta K}\frac{dw}{(w-z_0)^{\nu+1}}$$
Dies ist gleich Null $\forall \nu \geq 1$ und $2\pi i$ für $\nu = 0$.

b) Im Falle $z \in \mathbb{C}\setminus\overline{K}$ gilt:
$$\int_{\delta K}\frac{dw}{w-z} = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^{j+1}}\int_{\delta K}(w-z_0)^j dw = 0\ \forall j \in \mathbb{N}$$

□

3.1 Stammfunktion und Wegunabhängigkeit

Erinnerung (vgl. Prop. 3.3vi)**:**
Sei $f : [c, d] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und $F : [c, d] \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $F' = f$, dann gilt:

$$\int_c^d f \; dt = F(d) - F(c)$$

Verallgemeinerung auf Wege von z_a nach $z_b \in \mathbb{C}$. Es existieren viele Wege γ von z_a nach z_b. Im Allgemeinen hängt $\int_\gamma f dz$ nicht nur von den Endpunkten z_a und z_b ab, sondern auch vom Weg.

Beispiel 3.22 (vgl. 3.10i)**:**
Seien $z_a, z_b \in K_r(z_0)$ diametrale Punkte auf dem Kreis und $\gamma_+(t) = z_0 + re^{it}$ und $\gamma_-(t) = z_0 + re^{-it}$ mit $t \in [0, \pi]$. Dann gilt:

$$\int_{\gamma_+} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^\pi \frac{ireit}{re^{it}} dt = i\pi$$

aber

$$\int_{\gamma_-} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^\pi \frac{-ire^{-it}}{re^{-it}} dt = -i\pi$$

Wann hängt $\int_\gamma f dz$ nur von Anfangs- und Endpunkt von γ ab?

Definition 3.23:
Sei G ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Eine holomorphe Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion von f in G, falls $F' = f$ in G gilt.

Satz 3.24:
Ist F holomorph in G und Stammfunktion von einem stetigen $f \in \mathcal{C}(G)$, so gilt

$$\int_\gamma f dz = F(z) - F(z_0) \;\forall \gamma \text{ in } G \text{ mit Anfangspunkt } z_0 \text{ und Endpunkt } z$$

d.h. das Integral ist wegunabhängig. Insbesondere gilt für alle geschlossenen Wege γ

$$\int_\gamma f \; dw = 0$$

Beweis:
Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}, t \mapsto \gamma(t)$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma f dw &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t))dt \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z) - F(z_0)\end{aligned}$$

Falls nun $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_n$ mit γ_μ stetig differenzierbar von z_0 nach z und jeweils mit $z_A(\gamma_{\mu+1}) = z_E(\gamma_\mu)$ (die Anfangs- und Endpunkte stimmen überein), dann gilt mit $z_0 = z_A(\gamma_1), z = z_E(\gamma_n)$

$$\int_\gamma f dw = \sum_{r=1}^n \int_{\gamma_r} f dw = \sum_{r=1}^n (F(z_E(\gamma_r)) - F(z_A(\gamma_r)) = F(z) - F(z_0)$$

$\square$

Beispiel 3.25:
Oft lassen sich Stammfunktionen direkt angeben.

i) Für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ hat $f(z) = z^n$ die Stammfunktion $F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$. Es folgt daher $\int_\gamma z^n dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ.

ii) Da $\int_{\partial K} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$ folgt mit Satz 3.24, dass es keine Umgebung U von $z_0 \in \mathbb{C}$ gibt, sodass $\frac{1}{z-z_0}$ in $U \setminus \{z_0\}$ eine Stammfunktion hat, obwohl $\frac{1}{z-z_0}$ dort holomorph ist. Selbst in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat $\frac{1}{z}$ keine Stammfunktion.

iii) Jede konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (z - z_0)^r$$

hat in ihrem Konvergenzkreis die konvergente Potenzreihe

$$F(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{r+1} (z - z_0)^{r+1}$$

als Stammfunktion.

Proposition 3.26:
Ist F holomorph im Gebiet G und gilt $F' = 0$ in G, so ist F konstant in G.

Beweis:
F ist Stammfunktion zur Nullfunktion. Da für $K := K_r(z_0) \subset G$, $z \in K$ eine radiale Verbindung $[z_0, z]$ mit dem Mittelpunkt z_0 von K hat, gilt $F(z) - F(z_0) = \int_{[z,z_0]} 0 \, dw = 0 \Rightarrow F$ ist konstant auf K.
Da G zusammenhängend ist, folgt dass F konstant in G ist. (Übg.) □

Folgerung 3.27:
Sind $F, \hat{F}$ Stammfunktionen von f in G, so ist $F - \hat{F}$ konstant in G.

Definition 3.28:
Sei G Gebiet. Hat $f \in \mathcal{C}(G)$ eine holomorphe Stammfunktion in G, so heißt f integrabel.

Proposition 3.29:
Sei $f : G \to \mathbb{C}$ stetig, G Gebiet. Dann sind äquivalent:

(i) *f ist integrabel in G*

(ii) *Für jeden geschlossenen Weg γ in G gilt: $\int_\gamma f dz = 0$.*

Ist Eigenschaft (ii) erfüllt, so erhält man eine Stammfunktion F in G durch: Wähle $z_0 \in G$ und Weg γ_z in G von z_0 nach z und setze

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f \, dw, z \in G \tag{3.30}$$

Beweis:
$(i) \Rightarrow (ii)$: Satz 3.24
$(ii) \Rightarrow (i)$: zu zeigen: F aus 3.30 ist Stammfunktion zu f in G und wohldefiniert, d.h. hängt nicht von der Wahl von γ_z ab. Sei dazu γ ein weiterer Weg von z_0 nach z in G. Dann ist $\gamma_z\gamma^{-1}$ ein geschlossener Weg, also gilt nach Voraussetzung

$$0 = \int_{\gamma_z\gamma^{-1}} f dw = \int_{\gamma_z} f dw + \int_{\gamma^{-1}} f dw = \int_{\gamma_z} f dw - \int_{\gamma} f dw$$

Also ist F wohldefiniert.
Noch zu zeigen bleibt, dass für alle $z_1 \in G$ gilt $F'(z_1) = f(z_1)$. Sei dazu $\overline{K} \subset G$ eine abgeschlossene Kreisscheibe um z_1 und $z \in \overline{K}$. Dann ist $\gamma_{z_1}[z_1, z]\gamma_z^{-1}$ geschlossen in G. Nach Voraussetzung gilt

$$F(z) = F(z_1) + \int_{[z_1,z]} f dw$$

Setze

$$F_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{z-z_1} \int_{[z_1,z]} f dw & z \in K \backslash \{z_1\} \\ f(z_1) & z = z_1 \end{cases}$$

dann gilt

$$F(z) = F(z_1) + (z - z_1)F_1(z) \; \forall z \in K$$

Falls F_1 stetig in z_1 ist, so folgt $F'(z_1) = F_1(z_1) = f(z_1)$ (Lemma 1.15).
Für $z \in K\backslash\{z_1\}$ gilt

$$F_1(z) - F_1(z_1) = \frac{1}{z - z_1} \int_{[z_1,z]} f(w) - f(z_1) dw$$

Aus der Standardabschätzung folgt

$$F_1(z) - F_1(z_1) \leq \frac{1}{z - z_1} |f - f(z_1)|_{[z_1,z]} \cdot |z_1 - z| = |f - f(z_1)|_{[z_1,z]}$$

Da f stetig ist in z_1, folgt die Stetigkeit von F_1 in z_1. □

Es folgt:

$$f \in \mathcal{C}(G) \text{ hat Stammfunktion } \iff \int_{\gamma} f \; dz = 0 \text{ für alle geschlossenen Wege } \gamma$$

Das Kriterium $\int_{\gamma} f \; dw = 0$ für alle geschlossenen Wege γ in G ist kaum zu verifizieren. Wir benötigen bessere Kriterien.

Definition 3.31:

i) Eine offene Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ heißt sternförmig oder Sterngebiet, falls es einen Punkt $z_1 \in M$ gibt mit $[z_1, z] \subset M$ für alle $z \in M$. Dabei heißt z_1 Zentrum von M.

ii) $M \subset \mathbb{C}$ heißt konvex, falls für alle Punkte $w, z \in M$ die Strecke $[w, z]$ in M liegt. Jede konvexe, offene Menge ist Sterngebiet mit beliebigem Zentrum.

Beispiel 3.32:

- $\mathbb{C}^- := \mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ ist Sterngebiet mit Zentrum $\{x > 0\}$, aber $\mathbb{C}^-$ ist nicht konvex.

- Betrachte das kompakte Dreieck in $\mathbb{C}$ mit den Eckpunkten $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

$$\Delta := \{z \in \mathbb{C} : z = z_1 + s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1) : s, t \geq 0, 0 \leq s + t \leq 1\}$$

Es gilt $\partial\Delta := [z_1, z_2][z_2, z_3][z_3, z_1]$.

Satz 3.33 (Integrabilität für Sterngebiete)**:**
Sei G ein Sterngebiet mit Zentrum $z_1 \in \mathbb{C}$. Sei $f \in \mathcal{C}(G)$. Falls für alle $\Delta \subset G$, die z_1 als Eckpunkte haben gilt, dass $\int_{\partial\Delta} f dw = 0$, so ist f integrabel in G und

$$F(z) := \int_{[z_1,z]} f \ dw$$

ist eine Stammfunktion von f in G.

Beweis:
Es gilt $[z_1, z] \subset G$, d.h. F ist wohldefiniert. Sei $z_0 \in G$ beliebig fest. Falls z nah genug bei z_0 ist, so ist $\Delta := [z_1, z_0, z] \subset G$. Nach Voraussetzung ist $\int_{\partial\Delta} f dw = 0$, also

$$F(z) = F(z_0) + \int_{[z_0,z]} f \ dw$$

für $z \in G$ nah genug bei z_0. Daraus folgt wie im Beweis zu Proposition 3.29, dass F in z_0 komplex differenzierbar ist und $F'(z_0) = f(z_0)$. □

Satz 3.34 (Goursat, 1884 (oder: Cauchy'scher Integralsatz für Sterngebiete))**:**
Sei f holomorph in einem Gebiet G. Dann gilt für den Rand jedes $\Delta \subset G$

$$\int_{\partial\Delta} f \ dz = 0$$

Beweis:
Elementargeometrie:

$$\max_{w,z \in \Delta} |w - z| \leq L(\partial\Delta) \tag{1}$$

$$L(\partial\Delta_r) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta) \tag{2}$$

für jedes der vier kongruenten Teildreiecke $\Delta_r, r = 1, \ldots, 4$, die durch Verbinden der Seitenmittelpunkte von Δ entstehen. Setze

$$\alpha(\Delta) = \int_{\partial\Delta} f \ dw$$

Teilt man Δ in die vier kongruenten Teildreiecke auf, so folgt:

$$\alpha(\Delta) = \sum_{r=1}^{4} \alpha(\Delta_r)$$

da die Inneren Wegintegrale der Teildreiecke sich aufheben. Wähle aus $\Delta_r, r = 1, \ldots, 4$ ein Δ^1 so, dass

$$\alpha(\Delta^1) = \max_{r=1,\ldots,4} |\alpha(\Delta_r)|$$

Unterteile Δ^1 wie oben und wiederhole das Verfahren. Wir erhalten eine Folge $\Delta^n \subset \ldots \subset \Delta^2 \subset \Delta^1 \subset \Delta$ kompakter Dreiecke, wobei

$$|\alpha(\Delta)| \leq 4^n \left|\alpha(\Delta^n)\right|, n = 1, 2, \ldots \tag{*}$$

sowie

$$L(\partial\Delta^n) = \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta) \forall n \in \mathbb{N} \tag{**}$$

Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ gibt es genau ein $z_0 \in \Delta$ mit

$$\{z_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^n \tag{Schachtelung}$$

Da f holomorph in G ist, gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{C}(G)$ mit

$$f(w) = f(z_0) + f'(z_0)(w - z_0) + g(w)(w - z_0) \ \forall w \in G$$

und $g(z_0) = 0$. Da

$$\int_{\partial\Delta^n} f(z_0)dw = 0 \text{ sowie } \int_{\partial\Delta^n} f'(z_0)(w - z_0)dw = 0$$

folgt

$$\alpha(\Delta^n) = \int_{\partial\Delta^n} (w - z_0)g(w)dw$$

Mit der Standardabschätzung folgt

$$|\alpha(\Delta^n)| \leq \max_{w \in \partial\Delta^n} |w - z_0| \, |g(w)| \, L(\partial\Delta^n) \leq L(\partial\Delta^n)^2 \max_{w \in \partial\Delta^n} |g(w)| \ \forall n$$

Somit folgt

$$|\alpha(\Delta)| \overset{(*)}{\leq} 4^n \left|\alpha(\Delta^n)\right| \overset{(**)}{\leq} L(\partial\Delta)^2 \left|g\right|_{\partial\Delta^n}$$

Da g stetig in z_0 ist und $g(z_0)$, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass $|g|_{K_\delta(z_0)} \leq \varepsilon$. Zu diesem δ existiert ein n_0, sodass $\Delta^n \subset K_\delta(z_0) \ \forall n \geq n_0$. Somit folgt

$$|\alpha(\Delta)| \leq L(\partial\Delta)^2 \cdot \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig und $L(\partial\Delta)^2$ konstant folgt $|\alpha(\Delta)| \to 0$. □

Folgerung 3.35:
Sei G ein Sterngebiet mit Zentrum z_0, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph in G. Dann ist f integrabel in G, d.h. $F(z) = \int_{[z_0,z]} f \ dw$ ist Stammfunktion zu f in G und für jeden geschlossenen Weg γ in G gilt $\int_\gamma f \ dz = 0$.

Anwendung 3.36 (Hauptzweig des Logarithmus)**:**
Im Sterngebiet $\mathbb{C}^-$ mit Zentrum 1 ist

$$\int_{[1,z]} \frac{dw}{w}$$

eine Stammfunktion zu $\frac{1}{z}$. Wählt man $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ und den Weg $\gamma = \kappa_{z_0} |_{[0,\varphi]} \circ [1, r]$. Wegen der Wegunabhängigkeit gilt

$$\int_{[1,z]} \frac{dw}{w} = \int_1^r \frac{dz}{z} + \int_0^\varphi \frac{ire^{is}}{re^{is}} ds = \log r + i\varphi = \log|z| + i\arg(z) \tag{[3.36]}$$

*Diese Funktion heißt **Hauptzweig des Logarithmus in** $\mathbb{C}^-$.*

Satz 3.37 (Verschärfung des Cauchy'schen Integralsatzes für Sterngebiete)**:**
Sei G ein Sterngebiet mit Zentrum z_0 und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf $G \backslash \{z_0\}$. Dann ist f integrabel in G.

Beweis:
Wie in Satz 3.34, jedoch wird 3.33 wie folgt verschräft:
Sei G ein Gebiet, $z_0 \in G$. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf $G \backslash \{z_0\}$. Dann ist $\int_{\partial \Delta} f \, dw = 0 \; \forall \Delta \subset G$, die z_0 als Eckpunkt haben. Diese Aussage führen wir auf 3.33 zurück. Die inneren Wege heben sich weg und es gilt:

$$\int_{\partial \Delta} f dw = \int_{\partial \Delta_1} f dw + \underbrace{\int_{\partial \Delta_2} f dw}_{=0, \text{ da holomorph}} + \underbrace{\int_{\partial \Delta_3} f dw}_{= 0, \text{ da holomorph}}$$

Also folgt

$$\left| \int_{\partial \Delta} f dw \right| \leq |f|_{\Delta_1} L(\partial \Delta_1)$$

Da sich Δ_1 beliebig verkleinern lässt und f stetig in z_0 ist, folgt

$$\left| \int_{\partial \Delta} f dw \right| = 0$$

□

Anwendung 3.38 (Cauchy'sche Integralformel für Kreisscheiben)**:**
Sei f holomorph im Gebiet G und sei $K := K_r(z_0)$, $r > 0$ eine offene Kreisscheibe, sodass $\overline{K} \subset G$. Dann gilt für alle $z \in K$

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z} dw}$$

Beweis:
Sei $z \in K$ fest. Betrachte

$$g(w) := \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & w \in K \backslash \{z\} \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

Da f holomorph in G ist, ist g auch holomorph in $K \backslash \{z\}$ und stetig in K. Da $\overline{K} \subset G$, gibt es $s > r$ mit $K' = K_s(z) \subset G$. Da K' konvex ist, ist $g \,|_{K'}$ nach Folgerung 3.35 integrabel, d.h.

$$\int_{\partial K} g \; dw = 0$$

Nach Definition von $g \,|_{\partial K}$ gilt wegen Satz 3.21

$$0 = \int_{\partial K} g \; dw = \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{\partial K} \frac{1}{w - z} \; dw = \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z} - 2\pi i f(z)$$

Dabei heißt $\frac{1}{w-z}$ der Cauchy-Kern. □

Folgerung 3.39:
Wählt man ∂K *als* $\gamma(\varphi) = z_0 + re^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi]$ *und* $z = z_0$*, so gilt*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi \tag{[3.39]}$$

Dies heißt Mittelwertgleichung. Die Standardabschätzung liefert die Mittelwertungleichung

$$|f(z_0)| \leq |f|_{\partial K} \tag{3.40}$$

3.2 Anwendung von Cauchys Integralsatz

Definition 3.41:
Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt in einem Kreis $K = K_r(z_0) \subset G$ in eine Potenzreihe $\sum_\nu a_\nu (z - z_0)^\nu$ um z_0 entwickelbar, wenn die Reihe in K gegen $f\,|_K$ konvergiert.
Aus der Vertauschbarkeit von Differentation und Summation für Potenzreihen (Beispiel 1.25) folgt

Proposition 3.42:
Ist f in K um z_0 in eine Potenzreihe $\sum_\nu a_\nu (z - z_0)^\nu$ entwickelbar, so ist f beliebig oft komplex differenzierbar in K und $a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}$ für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:
Analysis I. □

Satz 3.43 (Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor)**:**
Sei $z_0 \in G$, G Gebiet, und $d := d(z_0, G^c)$ der Abstand von z_0 zum Rand von G. Dann ist jede in G holomorphe Funktion f in $K_d(z_0)$ um z_0 in eine Taylorreihe entwickelbar. Die (Taylor-)Koeffizienten sind in $\partial K = \partial K_r(z)$, wo $r < d$, durch

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{\nu+1}} dw$$

bestimmt.

Lemma 3.44:
Sei f stetig auf dem Rand ∂K der Kreisscheibe $K = K_r(z_0) \subset G$, $r < d$. Dann ist

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

in K in eine Potenzreihe um z_0 entwickelbar mit

$$F(z) = \sum_\nu a_\nu (z - z_0)^\nu \text{ wobei } a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{\nu+1}} dw$$

für $z \in K_r(z_0), \nu \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:
Nach Lemma 3.20 gilt $\frac{f(w)}{w - z_0} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(w)(z - z_0)^\nu$ mit

$$g_\nu(w) = \frac{f(w)}{(w - z_0)^{\nu+1}} \tag{$*$}$$

für $z \in K$, $w \in \partial K$, da

$$|g_\nu|_{\partial K} \leq \frac{1}{r^{\nu+1}} |f|_{\partial K}$$

Daraus folgt

$$\max_{w \in \partial K} |g_\nu(w)(z - z_0)^\nu| \leq r^{-1} |f|_{\partial K} \, q^\nu$$

mit $q := r^{-1}|z - z_0| \geq 0$. Da $q < 1$ konvergiert die Reihe $(*)$ in w gleichmäßig auf ∂K, d.h. es gilt nach Vertauschungsregel für Reihen und Riemann-Integrale 3.19 für $z \in K$

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} g_\nu(w)\, dw \right] (z - z_0)^\nu$$

$\square$

Beweis von Satz 3.43:
Da f holomorph auf G, so gilt für $K_r(z_0)$, $0 < r < d$ mit $K_r(z_0) \subset G$ für alle $z \in K_r(z_0)$ die Cauchy-Formel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

Nach Lemma 3.44 hat f um z_0 in $K_r(z_0)$ eine konvergente Taylorentwicklung. Jede Wahl von $r < d$ führt zur gleichen Reihe (gleiche Koeffizienten). $\square$

Satz 3.45 (Riemann'scher Fortsetzungssatz)**:**
Sei $A \subset G$, G Gebiet, diskret und abgeschlossen sowie $f : G \backslash A \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:

(i) f ist in A holomorph fortsetzbar.

(ii) f ist in A stetig fortsetzbar.

(iii) f ist in einer Umgebung $U \subset G$ eines jeden Punktes $z_0 \in A$ beschränkt.

(iv) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$ in jedem Punkt $z_0 \in A$.

Beweis:
Ohne Einschränkung nehmen wir $A = \{0\}$ an. Dann gilt $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv)$. Für $iv) \Rightarrow i)$ betrachte man $g(z) := zf(z)$ für $z \in G \backslash \{0\}$ mit $g(0) := 0$. Sei $h(z) := zg(z)$. g ist nach Annahme stetig in 0. Daher ist

$$h(z) = h(0) + zg(z) \Leftrightarrow \frac{h(z) - h(0)}{z - 0} = g(z) \to g(0) = 0 = h'(0) \text{ für } z \to 0$$

Da h in $G \backslash \{0\}$ holomorph, ist h also holomorph in G.
Nach dem Entwicklungssatz 3.43 hat h um 0 eine Taylorentwicklung $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$.
Aus $h(0) = h'(0) = 0$ folgt $h(z) = z^2(a_2 + a_3 z + a_4 z^2 + \ldots)$ in einer kleinen Umgebung. Da $h(z) = z^2 f(z)$ für $z \neq 0$, so ist

$$\frac{h(z)}{z^2} =: \hat{f}(z) := a_2 + a_3 z + a_4 z^2 + \ldots$$

um 0 die holomorphe Fortsetzung von f in G. $\square$

Satz 3.46 (Entwicklungslemma)**:**
Für jede Funktion $f \in \mathcal{C}(\partial K)$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{\nu=k}^{\infty} \binom{\nu}{k} a_\nu (z - z_0)^{\nu - k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{(w - z)^{k+1}}\, dw, z \in K_r(z_0)$$

mit $a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{(w - z_0)^{\nu+1}\, dw}$.

Beweis:
Die in $K_1(0)$ konvergente Reihe

$$\frac{1}{(1-q)^{k+1}} = \sum_{\nu=k}^{\infty} \binom{\nu}{k} q^{\nu-k}, \ |q| < 1$$

ist die k-te Ableitung der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-w}$ (Übung).
Setze $q = \frac{z-z_0}{w-z_0}$. Dann ist für $z \in K$ und $w \in \partial K$

$$\frac{1}{(w-z)^{k+1}} = \sum_{\nu=k}^{\infty} \binom{\nu}{k} \frac{1}{(w-z_0)^{\nu+1}} (z-z_0)^{\nu-k}$$

Setzt man wie im Beweis von Lemma 3.44

$$g_\nu(w) := \frac{f(w)}{(w-z_0)^{\nu+1}}$$

so folgt

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \left[\sum_{\nu=k}^{\infty} \binom{\nu}{k} g_\nu(w)(z-z_0)^{\nu-k} \right] dw$$

Die Summanden rechts sind auf ∂K durch $\frac{1}{r^{k+1}} |f|_{\partial K} \binom{\nu}{k} q^{\nu-k}$ beschränkt mit $q := \frac{|z-z_0|}{r} = \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$. Da die Summe kleiner unendlich ist die Konvergenz gleichmäßig auf ∂K, d.h. Summation und Integration sind vertauschbar. □

Satz 3.47 (Cauchy-Integralformel für die Ableitungen)**:**
Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, G Gebiet, K Kreisscheibe mit $\overline{K} \subset G$. Dann:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} \, dw$$

für alle $z \in K, k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:
Nach dem Entwicklungslemma 3.46 gilt

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} \, dw = \sum_{\nu=k}^{\infty} k! \binom{\nu}{k} a_\nu (z-z_0)^{\nu-k} \qquad (*)$$

für alle $z \in K = K_r(z_0)$, wobei a_ν die Taylorkoeffizienten der Potenzreihenentwicklung $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ von $f(z)$ sind (Satz 3.43). Wegen 1.25(vi) steht rechts in $(*)$ die k-te Ableitung von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ in z_0, d.h. $f^{(k)}(z_0)$. □

Idee: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z} \, dw$ wird unter dem Integralzeichen differenziert:

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k} \frac{1}{w-z} = \frac{k!}{(w-z)^{k+1}}$$

Folgerung 3.48:
Jede in einem Gebiet G holomorphe Funktion ist unendlich oft komplex differenzierbar in G. In der reellen Analysis:

Bsp i) $f(x) := \begin{cases} x sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ *ist differenzierbar in 0, aber* $f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *ist in* 0 *unstetig.*

Bsp ii) Es gibt Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, die unendlich oft differenzierbar sind, aber in keiner Umgebung z.B. von* $x = 0$ *in eine Potenzreihe entwickelbar sind, z.B.*

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Aber $f^{(k)} = 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$.

Folgerung 3.49 (Wechsel des Entwicklungspunktes)**:**
Ist $f(z) := \sum\limits_{r=0}^{\infty} a_r(z - z_0)^r$ *in* $K_R(z_0)$ *konvergent, so ist* f *um jeden anderen Punkt* $z_1 \in K_R(z_0)$ *in eine Potenzreihe entwickelbar und der Konvergenzradius der neuen Reihe ist mindestens* $R - |z_1 - z_0|$*. Es gilt*

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r(z - z_1)^r \ \textit{mit}\ b_r = \sum_{j=r}^{\infty} \binom{j}{r} a_j(z_1 - z_0)^{j-r}, r \in \mathbb{N}_0$$

Beweis:
Nach Cauchy-Taylor gilt

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(z_1)}{r!}(z - z_1)^r \text{ wobei } |z - z_1| \leq R - |z_1 - z_0|$$

denn $|z - z_0| \leq |z - z_1| + |z_1 - z_0| < R$. Nach 1.25($v$) gilt

$$\frac{f^{(r)}(z_1)}{r!} = \sum_{r=j}^{\infty} \binom{j}{r} a_j(z_1 - z_0)^1 = b_r$$

□

Beispiel:
Sei $|z| < 1$, dann gilt

$$f(z) := \sum_{r=0}^{\infty} z^r = \frac{1}{1 - z}$$

Dies ist die Entwicklung der geometrischen Reihe um $z_0 = 0$. Entwickle $f(z)$ um $z_1, |z_1| < 1$ in die Taylorreihe mit

$$f^{(r)}(z_1) = \frac{r!}{(1 - z_1)^{r+1}}$$

also

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \frac{r!}{(1 - z_1)^{r+1}}(z - z_1)^r \text{ mit } |1 - z_1| > 1$$

Für dieses z_1 findet man eine holomorphe Fortsetzung der Funktion f in $K_1(0)$. Dies liefert dann für $z \neq 1$
$$\frac{1}{1-z}$$
als größte holomorphe Fortsetzung von $f\,|_{K_1(0)}$ zu $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.
Dagegen ist die Potenzreihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} = z^1 + z^1 + z^2 + z^6 + z^{24} + \dots$$
nur in $K_1(0)$ konvergent und darüber hinaus nicht fortsetzbar.

Folgerung 3.50 (Produktsatz)**:**
Seien
$$f(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu z^\mu \quad \textit{sowie} \quad g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu$$
konvergente Potenzreihen in $K_s(0)$ bzw. $K_t(0)$. Dann hat das Produkt $f(z)g(z)$ in $K_r(0)$ eine konvergente Potenzreihenentwicklung, wo $r = \min(s,t)$ mit
$$(fg)(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \rho_\lambda z^\lambda, \rho_\lambda = \sum_{\substack{\mu+\nu=\lambda \\ \mu,\nu\geq 0}} a_\mu b_\nu$$

Beweis:
Als Produkt holomorpher Funktionen ist fg in $K_v(0)$ holomorph und nach Cauchy-Taylor entwickelbar. Mit der Leibniz-Regel gilt
$$(fg)^\lambda(0) = \sum_{\substack{\mu+\nu=\lambda \\ \mu,\nu\geq 0}} \frac{\lambda!}{\mu!\nu!} f^{(\mu)}(0) g^{(\nu)}(0)$$
woraus wegen $f^{(\nu)}(0) = \mu! a_\mu, g^{(\nu)}(0) = \nu! b_\nu$ die Behauptung folgt. □

Folgerung 3.51:
Seien f, g holomorph in $\mathbb{C}$ ohne gemeinsame Nullstellen in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ eine Nullstelle von g, sodass für jede weitere Nullstelle $\omega \neq 0$ von g $|\omega| > |z_0|$ gilt. Dann ist $\frac{f}{g}$ holomorph in $K_{|z_0|}\setminus\{0\}$. Sei $\frac{f}{g}$ holomorph fortsetzbar in 0. Dann hat die Taylorreihe um 0 den Konvergenzradius $|z_0|$.

Beweis:
Klar nach Cauchy-Taylor, da
$$\lim_{z\to z_0} \left|\frac{f}{g}(z)\right| = \infty, \text{ wegen } f(z_0) \neq 0$$
□

Beispiel 3.52:
Die Taylorreihe von $g(z) := \frac{z}{e^z-1}$ um $t = 0$ für $z \in \mathbb{C}\setminus\{2\pi i\,\mathbb{Z}\}$:

Es gilt $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{e^z-1} = 1$. Also ist $g(z)$ in $z = 0$ nach Satz 3.45 holomorph fortsetzbar.
Die Funktion $g(z)$ ist verwandt mit $\cot(z) := \frac{cos(z)}{sin(z)}$ für $\sin\ z \neq 0$, denn

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})}{\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})} = i\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = i + i\frac{2}{e^{2iz}-1} = i + \frac{1}{z}g(2iz) \tag{3.53}$$

für alle $z \in K_\pi(0)\backslash\{0\}$. Nach dem Entwicklungssatz 3.43 besitzt g auf $K_{2\pi}(0)$ die Taylor-Entwicklung

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B^\nu}{\nu!} z^\nu \text{ mit } B_\nu \in \mathbb{C} \tag{3.54}$$

Nach 3.53 folgt

$$g(z) + \frac{1}{2}z = \frac{z}{2i}\cot\left(\frac{z}{2i}\right) \tag{3.55}$$

für alle $z \in K_{2\pi}(0)\backslash\{0\}$. Da $\cot z$ eine ungerade Funktion ist, d.h. $\cot(-z) = -\cot z$ ist $z\cot z$ eine gerade Funktion. Somit ist auch $g(z) + \frac{1}{2}z$ eine gerade Funktion. Dann müssen in der Potenzreihenentwicklung um 0

$$g(z) + \frac{1}{2}z = B_0 + (B_1 + \frac{1}{2})z + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B^\nu}{\nu!} z^\nu$$

die ungeraden Koeffizienten verschwinden. Also ist $B_1 = -\frac{1}{2}$ und $B_{2\nu+1} = 0, \nu \geq 1$. Wegen $g(0) = 1$ ist $B_0 = 1$ und somit

$$\frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} z^{2\nu} \tag{3.56}$$

Es gilt

$$1 = \frac{e^z-1}{z}\frac{z}{e^z-1}, \left(= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)!} z^\nu \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} z^\nu\right)$$

und mit dem Produktsatz

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\nu+\mu=\lambda,\nu,\mu>0} \frac{1}{(\nu+1)!}\frac{B_\mu}{\mu!} z^\lambda$$

und Koeffizientenvergleich

$$\sum_{\nu+\mu=\lambda,\nu,\mu>0} \frac{1}{(\nu+1)!}\frac{B_\mu}{\mu!} = 0\ \forall\lambda \geq 1$$

und das ist äquivalent zu

$$\binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \ldots + \binom{n}{n-1} B_{n-1} = 0$$

dabei heißen $B_{2\nu}, \nu \in \mathbb{N}_0$ Bernouill'sche Zahlen. Rekursiv erhält man

$$B_2 = \frac{1}{3}(-\binom{3}{0} B_0 - \binom{3}{1} B_1) = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}\ldots$$

Da die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} z^\nu$ den Konvergenzradius 2π hat, ist die Folge der Bernoullizahlen $(B_\nu)_\nu$ unbeschränkt, denn gäbe es ein $c > 0$ mit $|B_\nu| \leq c \ \forall \nu$, so hätte die Reihe Konvergenzradius ∞. Aus (3.56), (3.53) erhält man die Cotangensreihe

$$\begin{aligned}\cot z = z + \frac{1}{z} g(2iz) &= i + \frac{1}{z}(1 - iz) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu 4^\nu B_{2\nu} z^{2\nu}}{(2\nu)!} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{4^\nu}{(2\nu)!} B_{2\nu} z^{2\nu - 1}\end{aligned}$$

Wegen $\tan z = \cot z - 2 \cot 2z$ folgt

$$\tan z = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{4^\nu (4^\nu - 1)}{(2\nu)!} B_{2\nu} z^{2\nu-1}, 0 < |z| < \frac{\pi}{2}$$

und gilt auch in $z = 0$ wegen holomorpher Fortsetzung.

4 Hauptsätze über holomorphe Funktionen

Satz 4.1 (Identitätssätze)**:**

i) *Sind f, g holomorph in G (Gebiet) und gibt es einen Punkt $z_0 \in G$ und Umgebung $U \subset G$ von z_0 mit $f\mid_U = g\mid_U$, so folgt*

$$f\mid_{K_d(z_0)} = g\mid_{K_d(z_0)}$$

wo d der Randabstand von z_0 nach $\mathbb{C}\backslash G$ ist.

ii) *Sind f, g holomorph in einer Umgebung einer abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{K}$ und es gelte $f\mid_{\partial K} = g\mid_{\partial K}$, so folgt*

$$f\mid_{\overline{K}} = g\mid_{\overline{K}}$$

Beweis:

i) Taylorreihen von f, g um z_0 stellen f, g in $K_d(z_0)$ dar und wegen $f\mid_U = g\mid_U$ sind alle Talyor-Koeffizienten beider Reihen gleich.

ii) Folgt aus Cauchy-Integralformel.

□

Satz 4.2:
Für zwei in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen f, g sind äquivalent:

i) *$f = g$.*

ii) *Die Menge $\{\omega \in G : f(\omega) = g(\omega)\}$ hat einen Häufungspunkt in G.*

iii) *Es gibt einen Punkt $z_0 \in G$, sodass $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis:
$i) \Rightarrow ii)$: klar
$ii) \Rightarrow iii)$: Setze $h := f - g$. h ist holomorph in G und nach Voraussetzung hat $M = \{\omega \in G : f(\omega) = g(\omega)\}$ einen Häufungspunkt $z_0 \in G$. Angenommen es existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $h^{(m)}(z_0) \neq 0$, so wähle m minimal mit dieser Eigenschaft. Dann ist

$$h(z) = (z - z_0)^m h_m(z) \text{ mit } h_m(z) = \sum_{\mu \geq m} \frac{h^{(m)}(z_0)}{\mu!}(z - z_0)^{\mu - m}$$

in K, wo $K \subset G$ Kreisscheibe um z_0 nach Cauchy-Taylor. Hier $h_m(z_0) \neq 0$. Da $h_m(z)$ stetig ist, gibt es eine Umgebung U von z_0, wo $h_m(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ und $h(z) \neq 0\ \forall z \in U \backslash \{0\}$. Also ist

$$M \cap U\{z_0\} = \emptyset$$

d.h. z_0 ist kein Häufungspunkt von M.
$iii) \Rightarrow i)$: Setze $h := f - g$. Sei $S_u = \{w \in G : f^{(u)}(w) = g^{(u)}(w)\}$. S_u ist abgeschlossen in G und damit auch $S = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_u$, d.h. $S \subset G$ ist abgeschlossen und nichtleer, da $z_0 \in S$.
Zu zeigen: S ist offen, dann folgt $S = G$, da G zusammenhängend ist.
Sei dazu $z_1 \in S$, dann ist h in einer Umgebung U von z_1 in eine Taylorreihe in einer Kreisscheibe $z_1 \in K \subset G$ entwickelbar. Dies ist die 0, d.h. $h\mid_K = 0$, d.h. $h^{(u)}\mid_K = 0\ \forall h \in \mathbb{N}_0$, d.h. $K \subset G$ und S ist offen. □

Folgerung 4.3:
Ist $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ und $f : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet mit $J \subset G$. Dann gibt es höchstens eine holomorphe Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ mit $F\mid_J = f$.

Beweis:
Sind $F_1, F_2 : G \to \mathbb{C}$ zwei Funktionen mit $F_1\mid_J = F_2\mid_J$, so folgt nach den Identitätssätzen $F_1 = F_2$ auf G. □

Dies heißt, dass die Funktionen $\exp, \sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die einzigen Funktionen sind, die $\exp, \sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortsetzen.

Definition 4.4:
Ist $D \neq \emptyset$ offen, so ist $\mathcal{O}(D) := \{f : D \to \mathbb{C} : f \text{ holomorph}\}$ die Menge der holomorphen Funktionen auf D. Dann ist $\mathcal{O}(D)$ ein kommutativer Ring mit 1.

Folgerung 4.5:
Ist D Gebiet, so ist $\mathcal{O}(D)$ nullteilerfrei, d.h. $\forall f, g \in \mathcal{O}(D)$ mit $f \cdot g = 0 \Rightarrow f = 0$ oder $g = 0$.

Beweis:
Seien $f, g \in \mathcal{O}(D)$ mit $f \cdot g = 0$. Falls $f = 0$, dann fertig.
Sei also $f \neq 0$, d.h. es gibt ein $z \in D$ mit $f(z) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit folgt, dass es eine Umgebung $U \subset D$ von z gibt mit $f(w) \neq 0\ \forall w \in U$. Also ist $g(w) = 0\ \forall w \in U$. Aus dem Identitätssatz 4.1 folgt, dass $g = 0$ auf D. □

Folgerung 4.6 (Diskretheit und Abzählbarkeit von Null/a-stellen)**:**
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion. Dann ist für jedes $a \in \mathbb{C}$ die Menge der a-Stellen von f

$$f^{-1}(a) = \{z \in G : f(z) = a\}$$

diskret und abgeschlossen in G. Insbesondere ist für jede kompakte Menge $K \subset G$ die Menge $f^{-1}(a) \cap K$ endlich und somit $f^{-1}(a)$ höchstens abzählbar unendlich.

Beweis:
Da f stetig ist, ist $f^{-1}(a)$ abgeschlossen. Hätte $f^{-1}(a)$ einen Häufungspunkt in G, so folgte aus den Identitätssätzen 4.1(auf f und a angewandt) $f \equiv a$ auf G. Also hat f^{-1} keinen Häufungspunkt und ist diskret. Ist K kompakt, so hat die Menge $f^{-1} \cap K$ nur endlich viele Punkte. Da G eine abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen, ist $f^{-1}(a)$ abzählbar. □

Folgerung 4.7:
Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ nicht konstant. Dann ist

$$N_f := \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$$

diskret und abgeschlossen in G. (a = 0)

Warnung:
N_f kann Häufungspunkte in $\mathbb{C} \setminus G$ haben.
Sei

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sin(\frac{1}{z})$$

f hat die Nullstellenmenge $N_f = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \frac{1}{z} \in \pi\mathbb{Z}\} = \{\frac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, was einen Häufungspunkt in $0 \notin G$ hat.

4.1 Ordnung und Vielfachheit

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und f in einer Umgebung von z_0 holomorph und in keiner Umgebung von z_0 identisch Null. Dann existiert nach dem Existenzsatz ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{(0)}(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \ldots = f^{(m-1)} = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Wir setzen

$$ord_{z_0}(f) = m := \min\{\nu \in \mathbb{N}_0 : f^{\nu}(z_0) \neq 0\} \tag{4.9}$$

Dies nennt man die Nullstellenordnung von f in z_0 oder auch für $m > 0$ die Vielfachheit der Nullstellen z_0 von f. Ist $f \equiv 0$ in einer Umgebung von z_0, dann setze $ord_{z_0}(f) = \infty$.

Beispiel 4.10:

$ord_a(z^n) = \begin{cases} n & a = 0 \\ 0 & a \neq 0 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

$ord_a(sin(\pi z)) = \begin{cases} 1 & a \in \mathbb{Z} \\ 0 & a \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

Rechenregeln:

Seien f, g holomorph in einer Umgebung von z_0. Dann:

i) $ord_{z_0}(f) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$

ii) $ord_{z_0}(fg) = ord_{z_0}(f) + ord_{z_0}(g)$

iii) $ord_{z_0}(f+g) \geq min\{ord_{z_0}(f), ord_{z_0}(g)\}$

Allgemeiner setzt man für $z_0 \in \mathbb{C}$ und f holomorph in einer Umgebung von z_0, so ist

$$\nu(f, z_0) := ord_{z_0}(f - f(z_0))$$

Man sagt, dass f den Wert $f(z_0)$ mit der Vielfachheit oder Multiplizität $\nu(f, z_0)$ annimmt. Hier ist $\nu(f, z_0) \geq 1$.

4.2 Existenz singulärer Punkte

Wird $f(z)$ auf $K_R(z_0), 0 < R < \infty$ durch eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ dargestellt, so heißt ein Punkt $w \in \partial K_R(z_0)$ singulärer Punkt, wenn es keine Umgebung U von w gibt, auf der es eine holomorphe Funktion g mit $g\,|_U \cap K_R(z_0) = f\,|_U \cap K_R(z_0)$ gibt.

Beispiel: (i) $R = 1, z_0 = 1, f(z) = \frac{1}{z}$. Dann ist $w = 0$ ein singulärer Punkt, da $\lim_{z\to 0} |f(z)| = \infty$.

(ii) $K_1(1), R = 1, z_0 = 1, f(z) = \exp(-\frac{1}{z^2})$, $w \geq 0$ ist singulärer Punkt, denn für $(z_n) = \frac{1}{n}$ ist $\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = 0$, aber für $(z_n) = \frac{i}{n} + \frac{1}{n^2} \in K_1(1)$ ist $\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = \infty$.

Satz 4.12:
Auf dem Rand des maximalen Konvergenzbereiches einer Potenzreihe $f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ *liegt mindestens ein singulärer Punkt von* f*.*

Beweis:
Sei OE $z_0 = 0$ und sei $K_R(0)$ der Konvergenzkreis. Angenommen die Behauptung sei falsch. Dann existiert zu jedem $w \in \partial K_R(0)$ eine Kreisscheibe $K_r(w)$ mit $v = \nu(w) > 0$ und ein $g \in \mathcal{O}(K_r(w))$ mit $f = g$ auf $K_v(w)$. Da $\partial K_R(0) = \partial K$ kompakt ist, überdecken endlich viele Kreisscheiben $K_r(w)$ ∂K, sagen wir $K_1, \ldots, K_m$. Sei also $\tilde{R} > R$, sodass $K_{\tilde{R}}(0) \subset K_R \cup \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ (Übung. Möglich, da m endlich ist).
Definiere $\tilde{f} : K_{\tilde{R}}(0) \to \mathbb{C}$ durch

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & z \in K_R(0) \\ g_i(z) & z \in K_i \end{cases}$$

wo die g_i die zu K_i gehörigen holomorphen Funktionen $g_i \in \mathcal{O}(K_i)$ sind.
$\tilde{f}$ ist wohldefiniert, denn seien $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $K_i \cap K_j \neq \emptyset$. Damit stimmen aber g_i und g_j auf $v := K_R(0) \cap K_i \cap K_j$ überein und $g_i\,|_v = f\,|_v = g_j\,|_v$. Nun ist $K_i \cap K_j \neq \emptyset$ und konvex und somit zusammenhängend. Nach Identitätssatz 4.1 folgt $g_i\,|_{K_i \cap K_j} = g_j\,|_{K_i \cap K_j}$. Dann ist ist $\tilde{f}$ auf $K_{\tilde{R}}(0)$ holomorph und somit nach Entwicklungssatz 3.43 auf $K_{\tilde{R}}(0)$ in eine Potenzreihe entwickelbar. Die Koeffizienten sind aber

$$\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} = a_\nu$$

Der Konvergenzradius ist dann $\tilde{R} > R$. Widerspruch. □

Satz 4.13 (Holomorphie)**:**
Sei $D \subset \mathbb{C}$ *offen. Für* $f : D \to \mathbb{C}$ *sind äquivalent:*

i) f *ist holomorph in* D*.*

ii) Für jedes Dreieck $\Delta \subset G$ *mit* $\partial\Delta, \mathring{\Delta} \subset D$ *gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f(w)\, dw = 0$$

iii) f *ist lokal integrabel in* D*, d.h.* $\forall z_0 \in D\ \exists$ *Umgebung* $U \subset D$ *von* z_0 *mit* $f\,|_U$ *integrabel („Movein-Bedingung“).*

iv) Für jede Kreisscheibe K mit $\overline{K} \subset D$ und $z \in K$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z} \, dw$$

v) f ist in $z_0 \in D$ eine konvergente Potenzreihe entwickelbar.

Beweis:
$iii) \Rightarrow i)$: Sei $z_0 \in K$ beliebig, U Umgebung von z_0, sodass $f|_U$ Stammfunktion F besitzt. Dann ist F komplex differenzierbar mit $F' = f$ auf U. F' ist nach Satz 3.47 auch unendlich oft differenzierbar, also ist $f|_U$ unendlich oft differenzierbar, also komplex differenzierbar.
$(*)$: konvergente Potenzreihen sind beliebig oft differenzierbar. □

Die restlichen Teile ergeben sich nach folgendem Schaubild:

$$\begin{tikzcd}
i) \arrow[r, Rightarrow, "3.33"] \arrow[d, Rightarrow, "3.37"] & ii) \arrow[r, Rightarrow, "3.32"] & iii) \arrow[d, Rightarrow, "\text{siehe Beweis}"] \\
iv) \arrow[r, Rightarrow, "3.43"'] & v) \arrow[r, Rightarrow, "*"] & i)
\end{tikzcd}$$

Satz 4.14 (Holomorphie + Winkeltreue)**:**
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig reell differenzierbar. Dann sind äquivalent:

(i) f ist holomorph und nirgends konstant

(ii) Es gibt eine Menge $A \subset D$, A diskret und abgeschlossen mit f in $D \backslash A$ winkeltreu + orientierungstreu

Beweis:
$i) \Rightarrow ii)$: Setze $A := \{z \in D : f'(z) = 0\}$. Da f nirgends lokal verschwindet (denn sonst wäre f lokal konstant), ist A abgeschlossen und diskret (Satz 4.7). Daraus folgt mit Satz 2.7 die Behauptung.
$ii) \Rightarrow i)$: Nach Satz 2.7 ist f auf $D \backslash A$ holomorph. Nach dem Riemann'schen Fortsetzungssatz 3.45 ist f dann auf D holomorph. □

Cauchy'sche Abschätzung für die Taylor-Koeffizienten. Nach Satz 3.40 gilt

$$|f(z_0)| \leq |f|_{\partial K_r(z_0)}, r > 0$$

für $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $\overline{K_r(z_0)} \subset D$

Lemma 4.15 (Verallgemeinerung)**:**
Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $\overline{K_r(z_0)} \subset D$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, $z \in K := \overline{K_r(z_0)} \subset D$

$$\left| f^k(z) \right| \leq k! \frac{r}{d(z, \partial K)^{k+1}} |f|_{\partial K}$$

Beweis:
Benutze statt 3.40 die Cauchy-Formel für die Ableitungen von f:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{(w - z)^{k+1}} \, dw$$

und mit der Standardabschätzung gilt

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \leq \frac{k!}{2\pi} \underbrace{L(\partial K)}_{2r\pi} \frac{|f|_{\partial K}}{\min\limits_{w \in \partial K} |w-z|^{k+1}} = d(z, \partial K)$$

□

Folgerung 4.16 (Cauchy)**:**
Sei $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ *Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > r > 0$ *und sei*

$$M(r) := \max_{|z-z_0|=r} |f(z)| \tag{4.18}$$

Dann gilt für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$

$$|a_\nu| \leq \frac{M(r)}{r^\nu} \tag{4.19}$$

Beweis:
Setze $z := z_0$ in 4.16 und beachte

$$a_\nu = \frac{M(r)}{r^\nu}$$

□

Definition 4.20:
Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, heißt ganze Funktion (*entire function*).

Satz 4.21 (Liouville)**:**
Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis:
Sei $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ die Potenzreihenentwicklung von f auf $\mathbb{C}$. Nach dem Entwicklungssatz 3.43 ist der Konvergenzradius $R = \infty$. Nach 4.19 gilt mit $C = |f|_{\mathbb{C}} < \infty$, $|a_\nu| \leq \frac{M(r)}{r^\nu} \leq \frac{C}{r^\nu}$ für alle $\nu \geq 0$ und alle $r > 0$. Also gilt $a_\nu = 0$ für alle $\nu \geq 1$. Also ist $f(z) = a_0$ $\forall z \in \mathbb{C}$. □

Folgerung 4.22 (Fundamentalsatz der Algebra)**:**
Jedes nicht konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten hat mindestens eine Nullstelle auf $\mathbb{C}$*.*

Beweis:
Sei $p(x)$ ein solches Polynom ohne komplexe Nullstellen in $\mathbb{C}$. Dann gilt

$$\lim_{z \to \infty} |p(z)| = \infty$$

da p nicht konstant ist. Setze $f := \frac{1}{p}$. Dann ist $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = 0$. Letzteres heißt: Es gibt ein $r > 0$, sodass $|f(z)| \leq C < \infty$ für $|z| > r$. Es gilt

$$\min_{z \in \overline{K_r(0)}} |p(z)| > 0$$

da $p(z)$ keine Nullstelle hat.
Also folgt $\max\limits_{|z| \leq r} |f(z)| = \frac{1}{\min\limits_{|z| \leq r} |p(z)|} \leq K < \infty$. Also ist f holomorph auf $\mathbb{C}$ und beschränkt, d.h. f ist konstant, also ist p konstant. Widerspruch. □

Folgerung 4.23:

i) *Jedes Polynom $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $a_j \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$ ist eindeutig bis auf Reihenfolge der Faktoren als Produkt*

$$p(z) = a_n (z - c_1)^{m_1} \cdots (z - c_r)^{m_r}$$

darstellbar, wo $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{C}$ paarweise verschiedene $m_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n = m_1 + \ldots + m_r$.

ii) *Hat $p(z)$ nur reelle Koeffizienten und $\deg p = n$. Dann faktorisiert $p(z)$ in reelle Linearfaktoren und reelle quadratische Polynome.*

Beweis:

i) klar.

ii) $\overline{p(z)} = p(\overline{z}) \Rightarrow$ mit c Nullstelle ist $\overline{c}$ Nullstelle. Da $(z - c)(z - \overline{c}) = z^2 - (c + \overline{c})z + c\overline{c} \in \mathbb{R}$ folgt die Behauptung.

$\square$

Definition 4.24:

i) Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet. Eine Folge $f_n : G \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ heißt kompakt konvergent, wenn sie auf jeder kompakten Teilmenge von G gleichmäßig konvergiert.

ii) Die Folge $f_n : G \to \mathbb{C}$ heißt lokal gleichmäßig konvergent, wenn es zu jedem Punkt $z \in G$ eine Umgebung U von z in G gibt, sodass f_n in U gleichmäßig konvergiert. Daraus folgt sofort:

  a) Lokal gleichmäßige Konvergenz impliziert kompakte Konvergenz.

  b) In $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet gilt: kompakte Konvergenz impliziert lokal gleichmäßige Konvergenz.

  Also sind für f_n und Partialsummen von Reihen auf $\mathbb{C}$ kompakte und lokal gleichmäßige Konvergenz äquivalent.

iii) Eine Reihe $\sum\limits_n f_n$ von Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$ heißt normal konvergent in G, wenn jeder Punkt $x_0 \in G$ eine Umgebung $U \subset G$ besitzt, sodass

$$\sum_n |f_n|_U := \sum_n \max_{x \in U} |f_n(x)| < \infty$$

iv) Folgerung: Jede normal konvergente Reihe ist in G lokal gleichmäßig, d.h. kompakt konvergent.

v) Folgerung (Umordnungssatz) Konvergiert $\sum_n f_n$ in G normal gegen f, so konvergiert für jede Bijektion $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\sum_n f_{\tau(n)}$ in G normal gegen f.

vi) Folgerung: Seien $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n, g = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n$ normal konvergente Reihen in G, so konvergiert $\sum_n h_n$, wo h_n alle Produkte $f_\mu g_\nu$ genau einmal durchläuft, normal in G gegen fg.

Satz 4.25 (Weierstrass'scher Konvergenzsatz)**:**
Sei f_n eine Folge in $G \subset \mathbb{C}$, G Gebiet, von holomorphen Funktionen, die in G kompakt gegen $f : G \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f holomorph in G und für jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert die Folge $f_n^{(k)}$ der k-ten Ableitungen gegen $f^{(k)}$.

Beweis:

a) Zunächst ist f als lokal gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen f_n wieder stetig in G. Für jedes $\Delta \subset G$ gilt mit dem Vertauschungssatz für Folgen (Satz 3.19)

$$\int_\Delta f(w)\,dw = \lim_{n\to\infty} \int_\Delta f_n(w)\,dw$$

Da alle Integrale rechts wegen der Holomorphie von f_n verschwinden gilt $\int_\Delta f(w)\,dw = 0$ und nach Satz 3.34 (Goursat) ist f holomorph.

b) Es reicht der Fall $k = 1$:
Sei K eine kompakte Umgebung von $z_0 \in G$ mit $K \subset G$. Nach der Cauchy-Abschätzung gibt es eine größere kompakte Menge L mit $K \subset L \subset G$ mit

$$\min\{d(x, \partial L) : x \in K\} > 0$$

und eine Konstante $M > 0$ mit

$$|f_n' - f'|_K \leq M \underbrace{|f_n - f|_L}_{\to 0}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also folgt $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n' - f'| = 0$.

□

Folgerung 4.26 (Weierstrass'scher Differentations-Satz)**:**

i) *Eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$, die in $G \subset \mathbb{C}$, G Gebiet, kompakt konvergiert, hat in G eine holomorphe Grenzfunktion. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$ in G kompakt gegen $f^{(k)}$, d.h. $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z), z \in G$.*

ii) *Konvergiert $\sum_n f_n, f_n \in \mathcal{O}(G)$ holomorph normal in G, so konvergiert die Reihe $\sum_n f_n^{(k)}$ normal in G gegen $f^{(k)}$.*

iii) *(Doppelreihensatz): Seien $f_\nu = \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)}(z - z_0)^\mu$, $\nu \in \mathbb{N}$ Potenzreihen, die in einer Kreisscheibe K um z_0 konvergieren, sodass $f(z) := \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$ in K kompakt konvergiert. Dann hat f dort in K die konvergente Potenzreihendarstellung*

$$f(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu (z - z_0)^\mu$$

mit

$$b_\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} \in \mathbb{C}$$

Beweis:

i) klar nach Satz 4.25.

ii) Sei $K \subset G$ kompakt. Nach dem Cauchy'schen Abschätzungssatz gibt es eine kompakte Obermenge L mit $K \subset L \subset G$, sodass für $k \geq 1$ eine Konstante $0 < M_k < \infty$ existiert, sodass

$$\left|f^{(k)}\right|_K \leq M_k \left|f\right|_L$$

d.h. die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$ konvergieren in G normal mit Limes $f^{(k)}$ wegen der kompakten Konvergenz.

iii) Nach Differentations-Satz für Reihen 4.25 ist $f \in \mathcal{O}(G)$ und

$$f^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu^{(k)}$$

Nach dem Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor 3.43 hat f in K die konvergente Potenzreihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{f^{(\mu)}(z_0)}{\mu!}(z - z_0)^\mu$$

mit

$$\frac{f^{(\mu)}(z_0)}{\mu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f_\nu^{(\mu)}(z_0)}{\mu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a^{(\nu)}\mu$$

$\square$

4.3 Maximumsprinzip + Offenheitssatz

Falls f holomorph und nicht konstant, so hat $f^{-1}(a) = \{z : f(z) = a\}$ nur isolierte Punkte.

Definition 4.27:
Seien X, Y metrische Räume, $f : X \to Y$ stetig, so heißt f offen, falls das Bild $f(U)$ einer jeden offenen Menge wieder offen ist. (Stetigkeit: $f^{-1}(U)$ für U offen ist offen). Jeder Homoömorphismus zwischen X und Y ist offen.

In $\mathbb{R}$ gibt es nicht konstante $\mathcal{C}^\infty$-Funktion, die nicht offen sind. Z.B. ist $f(x) = x^2$ nicht offen, denn $f((-1, 1)) = [0, 1)$.

Satz 4.28 (Offenheitssatz)**:**
Sei f holomorph und nirgends lokal konstant auf $D \subset \mathbb{C}$, D offen. Dann ist $f : D \to \mathbb{C}$ offen.

Beweis:
Sei $z_0 \in U \subset D$, U offene Kreisscheibe. zz: $f(U)$ enthält eine offene Kreisscheibe K um $f(z_0)$, wobei ohne Einschränkung $f(z_0) = 0$ (sonst betrachte $f(z) - f(z_0)$).
Da f um z_0 nicht lokal konstant ist, gibt es eine Kreisscheibe V um z_0, $\overline{V} \subset U$, sodass $0 \notin f(\partial V)$. Andernfalls gäbe es eine Folge von Punkten $z_n \in U$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0, (z_n \in \partial V_n)$ mit $f(z_n) = 0$, woraus nach dem Identitätssatz 4.1 $f \equiv 0$ auf U folgen würde. Daher

$$2\delta := \min_{z\in\partial V} |f(z)| > 0$$

da f stetig und ∂V kompakt ist. Setze $K := K_\delta(0)$.
Behauptung: $K \subset f(U)$.
Für beliebiges $w \in K$ mit $|w| < \delta$, also für alle $z \in \partial V$, gilt

$$|f(z) - w| \geq \left| \underbrace{|f(z)|}_{\geq 2\delta} - \underbrace{|w|}_{\leq \delta} \right| \geq \delta > 0$$

und somit

$$\min_{z\in\partial V} |f(z) - w| > \underbrace{|w|}_{\leq\delta} = |f(z_0) - w| = |w|$$

Nach Satz 4.29 gibt es also ein $\hat{z} \in V$ (Nullstelle) mit $w = f(\hat{z})$, d.h. $K \subset f(U)$. □

Satz 4.29:
Sei $K = K_r(x_0)$ eine offene Kreisscheibe um $x_0 \in D$, $r > 0$ und $\overline{K} \subset D$, D offen. Sei f holomorph in D und $\min\limits_{z\in\partial K} |f(z)| > |f(x_0)|$. Dann hat f eine Nullstelle in K.

Beweis:
Wäre f ohne Nullstelle in K, so gäbe es wegen der Stetigkeit von f und der Voraussetzung $(|f(z)| > |f(z_0)| > 0, z \in \partial K)$ + Kompaktheit von ∂K eine offene Umgebung $U \supset \overline{K}$ von $\overline{K}$, wo f ohne Nullstelle ist. Also ist $g : U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{f(z)}$ holomorph in U. Die Mittelwertungleichung 3.40 liefert

$$|f(z_0)|^{-1} = g(z_0) \overset{(3.40)}{\leq} \max_{z\in\partial K} |g(z)| = \min_{z\in\partial K} |f(z)|$$

woraus

$$|f(z_0)| \geq \min_{z\in\partial K} |f(z)|$$

□

Folgerung 4.30 (Gebietstreue)**:**
Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, G Gebiet, und f nicht konstant. Dann ist $f(G)$ wieder ein Gebiet.

Beweis:
Da f nach dem Identitätssatz nirgends lokal konstant in G ist, ist $f(G)$ nach Satz 4.28 offen. Da f stetig ist, ist $f(G)$ wieder zusammenhängend. Also ist $f(G)$ Gebiet. □

Folgerung 4.31 (Maximumsprinzip)**:**

i) *Sei $f : G \to \mathbb{C}$ auf einem G Gebiet holomorph. Hat f in $z_0 \in G$ ein lokales Maximum des Betrages, d.h. existiert eine Umgebung $U \ni z_0, U \subset G$ offen, mit $|f(z_0)| = |f|_U$. Dann ist f konstant in G.*

ii) *Ist G ein beschränktes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $f : G \cup \partial G \to \mathbb{C}$ stetig. Dann nimmt f das Betragsmaximum auf ∂G an, d.h.*

$$|f(z)| \leq |f|_{\partial G} \ \forall z \in \overline{G}$$

iii) *f holomorph in G. Sei $z_0 \in G$, sodass f in z_0 ein lokales Betragsminimum hat, d.h. es existiert eine Umgebung $U \ni z_0$, $U \subset G$ offen mit $|f(z_0)| = \inf\limits_{z \in U} f(z)$. Dann gilt $f(z_0) = 0$ oder f ist konstant in ganz G.*

iv) *(Minimum für beschränkte Gebiete): Sei G beschränkt, f stetig auf $\overline{G}$ und holomorph in G. Dann hat f in G Nullstellen oder $|f|$ nimmt das Minimum des Betrages auf dem Rand an, d.h. $|f(z)| \geq \min\limits_{w \in \partial G} |f(w)|$ für alle $z \in \overline{G}$.*

Beweis:

i) Da $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in U$ folgt $f(U) \subset \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq |f(z_0)|\}$. Also ist $f(U)$ keine offene Umgebung von $f(z_0)$, d.h. f ist nicht offen. Nach dem Offenheitssatz 4.28 ist f lokalkonstant, aber da G zusammenhängend ist, auch konstant auf G.

ii) f hat auf $\overline{G}$ ein Betragsmaximum in z_0, da f stetig. Falls $z_0 \in G$, so gibt es ein $U \ni z_0$, $U \subset G$, wo f holomorph. Nach (i) wäre dann f konstant auf G, d.h. wegen der Stetigkeit ist $|f|_{\overline{G}} = |f|_{\partial G}$.

iii) Anwendung von $i)$ auf $\frac{1}{f}$.

iv) $\overline{G}$ ist kompakt, da G beschränkt ist. Wenn $\inf\limits_{z \in \partial G} |f(z)| = 0$ klar, sonst $f\ |_G \neq 0$ und $\inf\limits_{z \in \partial G} |f(z)| > 0$. Dann ist $\frac{1}{f}$ holomorph in G. Wende $ii)$ an auf $\frac{1}{f}$.

□

Satz 4.32 (Schwarz-Lemma)**:**
Sei $\mathbb{E} := K_1(0)$ die Einheitskreisscheibe und sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt

$$|f(z)| \leq |z| \ \forall z \in \mathbb{E}$$

sowie

$$|f'(0)| \leq 1$$

Gibt es ein $z_0 \in \mathbb{E} \backslash \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$, so ist f eine Drehung um den Nullpunkt, d.h. $a \in S^1$ mit $f(z) = az$ für alle $z \in \mathbb{E}$.

Beweis:
Betrachte $g : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ definiert als

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

g ist holomorph (Riemann'scher Fortsetzungssatz 3.45). Wegen $|f(z)| < 1$ gilt für alle $z \in \mathbb{E}$ und alle $r < 1$

$$\max_{|z|=r} |g(z)| = \max_{\partial K_r(0)} \frac{|f(z)|}{|z|} < \frac{1}{r}$$

Nach dem Maximumprinzip 4.31 folgt

$$\max_{|z|\leq r} |g(z)| < \frac{1}{r}$$

Für $r \uparrow 1$ folgt

$$\sup_{z\in\mathbb{E}} |g(z)| \leq 1$$

für alle $z \in \mathbb{E}$ sowie $|g(0)| = |f'(0)| \leq 1$.
Ist nun $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \mathbb{E}$ oder $|f'(0)| = 1$, d.h. $|g(z_0)| = 1$ oder $|g(0)| = 1$, so nimmt g sein Maximum in $\mathbb{E}$ an, d.h. nach Satz 4.31 ist $g = \alpha$ für ein $|\alpha| = 1$, also $f(z) = az$, $z \in \mathbb{E}$. □

Definition 4.33:

(*i*) Ist $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet und $l : G \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit $\exp(l(z)) = z$ für alle $z \in G$, so heißt l Logarithmusfunktion in G.

Beispiel:
Die Logarithmusfunktion auf $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ ist durch $\log(z) := \int_{[1,z]} \frac{dw}{w}$ gegeben.

(*ii*) Ist allgemeiner $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und ist $g : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $\exp(g(z)) = f(z)$ $\forall z \in G$, so heißt g ein holomorpher Logarithmus von f in G.

Satz 4.34:

a) *Besitzt f in G einen Logarithmus, so gilt $f(z) \neq 0$ $\forall z \in G$.*

b) *Ist g Logarithmus zu f in G, so auch $g + 2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$.*

c) *Ist g Logarithmus zu f in G, so gilt $g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ $\forall z \in G$. g' ist die logarithmische Ableitung von f.*

d) *Sind g_1, g_2 Logarithmen von f in G, so existiert ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $g_1 = g_2 + 2\pi ik$.*

e) *Sei G Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:*

   i) *Es existiert ein Logarithmus g zu f in G.*

   ii) *$\frac{f'}{f}$ hat in G eine Stammfunktion.*

f) *Insbesondere existiert zu jeder holomorphen, nullstellenfreien Funktion f auf einem Sterngebiet G ein Logarithmus, d.h. ein $\varphi \in \mathcal{O}(G)$ mit $\exp(\varphi(z)) = f(z)$.*

Beweis:

a) exp hat keine Nullstellen.

b) exp ist $2\pi i$-periodisch.

c) Aus der Kettenregel und $f(z) = \exp(g(z))$ folgt

$$f'(z) = \exp(g(z))g'(z) = f(z)g'(z)$$

.

d) Nach *c*) gilt $g_1'(z) = g_2'(z)$ für alle $z \in G$. Da G zusammenhängend ist gibt es eine Konstante c mit $g_1(z) = g_2(z) + c$. Daher

$$\exp(g_1(z)) = f(z) = exp(g_2(z)) \Longrightarrow c = 2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$$

e) $i \Rightarrow ii$): nach *c*.
$ii \Rightarrow i$): Sei g_0 eine Stammfunktion von $\frac{f'}{f}$ in G. Betrachte die Hilfsfunktion

$$h(z) := f(z)\exp(-g_0(z))$$

Diese Funktion ist holomorph und nach Produkt- und Kettenregel gilt

$$h'(z) = f'(z)\exp(-g(z_0)) - f(z)\exp(-g_0(z))\underbrace{g_0'(z)}_{=\frac{f'(z)}{f(z)}} = 0$$

für alle $z \in G$ Da G zusammenhängend ist, gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ mit $h \equiv c$.
Da f nullstellenfrei ist und $\exp(-g(z)) \neq 0$ für alle $z \in G$ folgt $c \neq 0$, d.h. es gibt ein $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\exp(\omega) = c$. Für $g(z) := g_0(z) + \omega$ gilt dann

$$\exp(g(z)) = \exp(g_0(z))\exp(\omega) = c\exp(g_0(z)) = h(z)\exp(g_0(z)) = f(z)$$

für alle $z \in G$, d.h. g ist Logarithmus zu f in G.

f) klar nach *e*) und Satz 3.35.

□

Bemerkung 4.35:
Sei G ein Sterngebiet mit „Sternzentrum“ z_0 und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei, so ist ein Logarithmus von f gegeben durch

$$g(z) := \int_{[z_0,z]} \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw + \omega$$

mit $\exp(\omega) = f(z_0)$.

Definition 4.36:
Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $q : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $q(z)^n = f(z)\ \forall z \in G$, so heißt q eine n-te Wurzel von f in G.

Satz 4.37:
Sei G ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(G)$ nullstellenfrei und $g \in \mathcal{O}(G)$ ein Logarithmus von f in G. Dann ist $q := \exp(\frac{1}{n}g)$ eine n-te Wurzel von f. Insbesondere existiert zu jeder holomorphen und nullstellenfreien Funktion f auf einem Sterngebiet G eine n-te Wurzel von f.

Bemerkung 4.38:
Auf beliebigen Gebieten brauchen keine Wurzeln zu existieren, z.B. hat $f(z) = z$ im Kreisring $\{z \in \mathbb{C}, 1 < |z| < 2\}$ keine Quadratwurzel.

Anwendung 4.39:
Sei G Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$ nullstellenfrei. Dann gilt für jeden Weg γ in G von a nach b, $a, b \in G$

$$f(b) = f(a)\exp\left(\int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw\right) \tag{4.40}$$

Falls γ geschlossen, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw \in \mathbb{Z} \tag{4.41}$$

Beweis:
Sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to G$, $a = \gamma(\alpha), b = \gamma(\beta)$. Wähle Kreisscheiben $U_1, \ldots, U_n \subset G$ sowie $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ mit $\mathrm{Spur}(\gamma) \mid_{[t_{\nu-1}, t_\nu]} \subset U_\nu, \nu \geq 1$, d.h. z_ν ist Mittelpunkt von U_ν, ω_ν die Lösung von $\exp(\omega_\nu) = f(z_\nu)$.
Nach Bemerkung 4.35 ist $g_\nu(z) := \int_{[z_\nu, z]} \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw + \omega_\nu$ ein Logarithmus von f auf $U_\nu, \nu = 1, \ldots, n$. Somit gilt $\forall z \in U_\nu$

$$\exp\left(\int_{[z_\nu, z]} \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw + \omega_\nu\right) = f(z)$$

und

$$\exp\left(\int_{\gamma_\nu} \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw\right) = \frac{f(\gamma_\nu(t_\nu))}{f(\gamma_\nu(t_{\nu-1}))}, \nu = 1, \ldots, n$$

Multiplikation über ν liefert

$$\exp\left(\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\gamma_\nu} \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw\right) = \exp\left(\int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw\right) = \frac{f(\gamma_n(t_n))}{f(\gamma_0(t_0))} = \frac{f(b)}{f(a)}$$

und somit folgt 4.40. Um 4.41 zu erhalten benutze $\exp(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in 2\pi i\,\mathbb{Z}$. $\square$

4.4 Biholomorphie

Satz 4.42 (Biholomorphie-Kriterien)**:**
Sei $f \in \mathcal{O}(U)$, $U \subset \mathbb{C}$ offen, f injektiv. Dann ist $\tilde{U} := f(U) \subset \mathbb{C}$ offen und die Abbildung $f : U \to \tilde{U}$ ist biholomorph. Es gilt $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ und für $\forall \omega \in \tilde{U}$ gilt

$$(f^{-1})'(\omega) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\omega))} \tag{4.43}$$

Beweis:
Da f injektiv und somit nirgends lokalkonstant ist, so ist f nach Offenheitssatz 4.28 offen. Damit ist $\tilde{U} := f(U)$ offen und $f^{-1} : \tilde{U} \to U$ stetig. Da f injektiv und nicht lokalkonstant ist, so ist f' auf keiner offenen Menge $V \subset U$ identisch Null. Nach dem Identitätssatz 4.1 ist die Nullstellenmenge $\mathcal{N}(f')$ daher diskret und abgeschlossen. Da f injektiv und offen ist, ist $M := f(\mathcal{N}(f'))$ diskret und abgeschlossen in $\tilde{U}$.
Sei nun $w_0 \in \tilde{U} \backslash M$ und $z_0 := f^{-1}(w_0)$. Dann gilt (komplexe Differenzierbarkeit)

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f_1(z) \text{ wobei } f_1 : U \to \mathbb{C} \text{ mit } f_1(z_0) = f'(z_0) \neq 0$$

und f ist in z_0 stetig.
Mit $w := f(z) \Leftrightarrow z = f^{-1}(w)$ und $q := f_1 \circ f^{-1} : \tilde{U} \to \tilde{U}$ folgt

$$w = w_0 + (f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)) f_1(f^{-1}(w))$$

wobei der letzte Teil $q(w)$ entspricht. Dabei ist q stetig mit $q(w_0) = f(z_0) \neq 0$ also $q(w) \neq 0 \ \forall w \in \tilde{U}$ nahe bei w_0. Für diese $w \in \tilde{U}$ folgt

$$f^{-1}(w) = f^{-1}(w_0) + (w - w_0) \frac{1}{q(w)}$$

Dies bedeutet aber nach Charakterisierung der komplexen Differenzierbarkeit, dass f^{-1} in w_0 komplex differenzierbar ist mit

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{q(w_0)} = \frac{1}{f_1(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}$$

Dies zeigt 4.43 für $w_0 \in \tilde{U} \backslash M$.
Es bleibt zu zeigen: $\mathcal{N}(f') = \emptyset$ ($\Rightarrow M = \emptyset$). Wir wissen bereits, dass f^{-1} auf $\tilde{U} \backslash M$ holomorph ist. Außerdem ist f^{-1} auf $\tilde{U}$ stetig. Da M diskret und abgeschlossen in $\tilde{U}$ ist, ist f^{-1} nach dem Riemann'schen Fortsetzungssatz 3.45 auf ganz $\tilde{U}$ holomorph. Die auf $\tilde{U} \backslash M$ bestehende Gleichung

$$(f^{-1})'(w) \cdot f'(f^{-1}(w)) = 1 \tag{vgl. 4.43}$$

gilt aus Stetigkeitsgründen auf ganz $\tilde{U}$. Insbesondere gilt $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in U$, d.h. $\mathcal{N}(f') = \emptyset$. $\square$

Satz 4.44 (Injektivitätslemma)**:**
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in U$ mit $f'(z_0) \neq 0$. Dann existiert eine Umgebung $V \subset U$ von z_0, sodass $f|_V$ injektiv ist.

Lemma 4.45 (Approximationslemma)**:**
Ist $K \subset U$ eine Kreisscheibe um z_0 und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt

$$\left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f'(z_0) \right| \leq |f' - f'(z_0)| \, |_K \tag{4.46}$$

für alle $w, z \in K$ mit $w \neq z$.

Beweis:
Für alle $w, z \in K$ gilt

$$f(w) - f(z) - f'(z_0)(w-z) = \int\limits_{[w,z]} (f'(\zeta) - f'(z_0))\, d\zeta$$

und somit nach der Standardabschätzung für Wegintegrale 3.17

$$|f(w) - f(z) - f'(z_0)(w-z)| \leq \underbrace{|w-z|}_{\text{Weglänge}} \underbrace{|f' - f'(z_0)|\,|_K}_{\text{Betragsabschätzung}}$$

Division durch $|w-z|$ für $w \neq z$ liefert 4.46. □

Beweis von 4.44:
Ist $f'(z_0) \neq 0$ und $r > 0$ hinreichend klein, so gilt

$$|f' - f(z_0)|_K < |f'(z_0)| \tag{4.47}$$

mit $K = K_r(z_0)$, da f' stetig in z_0 und somit

$$f(w) \neq f(z)\ \forall w, z \in K_r(z_0)$$

Aus $f(w) = f(z)$ folgte nach 4.46 nämlich

$$|f'(z_0)| \leq |f' - f'(z_0)|_K$$

im Widerspruch zu 4.47. Also ist f auf $V := K_r(z_0)$ injektiv. □

Definition 4.48:
Eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt lokal biholomorph um $z_0 \in U$, wenn es eine offene Umgebung $V \subset U$ gibt von z_0, sodass $f\,|_V \colon V \to f(V)$ biholomorph ist.

Satz 4.49 (Biholomorphiekriterium)**:**
Eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist genau dann lokal biholomorph um $z_0 \in U$, wenn $f'(z_0) \neq 0$ gilt.

Beweis:
„ $\Leftarrow$ ": Satz 4.44
„ $\Rightarrow$ ": Aus $(g \circ f)(z) = z\ \forall z$ folgt $g'(f(z))f'(z) = 1$ und daher muss $f'(z) \neq 0$ für alle z gelten. □

Satz 4.50 (Lokale Normalform)**:**
Sei $f \in \mathcal{O}(U)$ nicht konstant um $z_0 \in U$. Dann gilt

(i) *Existenzaussage: Es existiert ein $r > 0$ und $h : K_r(z_0) \to h(K_r(z_0))$ biholomorph, sodass*

$$f\,|_{K_r(z_0)} \equiv f(z_0) + h^n \tag{4.51}$$

mit $n := \nu(f, z_0)$.

(ii) *Eindeutigkeitsaussage: Ist $\hat{r} > 0$ und $\hat{h} : K_{\hat{r}}(z_0) \to \hat{h}(K_{\hat{r}}(z_0))$ holomorph mit $f\,|_{K_{\hat{r}}(z_0)} = f(z_0) + \hat{h}^n$ und $\hat{h}'(z_0) \neq 0$, so folgt $m = n$ und es existiert eine n-te Einheitswurzel ζ, sodass $\hat{h}(z) = \zeta h(z)\ \forall z \in K_r(z_0) \cap K_{\hat{r}}(z_0)$, wobei r, h wie in (i) gewählt sind.*

Beweis:

(i) Nach Definition der Vielfachheit $\nu(f, z_0)$ gilt für z nahe bei z_0

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^n \cdot g(z)$$

wobei $n = \nu(f, z_0) \in \mathbb{N}_1$ und g holomorph mit $g(z_0) \neq 0$. Sei $r > 0$ derart dass g auf $K := K_r(z_0)$ nullstellenfrei ist. Nach Satz 4.37 (Existenz n-ter Einheitswurzeln) existiert ein $q \in \mathcal{O}(K)$ mit $q^n = g\mid_K$. Setze $h := (z - z_0)q$. Dann gilt 4.51 und wegen $q^n(z_0) = g(z_0)$ gilt zudem $h'(z_0) = q(z_0) \neq 0$. Nach Satz 4.49 kann man K so verkleinern, dass $h : K \to h(K)$ biholomorph ist.

(ii) In $K \cap \hat{K}$ ($K := K_r(z_0), \hat{K} := K_{\hat{r}}(z_0)$) gilt $h^n = \hat{h}^m$ sowie $h(z_0) = 0 = \hat{h}(z_0)$. Da $h'(z_0) \neq 0, \hat{h}(z_0) \neq 0$, folgt

$$n = n \cdot \underbrace{ord_{z_0}(h)}_{1} \overset{4.11}{=} ord_{z_0}(h^n) = ord_{z_0}(\hat{h}^m) \overset{4.11}{=} m \underbrace{ord_{z_0}(\hat{h})}_{1} = m$$

also $n = m$. Daraus folgt $h^n = \hat{h}^n \Rightarrow \hat{h} = \zeta h$ für ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\zeta^n = 1$.

$\square$

Folgerung 4.52:
Sei $f \in \mathcal{O}(U)$ nicht konstant um $z_0 \in U$, $n = \nu(f, z_0) \in \mathbb{N}_1$. Dann gibt es ein Gebiet $G \subset U$, sodass $V := f(G)$ eine Kreisscheibe um $f(z_0)$ ist und für jedes $w \in V \backslash \{f(z_0)\}$ die Gleichung $f(z) = w$ genau n verschiedene Lösungen in G besitzt.

Beweis:
Nach Satz 4.50 existieren $r > 0$ und $h : K \to h(K)$ biholomorph, $K := K_r(z_0)$ mit $f\mid_K = f(z_0) + h^n$. Sei $s > 0$ hinreichend klein, sodass $K_s(0) \subset h(K)$, dies geht wegen $h(z_0) = 0$ und h biholomorph ($\Rightarrow h$ offen).
Setze nun $V := K_{s^n}(f(z_0))$ und $G := h^{-1}(K_s(0)) \subset K$, dann ist G nach Folgerung 4.30 ein Gebiet und $f(G) \subset V$. Außerdem gilt mit $w \in V \backslash \{f(z_0)\}$, $z \in G$

$$\begin{aligned}
&f(z) = w \\
&\Leftrightarrow f(z_0) + (h(z))^n = w \\
&\Leftrightarrow (h(z))^n = \underbrace{w - f(z_0)}_{\in K_{s^n}(0)} \\
&\Leftrightarrow h(z) = \underbrace{c \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right)}_{\in K_s(0)}
\end{aligned}$$

für ein $k = 0, 1, \ldots, n-1$, wobei c irgendeine feste Lösung der Gleichung $c^n = w - f(z_0)$ ist und da h biholomorph $z = h^{-1}(c \exp(\frac{2\pi i k}{n}))$ für ein $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Also hat die Gleichung $f(z) = w$ genau n verschiedene Lösungen in G, was zu zeigen war. $\square$

Fazit: Lokal verhält sich $f(z)$ in $z = z_0$ also ähnlich wie z^n in $z = 0$.

5 Isolierte Singularitäten und Laurententwicklung

Definition 5.1:
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, $f : D\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann heißt z_0 eine isolierte Singularität von f.

(i) Ist f in z_0 holomorph fortsetzbar, so heißt z_0 hebbar.

(ii) Gilt $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$, so heißt z_0 Pol von f.

(iii) Ist z_0 weder hebbar noch Pol, so heißt z_0 wesentliche Singularität von f.

Beispiel 5.2:

- $\frac{z^n-1}{z-1}$, $\frac{\sin(z)}{z}$, $\frac{z}{e^z-1}$ haben in $z = 0$ eine hebbare Singularität.
- $\frac{1}{z}$ hat in $z = 0$ einen Pol.
- $\exp(\frac{1}{z})$ hat in $z = 0$ eine wesentliche Singularität

Satz 5.3:
[Hebbarkeitssatz, Charakterisierung hebbarer Singularitäten] z_0 ist hebbare Singularität von $f \in \mathcal{O}(D\backslash\{z_0\})$ genau dann wenn f in einer Umgebung $U \subset D$ von z_0 beschränkt ist.

Beweis:
Klar nach Satz 3.45 (Riemann'scher Fortsetzungssatz). □

Satz 5.4 (und Definiton)**:**
Ist z_0 Pol von $f \in \mathcal{O}(D\backslash\{z_0\})$, so existiert eine natürliche Zahl $\nu \in \mathbb{N}$, derart dass $f(z)(z-z_0)^\nu$ in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist. Die kleinste solche natürliche Zahl ν heißt Ordnung des Pols z_0 von f.

Beweis:
Sei z_0 Pol von f , also $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$, d.h. für alle $K > 0$ gibt es ein $r_K > 0$, sodass $|f(z)| > K$ für alle $0 < |z - z_0| < r_K$. Dann existiert eine Umgebung $U \subset D$ von z_0, sodass f auf $U\backslash\{z_0\}$ nullstellenfrei ist. Weiter gilt für die auf $U\backslash\{z_0\}$ holomorphe Funktion $\tilde{f} = \frac{1}{f}$, dass

$$\lim_{z \to z_0} \tilde{f} = 0$$

d.h. $\tilde{f}$ hat nach Satz 5.3 in $z = z_0$ eine hebbare Singularität mit holomorpher Fortsetzung $\tilde{f}(z_0) = 0$. Die so erhaltene Funktion $\tilde{f}$ hat nach Blatt 9, Aufgabe 1 eine Darstellung $\tilde{f}(z) = (z-z_0)^\nu \tilde{g}(z)$ mit $\nu \in \mathbb{N}$, $\tilde{g} \in \mathcal{O}(U)$, $\tilde{g}(z_0) \neq 0$. Es folgt

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^\nu} \frac{1}{\tilde{g}(z)}$$

d.h. $f(z)(z-z_0)^\nu$ ist in einer Umgebung von z_0 beschränkt. □

Satz 5.5 (Charakterisierung von Polstellen)**:**
Für $f \in \mathcal{O}(D\backslash\{z_0\})$ sind äquivalent:

(i) *z_0 ist Pol von f*

(ii) $\exists\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1, g \in \mathcal{O}(D)$ *mit* $g(z_0) \neq 0$ *und*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n} \ \forall z \in D \backslash \{z_0\} \tag{5.6}$$

(iii) $\exists\, m \in \mathbb{N}_1, \exists b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{C}, b_m \neq 0$ *und* $h \in \mathcal{O}(D)$ *mit*

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{b_1}{(z-z_0)^1} + h(z) \ \forall z \in D \backslash \{z_0\} \tag{5.7}$$

Dabei sind n, g *und* $m, b_1, \ldots, b_m, h$ *eindeutig bestimmt und es gilt* $n = m = \nu$*, wobei* ν *die Ordnung des Pols ist.*

Beweis:
$(i) \Rightarrow (ii)$: Setze $n = \nu, \nu \geq 1$ und

$$g(z) := \begin{cases} f(z)(z-z_0)^\nu & z \neq z_0 \\ \frac{1}{\tilde{g}(z_0)} & z = z_0 \end{cases}$$

wobei $\tilde{g} \in \mathcal{O}(D), \tilde{g}(z_0) \neq 0$ wie im Beweis von Satz 5.4. Dann ist $g \in \mathcal{O}(D)$ und es gilt 5.6.
$(ii) \Rightarrow (i)$: klar.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sei

$$g(z) = b_m + b_{m-1}(z-z_0)^1 + \ldots + b_1(z-z_0)^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{n+k}$$

die Potenzreihenentwicklung von g um z_0, also insbesondere $b_n = g(z_0) \neq 0$. Setze $m := n$ und

$$h(z) = \begin{cases} f(z) - \frac{b_n}{(z-z_0)^n} - \ldots - \frac{b_1}{z-z_0} & z \neq z_0 \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k & z = z_0 \end{cases}$$

Also ist $h \in \mathcal{O}(D)$ und (5.7) gilt.
$(iii) \Rightarrow (ii)$: Setze $n = m$ und

$$g(z) = b_m + b_{m-1}(z-z_0)^m + \ldots + b_1(z-z_0)^{m-1} + h(z)(z-z_0)^m$$

Dann ist $g(z_0) \neq 0$, da $b_m \neq 0$ und es gilt 5.6.
Zur Eindeutigkeit: Es reicht zu zeigen, dass m und g in Aussage (ii) eindeutig sind. Sei

$$\frac{g(z)}{(z-z_0)^n} = \frac{\tilde{g}(z)}{(z-z_0)^{\tilde{n}}} \ \forall z \in D \backslash \{z_0\}$$

mit $n, \tilde{n} \geq 1, g, \tilde{g} \in \mathcal{O}(D), g(z) \neq \tilde{g}(z)$. Ohne Einschränkung $\tilde{n} \leq n$. Daraus folgt

$$g(z) = \tilde{g}(z) \cdot (z-z_0)^{n-\tilde{n}} \ \forall z \in D \backslash \{z_0\}$$

und aus Stetigkeitsgründen folgt, da $g(z_0), \tilde{g}(z_0) \neq 0$, $n - \tilde{n} = 0$ und somit $g = \tilde{g}$. Dass $n = m = \nu$ ist, ist klar. $\square$

Satz 5.8 (Caserati-Weierstraß, Charakterisierung von wesentlichen Singularitäten)**:**
Für $f \in \mathcal{O}(D\backslash\{z_0\})$ sind äquivalent:

(i) *z_0 ist wesentliche Singularität von f.*

(ii) *Für jede Umgebung $U \subset D$ von z_0 liegt das Bild $f(U\backslash\{z_0\})$ dicht in $\mathbb{C}$.*

(iii) *Es existiert eine Folge $\{z_n\}$ in $U\backslash\{z_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, sodass die Bildfolge $\{f(z_n)\}$ einen Limes in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ hat. Dabei heißt ∞ Limes einer Folge $\{w_n\}$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} |w_n| = \infty$ gilt.*

Beweis:
$(i) \Rightarrow (ii)$: (indirekt) Angenommen es sei $U \subset D$ Umgebung von z_0 , sodass $f(U\backslash\{z_0\}) \subset \mathbb{C}$ nicht dicht in $\mathbb{C}$ ist, d.h. es existiert eine Kreisscheibe $K_r(a) \subset \mathbb{C}, r > 0$ mit $f(U\backslash\{z_0\}) \cap K_r(a) = \emptyset$, d.h. $|f(z) - a| \geq r \ \forall z \in U\backslash\{z_0\}$. Die Funktion $g(z) := (f(z) - a)^{-1}$ ist holomorph in $U\backslash\{z_0\}$ und dort durch $\frac{1}{r}$ beschränkt und z_0 ist eine hebbare Singularität von g nach Satz 3.45. Dann hat $f(z) = a + \frac{1}{g(z)}$ im Falle $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) \neq 0$ eine hebbare Singularität und im Falle $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = 0$ eine Polstelle in z_0, also in beiden Fällen keine wesentliche Singularität.
$(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$: trivial. □

Holomorphe Funktionen mit Polen spielen eine dominante Rolle in der Funktionentheorie.

Definition 5.9:
Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$, G Gebiet, heißt in G meromorph, falls es eine diskrete Teilmenge $\mathcal{P}(f) \subset G$ gibt, sodass f in $G\backslash\mathcal{P}(f)$ holomorph ist und f in jedem Punkt von $\mathcal{P}(f)$ einen Pol hat. $\mathcal{P}(f)$ heißt Polstellenmenge von f und ist offensichtlich abgeschlossen. Falls $\mathcal{P}(f) = \emptyset$, so ist f holomorph, d.h. jede holomorphe Funktion ist auch meromorph.
Da $\mathcal{P}(f)$ diskret und abgeschlossen in G ist, folgt für die Punkte $f^{-1}(a)$ in Satz 4.7 für eine in D meromorphe Funktion, dass sie leer oder endlich oder abzählbar sind. Falls $\mathcal{P}(f) \neq \emptyset$, so ist f keine auf ganz G definierte Funktion, deshalb setzt man bequemerweise $f(z) = \infty$ für $z \in \mathcal{P}(f)$. Also sind meromorphe Funktionen spezielle Abbildungen $f : G \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Beispiel 5.10:

(i) Jede rationale Funktion

$$h(z) := \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n}, b_n, a_m \neq 0, m, n \in \mathbb{N}$$

ist meromorph in $\mathbb{C}$ mit endlicher Polstellenmenge $\mathcal{P}(h)$, welche in der Nullstellenmenge des Nenners liegt.

(ii) $\cot(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ ist meromorph in $\mathbb{C}$, aber nicht rational. $\mathcal{P}(\cot(\pi z)) = \mathbb{Z}$.

$f : D \to \mathbb{C}$ heißt meromorph in $z_0 \in D$, falls f in einer Umgebung von z_0 meromorph ist. Nach dem Entwicklungssatz 5.5 hat jedes solche $f \not\equiv 0$ um z_0 die Entwicklung

$$f(z) = \sum_{r=m}^{\infty} a_r (z - z_0)^r \tag{5.11}$$

mit eindeutig bestimmten Zahlen $a_r \in \mathbb{C}, a_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}$. Dann heißt

$$\sum_{r=m}^{-1} a_r (z - z_0)^r$$

der Hauptteil von f in z_0. Ist $m \geq 0$, so ist der Hauptteil 0.

Beispiel 5.12:
Da $\sin(\pi z) = (-1)^n \pi(z-n) + \ldots, \cos(\pi z) = (-1)^n + a(z-n)^2 + \ldots, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$. Also

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z-n} + \text{Potenzreihe in } (z-n)$$

Sei G ein Gebiet und $\mathcal{M}(G)$ bezeichne den Vektorraum der meromorphen Funktionen auf G. Dann gilt

Proposition 5.13:
Sei G Gebiet.

(*i*) *$\mathcal{M}(G)$ ist $\mathbb{C}$-Algebra und ein Körper.*

(*ii*) *Falls $f \in \mathcal{M}(G)$, so ist $f' \in \mathcal{M}(G)$ mit $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(f')$. Falls q Hauptteil von f, so ist q' Hauptteil von f'.*

Beweis:
(i): $\mathcal{M}(D)$ ist $\mathbb{C}$-Algebra und für $f, g \in \mathcal{M}(D)$ ist $\mathcal{P}(f \pm g) \subset \mathcal{P}(f) \cup \mathcal{P}(g)$. Zunächst □

Lemma 5.14:
Für $f \in \mathcal{M}(D)$ sind äquivalent:

(*i*) *e ist Einheit in $\mathcal{M}(D)$, d.h. $e\tilde{e} = 1$ für $\tilde{e} \in \mathcal{M}(D)$.*

(*ii*) *$\mathcal{N}(e) = \{z \in D : e(z) = 0\}$ ist diskret in D.*

Falls (i), so ist $\mathcal{P}(\tilde{e}) = \mathcal{N}(e), \mathcal{N}(\tilde{e}) = \mathcal{P}(e)$.

Beweis:
$(i) \Rightarrow (ii)$: Aus $e\tilde{e} = 1$ folgt $e(z_0) = 0 \Leftrightarrow \tilde{e}(z_0) = \infty$ und umgekehrt, also (ii) und $\mathcal{N}(e)$ ist diskret in D.
$(ii) \Rightarrow (i)$: $A := \mathcal{N}(e) \cup \mathcal{P}(e)$ ist diskret und abgeschlossen. In $D \backslash A$ ist $\tilde{e} = \frac{1}{e}$ holomorph. Jeder Punkt in $\mathcal{N}(e)$ ist Pol von $\tilde{e}$ (5.5) und jeder Punkt z_0 in $\mathcal{P}(e)$ ist wegen $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{1}{e(z)} = 0$. □

Beweis von 5.13(i)*:*
(i): Somit ist $\frac{f}{g}$ für $f, g \in \mathcal{M}(D)$ genau dann definiert, falls $\mathcal{N}(g)$ diskret in D ist und $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}(D)$.
Sei nun $f \in \mathcal{M}(D), f \not\equiv 0$. Zu zeigen ist $\frac{1}{f} \in \mathcal{M}(D)$.
Zunächst ist $f\,|_{D \backslash \mathcal{P}(f)}$ nicht die Nullfunktion in $\mathcal{O}(D \backslash \mathcal{P}(f))$. Da $G \backslash \mathcal{P}(f)$ wieder Gebiet ist, so ist $\mathcal{N}(f)$ diskret in D nach Identitätssatz 4.1. Nach Lemma 5.14 ist also $\frac{1}{f} \in \mathcal{M}(D)$.
(ii): Übung. □

Ist $f \not\equiv 0$ meromorph in $z_0 \in D$, so hat f nach Satz 5.5 die eindeutige Entwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

Die eindeutig bestimmte Zahl $m \in \mathbb{Z}$ heißt Ordnung von f und

$$o_{z_0}(f) := m$$

Ist f holomorph, so ist das die Nullstellenordnung in z_0.

Proposition 5.15:
Sei f meromorph in z_0. Dann gilt

(i) f *ist holomorph in* $z_0 \Leftrightarrow o_{z_0}(f) \geq 0$.

(ii) *Ist* $m := o_{z_0}(f) < 0$, *so ist* f *ein Pol der Ordnung* m.

(iii) *Sind* f, g *in* z_0 *meromorph, so gelten*

  i) $o_{z_0}(fg) = o_{z_0}(f) + o_{z_0}(g)$.

  ii) $o_{z_0}(f+g) \geq \min(o_{z_0}(f), o_{z_0}(g))$ *mit Gleichheit wenn* $o_{z_0}(f) \neq o_{z_0}(g)$.

Beweis:
Übung. □

Proposition 5.16:
Seien f, g im Gebiet G meromorph. Dann sind äquivalent:

(i) $f = g$

(ii) $\{\omega \in G \backslash (\mathcal{P}(f) \cup \mathcal{P}(g)) : f(\omega) = g(\omega)\}$ *hat einen Häufungspunkt im Gebiet* $G \backslash (\mathcal{P}(f) \cup \mathcal{P}(g))$

(iii) $\exists z_0 \in G \backslash (\mathcal{P}(f) \cup \mathcal{P}(g))$ *mit* $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$

Beweis:
$G \backslash (\mathcal{P}(f) \cup \mathcal{P}(g))$ ist wieder Gebiet und da f, g dann holomorph darin sind, folgt dies aus dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen 4.1. □

Seien $r, s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, 0 \leq r < s$ und

$$A_{r,s} := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < s\}$$

heißt Kreisring um z_0 mit innerem Radius r und äußerem Radius s. Es gilt

$$A_{r,s} = A^+ \cap A^-, A^+ := K_s(z_0), A^- := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$$

mit

$$A_{0,\infty}(0) = \mathbb{C} \backslash \{0\}, A_{0,s}(z_0) = K_s(z_0) \backslash \{z_0\}$$

Sei $S_r := \partial K_r(z_0)$.
Notation: $h : W \to \mathbb{C}$, $W \subset \mathbb{C}$ unbeschränkt. Dann $\lim\limits_{z \to \infty} h(z) = b \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$ zu jeder Umgebung V von b existiert ein $R > 0$, sodass $h(z) \in V$ für alle $z \in W$ mit $|z| > R$.

Satz 5.17:

(i) *Sei f holomorph im Kreisring $A_{r,s}(z_0)$. Dann gilt*

$$\int_{S_\rho} f(w)\, dw = \int_{S_\sigma} f(w)\, dw \;\forall r < \rho < \sigma < s$$

(ii) *Sei f holomorph in der offenen Menge D, $A := A^+ \cap A^-$ Kreisring um z_0 mit $\overline{A} \subset D$. Dann gilt*

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A^+} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A^-} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

für alle $z \in A$, wobei für ∂A^+ und ∂A^- verschiedene Orientierungen gewählt werden.

(iii) *Sei f holomorph in $A_{r,s}(z_0)$. Dann gibt es zwei Funktionen $f_+ \in \mathcal{O}(A^+)$ und $f_- \in \mathcal{O}(A^-)$ mit*

$$f = f_+ + f_- \text{ in } A$$

und

$$\lim_{z\to\infty} f_-(z) = 0$$

Dann sind $f_\pm$ eindeutig bestimmt. Für jedes $\rho \in (r,s)$ gilt

$$f_+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_\rho} \frac{f(w)}{w-z}\, dw, z \in K_\rho(z_0)$$

und

$$f_-(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{S_\rho} \frac{f(w)}{w-z}\, dw, z \in \mathbb{C}\setminus\overline{K_\rho(z_0)}$$

Beweis:

(i) Jede in A holomorphe Funktion f in A kann man schreiben als

$$f(z) = \frac{g(z)}{z}$$

mit g holomorph in A, wobei OE $z_0 = 0$ sei. Es reicht zu zeigen, dass für $g \in \mathcal{O}(A)$

$$I(t) = \int_{S_t} \frac{g(w)}{w}\, dw = i\int_0^{2\pi} g(te^{i\varphi})\, d\varphi$$

konstant ist für $t \in (r,s)$.
Vertauschbarkeit von Integral und Differentation liefert, dass $I(t)$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$I'(t) = i\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} g(te^{i\varphi})\, d\varphi = i\int_0^{2\pi} g'(te^{i\varphi})e^{i\varphi}\, d\varphi = t^{-1}\int_{S_t} g'(w)\, dw$$

für $t > 0$. Da g' die Stammfunktion g in A hat folgt $I'(t) \equiv 0$, d.h. $I(t)$ ist konstant wegen Proposition 3.29.

(ii) Sei $z \in A$ fest. Setze

$$g(w) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \in D\backslash\{z\} \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

g ist stetig in $D\backslash\{z\}$, d.h. $g \in \mathcal{O}(D)$ wegen Satz 3.45. Nach Teil i) gilt

$$\int_{\partial A^+} g\, dw = \int_{\partial A^-} g\, dw$$

d.h.

$$\int_{\partial A^-} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - f(z)\underbrace{\int_{\partial A^-}\frac{dw}{w-z}}_{=0} = \int_{\partial A^+}\frac{f(w)}{w-z}\, dw - f(z)\underbrace{\int_{\partial A^+}\frac{dw}{w-z}}_{2\pi i}$$

da $z \notin A^-, z \in A^+$, woraus die Behauptung mit Satz 3.21 folgt.

(iii) (a) *Existenz:*
$f_+^\sigma(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{S_\rho}\frac{f(w)}{w-z}\,dw, z\in K_\sigma(z_0)$ ist holomorph in $K_\rho(z_0)$. Für $\sigma\in(\rho,s)$ gilt

$$f_+^\sigma = f_+^\rho\,|_{K_\rho(z_0)}$$

nach Teil (i).
Also gibt es eine Funktion $f_+\in\mathcal{O}(A^+)$, die in $K_\rho(z_0)$ mit f_+^ρ übereinstimmt. Genauso ist

$$f_-(z) := f_-^\sigma(z) := -\frac{1}{2\pi i}\int_{S_\sigma}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

für $z\in A^-$ und für $r<\sigma<\min(s,|z-z_0|)$ holomorph in A.
Integrationsformel (ii) angewandt auf alle Kreisringe A' um z_0 mit $\overline{A'}\subset A$ liefert in A die Darstellung $f=f_++f_-$. Standardabschätzung 3.17 für $f_-(z)$ liefert

$$|f_-(z)|\le\frac{2\pi\sigma}{2\pi}\max_{w\in S_\sigma}\left|\frac{f(w)}{w-z}\right|\le\frac{\sigma}{|z-z_0|-\sigma}\,|f|_{S_\rho}$$

d.h. $\lim\limits_{z\to\infty}f_-(z)=0$.

(b) *Eindeutigkeit:*
Seien $g_+\in\mathcal{O}(A^+), g_-\in\mathcal{O}(A^-)$ weitere Funktionen mit $f=g_++g_-$ in A und

$$\lim_{z\to\infty}g(z)=0$$

Dann $f_+-g_+=g_--f_-$ auf A. Setze

$$h:=\begin{cases}f_+-g_+ & \text{auf } A^+\\ g_--f_- & \text{auf } A^-\end{cases}$$

h ist holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ mit

$$\lim_{z\to\infty}h(z)=0$$

d.h. h ist auf $\mathbb{C}$ beschränkt und ganz, d.h. $h\equiv c$ nach Satz 4.21 (Satz von Liouville) und $c=0$. Also gilt $f_+=g_+, f_-=g_-$.

Die Darstellung $f=f_++f_-$ heißt Laurent-Darstellung von f in A. Dabei heißt f_- Hauptteil und f_+ Nebenteil von f. Ist f meromorph in $D\backslash\{z_0\}$, so ist die Darstellung in 5.5 nichts anderes als die Laurent-Darstellung mit $r=0, K\subset D$ und verallgemeinert den dortigen Hauptteil

$$\sum_{\nu=m}^{-1}a_\nu(z-z_0)^\nu=f_-(z), m<0$$

□

Definition 5.18:
Reihen der Form

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}a_\nu(z-z_0)^\nu$$

heißen Laurent-Reihen um z_0, wobei

$$\sum_{\nu=-\infty}^{-1} a_v(z-z_0)^\nu \quad \text{(Hauptteil)}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_v(z-z_0)^\nu \quad \text{(Nebenteil)}$$

Satz 5.19 (Entwicklungssatz von Laurent)**:**
Jede im Kreisring $A = A_{r,s}(z_0)$ holomorphe Funktion ist in A eindeutig in eine Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu \tag{5.20}$$

entwickelbar, die in A normal gegen f konvergiert. Es gilt

$$a_v = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_\rho} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{\nu+1}}\, dw \tag{5.21}$$

für $r < \rho < s, \nu \in \mathbb{Z}$.

Beweis:
Sei $f = f_+ + f_-$ die Laurent-Darstellung von f in $A = A^+ \cap A^-$ nach Satz 5.17. Dann hat der Nebenteil $f_+ \in \mathcal{O}(A^+)$ nach Satz 3.43 die Taylor-Entwicklung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$$

Der Hauptteil $f_- \in \mathcal{O}(A^-)$ hat eine Reihenentwicklung in $A^- := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| > r\}$. Da $\psi : K_{r^{-1}}(0)\backslash\{0\} \to A^-, w \mapsto z := \psi(w) = z_0 + w^{-1}$ biholomorph mit Umkehrabbildung

$$z \mapsto w = \psi^{-1}(z) = (z-z_0)^{-1}$$

gilt

$$g(w) := f_-(z_0 + w^{-1}) \in \mathcal{O}(K_{r^{-1}}(0)\backslash\{0\})$$

Da $\lim\limits_{z\to\infty} f_-(z) = 0$ folgt $\lim\limits_{w\to 0} g(w) = 0$ und damit ist g nach dem Riemann'schen Fortsetzungssatz 3.45 holomorph in $K_{r^{-1}}(0)$ mit $g(0) = 0$. Somit gibt es eine Taylor-Entwicklung

$$g(w) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu w^\nu \in \mathcal{O}(K_{r^{-1}}(0)) \text{ wobei } b_0 = 0$$

die in $K_{r^{-1}}(0)$ normal konvergiert. Da $f_- = g((z-z_0)^{-1}), z \in A^-$ folgt die Darstellung

$$f_-(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu (z-z_0)^{-\nu}$$

und man erhält die Laurent-Reihe

$$f = f_+ + f_- = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu (z-z_0)^{-\nu} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu (z-z_0)^\nu$$

Eindeutigkeit folgt aus 5.21. Betrachte dazu

$$(z-z_0)^{-n-1}f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{-1} a_{\nu+n+1}(z-z_0)^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+n+1}(z-z_0)^\nu$$

Wegen der normalen Konvergenz ist dies gliedweise integrierbar über S_ρ, wobei das Integral nur bei dem Term mit $\nu = -1$ nicht verschwindet.

$$\int_{S_\rho} (w-z_0)^{-n-1} f(w)\, dw = a_n \int_{S_\rho} (w-z_0)^{-1}\, dw = 2\pi i a_n, n \in \mathbb{Z}$$

□

Beispiel:

(i) $\exp\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ ist holomorph außerhalb von $z = z_0$ und es gilt für $z \neq z_0$

$$\exp\left(\frac{1}{z-z_0}\right) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}(z-z_0)^{-\nu}$$

Dabei ist die Potenzreihe der Hauptteil der Laurent-Entwicklung.

(ii) Sei $A := A_{1,2}(0)$. Aus den Übungen wissen wir, dass

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{n!}$$

nur in $K_2(0)$ konvergiert und darüber hinaus nicht fortsetzbar ist. Mit

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n!}$$

hat g den Konvergenzkreis mit $\frac{1}{z} \in K_1(0)$. Also hat $f(z) + g(z)$ das Holomorphie-Gebiet $A_{1,2}(0)$.

(iii) Sei $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. f ist holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$. $z_0 \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Da $r := |z_0 - i| < |z_0 - (-i)| := s$ hat f in $A := A_{r,s}(z_0)$ eine Laurententwicklung. Für $z \in \mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$ gilt

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} + \frac{-1}{z+i}\right)$$

Setze

$$f_+(z) := \frac{-1}{2i}\frac{1}{z+i} \text{ und } f_-(z) = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}$$

Dann ist $f = f_+ |_A + f_- |_A$ die Laurent-Darstellung in A

$$f_+(z) = \frac{-1}{2i(i+z_0)}\frac{1}{1+\left(\frac{z-z_0}{i+z}\right)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2i}\frac{(-1)^{\nu+1}}{(z+z_0)^{\nu+1}}(z-z_0)^\nu$$

wobei $|z-z_0| < s$. Ferner gilt

$$f_-(z) = \frac{1}{2i(z-z_0)}\frac{1}{1-\left(\frac{i-z_0}{z-z_0}\right)} = \sum_{\nu=-\infty}^{-1} \frac{1}{2i}\frac{1}{(i-z_0)^{\nu+1}}(z-z_0)^{-\nu}$$

Folgerung 5.22:
Sei $z_0 \in D$, D offen, eine isolierte Singularität von $f \in \mathcal{O}(D \backslash \{z_0\})$ und $f(z) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} (z - z_0)^\nu$ Laurentreihe von f um z_0. Dann ist z_0

(i) *hebbare Singularität $\Leftrightarrow a_\nu \equiv 0$ für $\nu < 0$*

(ii) *Pol der Ordnung $m \geq 1 \Leftrightarrow a_\nu = 0$ für alle $\nu < -m$*

(iii) *wesentliche Singularität $\Leftrightarrow a_\nu \neq 0$ für unendlich viele $\nu < 0$*

Folgerung 5.23:
Ist z_0 eine isolierte Singularität von f, so ist der Hauptteil von f um z_0 holomorph in $\mathbb{C} \backslash \{z_0\}$.

Beweis:
Benutze Satz 5.19 mit $r = 0, s = \infty \Longrightarrow A^- = \mathbb{C} \backslash \{z_0\}$. □

6 Residuenkalkül

Verallgemeinerung der Cauchy-Integralformel:
Sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Spur}(\gamma)$. Bestimme, wie oft γ um z „herumläuft“.
Wir zeigen: Diese Umlaufzahl ist

$$\mathrm{ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w-z} \tag{6.1}$$

Nach Satz 3.21 gilt für jede Kreisscheibe $K \subset \mathbb{C}$

$$\mathrm{ind}_{\partial K}(z) = \begin{cases} 1 & z \in \mathring{K} \\ 0 & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K} \end{cases}$$

Hier werden alle Punkte der Kreisscheibe einmal im positiven Sinne von $\gamma = \partial K$ „umlaufen“.

Proposition 6.2:
Sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$. Dann gilt:

(*i*) *Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Spur}(\gamma)$ ist $\mathrm{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.*

(*ii*) $z \mapsto \mathrm{ind}_\gamma(z), z \notin \mathrm{Spur}(\gamma)$ *ist lokal konstant auf* $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Spur}(\gamma)$.

(*iii*) $\mathrm{ind}_{\gamma^{-1}}(z) = -\mathrm{ind}_\gamma(z)$.

(*iv*) $\mathrm{ind}_{\gamma\gamma'}(z) = \mathrm{ind}_\gamma(z) + \mathrm{ind}_{\gamma'}(z)$ *für geschlossene Wege γ, γ' mit einem gemeinsamen Punkt auf* $\mathrm{Spur}(\gamma) \cap \mathrm{Spur}(\gamma')$.

Beweis:

(*i*) Aus Anwendung 4.39 folgt für $f(w) := w - z$ holomorph und nullstellenfrei in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ und

$$\mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw \in \mathbb{Z}$$

(*ii*) Zeige, dass $z \mapsto \mathrm{ind}_\gamma(z)$ in $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Spur}(\gamma)$ stetig ist, da $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{z-w}$ als parameterabhängiges Integral stetig ist. Da $\mathrm{ind}_\gamma(z)$ stetig ist, aber nur Werte in $\mathbb{Z}$ annimmt, ist es lokalkonstant.

(iii), (iv) klar.

□

Definition 6.3:
Sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$. Setze

$$\mathrm{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Spur}(\gamma) : \mathrm{ind}_\gamma(z) \neq 0\}$$

und

$$\mathrm{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Spur}(\gamma) : \mathrm{ind}_\gamma(z) = 0\}$$

Dann ist

$$\mathbb{C} = \mathrm{Int}(\gamma) \cup \mathrm{Spur}(\gamma) \cup \mathrm{Ext}(\gamma) \tag{6.4}$$

Es gilt: $\mathrm{Int}(\gamma), \mathrm{Ext}(\gamma)$ sind offene Mengen in $\mathbb{C}$ und $\partial\,\mathrm{Int}(\gamma) \subset \mathrm{Spur}(\gamma)$ sowie $\partial\,\mathrm{Ext}(\gamma) \subset \mathrm{Spur}(\gamma)$, denn $\mathrm{ind}_\gamma(z)$ ist lokalkonstant.

Proposition 6.5:

(i) *Die Menge* $\operatorname{Int}(\gamma)$ *ist beschränkt.*

(ii) *Die Menge* $\operatorname{Ext}(\gamma)$ *ist nichtleer und unbeschränkt.*

Genauer: Falls $\operatorname{Spur}(\gamma) \subset K_r(z_0)$*, so ist* $\operatorname{Int}(\gamma) \subset K_r(z_0)$ *und* $\mathbb{C} \setminus K_r(z_0) \subset \operatorname{Ext}(\gamma)$*.*

Beweis:
Da $V := \mathbb{C} \setminus K_r(z_0) \neq \emptyset$ zusammenhängend ist, so ist $\operatorname{ind}_\gamma(z)$ konstant in V. Da

$$\lim_{z \to \infty} \int_\gamma \frac{dw}{w - z} = 0$$

so ist $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0$ für $z \in V$, d.h. $V \subset \operatorname{Ext}(\gamma)$. $\operatorname{Int}(\gamma) \subset K_r(z_0)$ folgt aus 6.4. $\square$

Definition 6.6:
Ein geschlossener Weg heißt einfach geschlossen, falls
$\operatorname{Int}(\gamma) \neq \emptyset$ und $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 1$ für alle $z \in \operatorname{Int}(\gamma)$.

Beispiel 6.7:

(i) Nach Formel 6.1 ist $\gamma = \partial K_r(z_0), r > 0$ einfach geschlossen.

(ii) Kreisabschnitts-, Dreiecks- und Rechtseckränder sind einfach geschlossen.

(iii) Rand eines Kreissektors ist einfach geschlossen, Rand eines n-Ecks ist einfach geschlossen.

Definition 6.8:
Ein geschlossener Weg γ mit $\operatorname{Spur}(\gamma) \subset D$, offen, heißt nullhomolog, wenn für jede holomorphe Funktion f in D gilt

$$\int_\gamma f(w)\, dw = 0$$

Beispiel:
Sei $D = K_2(0) \setminus \{0\}$. Es gilt: $\int_{\partial K} \frac{1}{w}\, dw \neq 0$, also ist D nicht nullhomolog.

Satz 6.9 (Verallgemeinerte Cauchy- und Integralsatz)**:**
Sei γ *nullhomolog in* D *offen, so gilt für* $f \in \mathcal{O}(D)$

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw \;\; \forall z \in D \setminus \operatorname{Spur}(\gamma) \tag{6.10}$$

Beweis:
Wie früher wähle $z_0 \in D$ fest. Dann definiere für alle $w \in D \setminus \operatorname{Spur}(\gamma)$

$$g(w) := \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0} \text{ sowie } g(z_0) := f'(z_0)$$

Also ist $g \in \mathcal{O}(D)$ nach Riemannschem Fortsetzungssatz 3.45. Aus
$\int_\gamma g(w)\, dw = 0$ folgt

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(w)\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z_0}\, dw - \frac{f(z_0)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z_0}$$

woraus wiederrum

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z_0}\ dw = f(z_0)\cdot \mathrm{ind}_\gamma(z_0)$$

folgt. Insbesondere gilt für einfach geschlossene Wege

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\ dw\ \forall z \in \mathrm{Int}(\gamma) \tag{6.11}$$

□

6.1 Der Residuensatz

Definition 6.12:
Sei f holomorph in $D\backslash\{z_0\}$ mit Laurententwicklung

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$$

in einem Kreis $K_r(z_0)\backslash\{z_0\}, K_r(z_0) \subset D$. Nach 5.19 gilt für jeden Kreis S mit $S \subset K_r(z_0)\backslash\{z_0\}$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_S f(w)\, dw$$

Das Residuum von f in z_0 ist a_{-1}.

Satz 6.13:
Das Residuum von $f \in \mathcal{O}(D\backslash\{z_0\}), D$ offen, in z_0 ist die eindeutig bestimmte komplexe Zahl a, dass

$$f(z) - \frac{a}{z-z_0}$$

in einer Kreisscheibe $K_r(z_0)\backslash\{z_0\}$ eine Stammfunktion besitzt.

Beweis:
Ist $f(z) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ die Laurentreihe von f in $K^* := K_r(z_0)\backslash\{z_0\}$, so ist

$$F(z) := \sum_{\nu\neq 1} \frac{1}{\nu+1} a_\nu (z-z_0)^{\nu+1} \in \mathcal{O}(K^*)$$

mit Ableitung $F' = f - a_{-1}(z-z_0)^{-1}$.
Eine holomorphe Funktion H in K^* ist genau dann Stammfunktion von $f - \frac{a}{z-z_0}$, wenn $(F-H)' = (a-a_{-1})\frac{1}{z-z_0}$. Da $\frac{1}{z-z_0}$ keine Stammfunktion um z_0 hat, gibt es solche Stammfunktionen $H = F + const$ genau dann, wenn $a = a_{-1}$.
Ist f holomorph in z_0, so gilt $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$, wobei $\operatorname{res}_{z_0}(f)$ das in Satz 6.13 eindeutig bestimmte Residuum von f sei. Ferner gilt

$$\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{1}{(z-z_0)^n}\right) = 0 \ \forall n \geq 2 \tag{6.13a}$$

und für $f \in \mathcal{O}(D\backslash\{z_0\})$ ist

$$\operatorname{res}_{z_0}(f') = 0 \tag{6.13b}$$

da

$$f'(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu a_\nu (z-z_0)^{\nu-1}$$

keinen Term $(z-z_0)^{-1}$ enthält. $\square$

Satz 6.14:
Seien g, h holomorph in $K_r(z_0)\backslash\{z_0\}$. Dann gilt für alle $a, b \in \mathbb{C}$

(i) $\operatorname{res}_{z_0}(ag+bh) = a\operatorname{res}_{z_0}(g) + b\operatorname{res}_{z_0}(h)$

(ii) *Ist z_0 ein einfacher Pol von g, dann ist* $\operatorname{res}_{z_0}(g) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) g(z)$.

(iii) *Gilt $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0, h'(z_0) \neq 0$, dann hat $f := \frac{g}{h}$ einen einfachen Pol in z_0 und es gilt* $\operatorname{res}_{z_0}(f) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

(iv) *Hat $g \in \mathcal{M}(D)$ in z_0 einen Pol höchstens m-ter Ordnung und ist $h(z)$ die holomorphe Fortsetzung von $(z - z_0)^m g(z)$ in z_0. Dann ist* $\operatorname{res}_{z_0}(g) = \frac{1}{(m-1)!} h^{(m-1)}(z_0)$.

Beweis:

(i) klar nach den Regeln des Wegintegrals.

(ii) klar, da $g = a_{-1}(z - z_0)^{-1} + f$, f holomorph um z_0.

(iii) Die Taylorentwicklung von h um z_0 ist

$$h(z) + h'(z - z_0) + \frac{1}{2} h''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots$$

Also

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z)}{h'(z)} \neq 0$$

Also ist z_0 Pol erster Ordnung von f mit Residuum $\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$ nach vorigem Teil.

(iv) Es gilt $g(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{b_1}{(z-z_0)} + f$, wo f holomorph um z_0 Dann ist $h(z) := b_m + b_{m-1}(z - z_0) + \dots + b_1(z - z_0)^{(m-1)}$ die Taylorreihe von h um z_0, sodass $\operatorname{res}_{z_0}(g) = b_1 = \frac{1}{(m-1)!} h^{(m-1)}(z_0)$

□

Satz 6.15:
Sei γ ein nullhomologer Weg in einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ und $A \subset D$ endliche Menge, sodass $A \cap \operatorname{Spur}(\gamma) = \emptyset$. Dann gilt für jede in $D \backslash A$ holomorphe Funktion f

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w)\, dw = \sum_{z_0 \in \operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{ind}_\gamma(z_0) \cdot \operatorname{res}_{z_0}(f) \tag{6.16}$$

Bemerkung:
Da $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$ für $z_0 \notin A$, so ist die Summe nur über $z_0 \in A \cap \operatorname{Int}(\gamma)$ zu erstrecken.

Beweis:
Sei $A = \{z_1, \dots, z_n\}$. Sei

$$f_\nu := b_\nu (z - z_\nu)^{-1} + \tilde{h}_\nu(z)$$

der Hauptteil der Laurent-Entwicklung von f um z_ν, wo $\tilde{h}$ die Summe aller Potenzen $(z - z_\nu)^k$ mit $k \leq -2$ ist. Nach Folgerung 5.23 ist f_ν holomorph in ganz $\mathbb{C} \backslash \{z_\nu\}$. Da nach Satz 6.13 $\tilde{h}_\nu$ in $\mathbb{C} \backslash \{z_\nu\}$ eine Stammfunktion hat, so folgt für $z_\nu \notin \operatorname{Spur}(\gamma)$ auf Grund der Definition des Index

$$\int_\gamma f_\nu(w)\, dw = b_\nu \int_\gamma \frac{dw}{w - z} = 2\pi i b_\nu \operatorname{ind}_\gamma(z_\nu), 1 \leq \nu \leq n \tag{*}$$

$f-(f_1+\ldots+f_n)$ ist holomorph in $D\backslash A$ und auch in D, da h in $z_1,\ldots,z_n$ stetig fortsetzbar ist (Übung).
Daher gilt

$$\int_\gamma (f-f_1-\ldots-f_n)(w)\ dw = 0$$

da γ nullholomlog ist. Wegen $(*)$ und $b_\nu = \mathrm{res}_{z_\nu}(f)$ folgt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)\ dw = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{n}\int_\gamma f_\nu(w)\ dw$$

Da $\mathrm{ind}_\gamma(z_\nu)=0$ für $z_\nu\in\mathrm{Ext}(\gamma)$ folgt die Behauptung. $\square$

Folgerung 6.17:
Sei $\mathrm{Spur}(\gamma)\subset D$ *einfach geschlossen und nullhomolog in* D *offen. Dann gilt mit Voraussetzung von 6.15*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)\ dw = \sum_{z\in\mathrm{Int}(\gamma)}\mathrm{res}_z(f)$$

Cauchy's Integralsatz ist eine Folgerung daraus, da $\mathrm{res}_{z_0}\frac{g(z)}{z-z_0}=g(z_0)$*, falls* $g\in\mathcal{O}(K_r(z_0))$*.*

Bemerkung:
$\mathrm{Spur}(\gamma)\subset D$ nullhomolog, f kann in $A\subset D$, $|A|<\infty, A\cap\mathrm{Spur}(\gamma)=\emptyset$ bliebige Singularitäten haben.

Proposition 6.18:

(*i*) *Seien* g,h *holomorph um* z_0 *und sei* z_0 *so, dass* $g(z_0)=a$ *und* $g(z)-a$ *eine* $\nu(g,z_0)$*-fache Nullstelle in* $z=z_0$ *hat. Dann gilt*

$$\mathrm{res}_{z_0}\left(h(z)\frac{g'(z)}{g(z)-a}\right) = h(z_0)\cdot\nu(g,z_0)$$

(*ii*) *Hat* g *in* z_0 *einen Pol und ist* h *holomorph in* z_0*, so gilt mit* h *und der Ordnung* $o_{z_0}(g)$ *des Pols*

$$\mathrm{res}_{z_0}\left(h(z)\cdot\frac{g'(z)}{g(z)-a}\right) = h(z_0)o_{z_0}(g)$$

(*iii*) *Sei* $g:\hat{D}\to D$, $\hat{D},D$ *offen,* $\tau\mapsto z:=g(\tau)$ *holomorph mit* $g(\tau_0)=z_0, g'(\tau_0)\neq 0$*. Dann gilt für alle* $f\in\mathcal{O}(D\backslash\{z_0\})$

$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = \mathrm{res}_{\tau_0}(f\circ g\cdot g')$$

Beweis:

(*i*) Mit $n:=\nu(g,z_0)$ gilt $g(z)=a+(z-z_0)^n\hat{g}(z)$, wobei um $z_0\hat{g}$ holomorph ist und $\hat{g}(z_0)\neq 0$. Es folgt

$$\frac{g'(z)}{g(z)-a} = \frac{n(z-z_0)^{n-1}\hat{g}(z)+(z-z_0)^n\hat{g}'(z)}{(z-z_0)^n\hat{g}(z)} = \frac{n}{(z-z_0)}+h(z)$$

wobei $h(z)$ holomorph.

(*ii*) analog (Übung).

(*iii*) Sei $a := \operatorname{res}_{z_0}(f)$. Nach Satz 6.13 gibt es in einer z_0-punktierten Umgebung V^* von z_0 ein $F \in \mathcal{O}(V^*)$ mit $F'(z) = f(z) - \frac{a}{z-z_0}$. In der τ_0-punktierten Umgebung $g^{-1}(V^*)$ von τ_0 gilt

$$(F \circ g)'(\tau) = F'(g(\tau)) \cdot g'(\tau) = f(g(\tau))g'(\tau) - \frac{g'(\tau)}{g(\tau) - z_0}$$

Da Ableitungen wie F', g' Residuum 0 haben gilt

$$0 = \operatorname{res}_{\tau_0}((F \circ g)') = \operatorname{res}_{\tau_0}(f(g(\tau))g'(\tau)) - a \cdot \operatorname{res}_{\tau_0} \frac{g'(\tau)}{g(\tau) - \tau_0}$$

Da g in τ_0 wegen $g'(\tau_0) \neq 0$ eine z_0-Stelle der Ordnung 1 hat, folgt die Behauptung aus Teil (i).

□

Anwendung 6.19:
Aus i) – ii) folgt mit $h \equiv 1$: Hat g in z_0 eine Nullstelle der Ordnung $\nu(g, z_0) < \infty$, so gilt $\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{g'}{g}\right) = \nu(g, z_0)$ bzw. wenn g in z_0 eine Polstelle der Ordnung $|o(z_0)| < \infty$ hat , so gilt $\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{g'}{g}\right) = o_{z_0}(g)$.

Satz 6.20:
Sei f meromorph in $D \subset \mathbb{C}$ offen mit höchstens endlich vielen Polen, γ ein nullhomologer Weg in D, sodass auf $\operatorname{Spur}(\gamma)$ keine Pole von f liegen.
Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $f^{-1}(a)$ endlich und $f^{-1}(a) \cap \operatorname{Spur}(\gamma) = \emptyset$. Dann gilt für jede in D holomorphe Funktion F

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(w) \frac{f'(w)}{f(w) - a}\, dw = \sum_{z \in f^{-1}(a)} \operatorname{ind}_\gamma \nu(f, z) F(z) + \sum_{z \in \mathcal{P}(f)} \operatorname{ind}_\gamma(z) o_z(f) F(z)$$

Die Summen sind endlich, da nur über a-Stellen und Polstellen in $\operatorname{Int}(\gamma)$ summiert wird.

Beweis:
Nach Residuensatz 6.15 gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(w) \frac{f'(w)}{f(w) - a}\, dw = \sum_{z \in D} \operatorname{ind}_\gamma(z) \operatorname{res}_z \left(F(w) \frac{f'(w)}{w - a}\right)$$

$F(w)\frac{f'(w)}{f(w)-a}$ hat höchstens in $\mathcal{P}(f)$ oder in $f^{-1}(a)$ Residuum $\neq 0$. Ist f holomorph in $z_0 \in D$ und hat f eine a-Stelle der Vielfachheit $\nu(f, z_0)$ in z_0, so gilt nach 6.18

$$\operatorname{res}_{z_0}\left(F(w) \frac{f'(w)}{f(w) - a}\right) = F(z_0)\nu(f, z_0)$$

Ist z_0 ein Pol von f, so gilt nach 6.18(i)

$$\operatorname{res}_{z_0}\left(F(w) \frac{f'(w)}{f(w) - a}\right) = o_{z_0}(f) F(z_0)$$

Hieraus folgt die Behauptung, da $\mathcal{P}(f) \cap f^{-1}(a) = \emptyset$. □

Folgerung 6.21:
Sei f meromorph in $D \subset \mathbb{C}$ offen und sei $M \subset D$ sowie $\mathcal{P}(f), f^{-1}(a)$ endlich. Seien

$$N_f(a, M) := \sum_{z \in f^{-1}(a) \cap M} \nu(f, z)$$

die gewichteten a-Stellen von f in M und

$$P_f(\infty, M) := \sum_{z \in \mathcal{P}(f) \cap M} |o_z(f)|$$

die gewichtete Polstellenmenge.
Dann gilt unter der Voraussetzung von Satz 6.20 für γ einfach geschlossen und nullhomolog in D

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w) - a}\, dw = N_f(a, \mathrm{Int}(\gamma)) - N_f(\infty, \mathrm{Int}(\gamma))$$

Folgerung 6.22 (Rouché)**:**
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f, g \in \mathcal{O}(D)$ mit
$N_f(0, D), N_g(0, D) < \infty$. Falls

$$|f(w) - g(w)| < |g(w)| \tag{6.23}$$

für alle $w \in \mathrm{Spur}(\gamma)$, so gilt $N_f(0, \mathrm{Int}(\gamma)) = N_g(0, \mathrm{Int}(\gamma))$.

Beweis:
Sei $h := \frac{f}{g}$. h ist in D meromorph. Wegen 6.23 gibt es eine Umgebung $U \subset D$ von $\mathrm{Spur}(\gamma)$, sodass h in U holomorph ist und $|h(z) - 1| < 1$ für $z \in U$, d.h. $h(U) \subset K_1(1) \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Damit ist $\log(h)$ wohldefiniert in U und ist dort Stammfunktion von $\frac{h'}{h}$. Da

$$\frac{h'}{h} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$$

wegen $\log(h) = \log(f) - \log(g)$ und f und g sind wegen 6.23 nullstellenfrei auf $\mathrm{Spur}(\gamma)$, so folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h'}{h}\, dw = 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(w)}{g(w)}\, dw$$

Aus Folgerung 6.21 folgt die Behauptung. $\square$

Satz 6.24 (Satz von Hurwitz)**:**
Sei $f_n : G \to \mathbb{C}$, G Gebiet, eine Folge holomorpher Funktionen, welche kompakt gegen f konvergiert. Dann ist $f \in \mathcal{O}(G)$. Sei $f \not\equiv 0$. Dann sind äquivalent:

(i) f hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung m

(ii) Es gibt eine Umgebung $V \subset G$ von z_0 und ein n_ν, sodass in jeder Kreisscheibe $K_r(z_0) \subset V$ alle $f_n, n \geq n_\nu$ genau m Nullstellen gerechnet mit Vielfachheit besitzt.

Beweis:
Da $f \not\equiv 0$ liegen die Nullstellen von f isoliert (Identitätssatz 4.1). Es gibt also eine kompakte Umgebung $V \subset G$ von z_0, wo $f\,|_V$ höchstens in z_0 verschwindet. Für jede Kreisscheibe $K := K_r(z_0)$ gilt $\varepsilon_K := \min_{w \in \partial K} |f(w)| > 0$. Wähle n_K so groß, dass $|f_n - f|_{\partial K} < \varepsilon_K$ für alle $n \geq n_k$. Dann gilt $|f_n(w) - f(w)| < |f(w)|$ für alle $w \in \partial K$, also 6.23.
Die Äquivalenz $(i) \Leftrightarrow (ii)$ folgt aus dem Satz von Rouché angewandt auf f statt g und f_n statt f. $\square$

Bemerkung 6.25:

(i) Hurwitz gilt natürlich auch für a-Stellen

(ii) Für den Fall $m = 0$ für den Limes f besagt Hurwitz Nullstellenfreiheit um $f_n|_V, n \geq n_V$.

Folgerung 6.26:
Sei $f_n \to f$ kompakt, $f_n \in \mathcal{O}(G)$, G Gebiet und $f_n : G \to \mathbb{C}$ sei injektiv für alle n. Dann ist $f \in \mathcal{O}(G)$ entweder konstant oder injektiv.

Beweis:
Sei f nicht konstant und $z_0 \in G$. Dann ist $f_n - f_n(z_0)$ Nullstellenfrei im Gebiet $G\backslash\{z_0\}$, da f_n injektiv ist. Wegen Bemerkung 6.23 (ii) ist dann $f - f(z_0)$ nullstellenfrei in $G\backslash\{z_0\}$, d.h. $f(z) \neq f(z_0)$ $\forall z \in G\backslash\{z_0\}$. Da z_0 beliebig ist, ist f injektiv. □

Anwendung: Reelle Integralauswertungen

Lemma 6.27:
Sei $f : D \to \mathbb{C}, D \subset \mathbb{C}$ offen, holomorph bis auf endlich viele Punkte A mit $A \cap \mathbb{R} = \emptyset$, wobei $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0\}$. Sei $\overline{\mathbb{H}} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ und $\overline{\mathbb{H}} \subset D$. Falls

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$$

im Riemann'schen Sinne als uneigentliches Integral existiert und

$$\lim_{z\to\infty} f(z) \cdot z \ = 0$$

ist, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 2\pi i \sum_{w\in\overline{\mathbb{H}}} \mathrm{res}_w(f) \tag{6.28}$$

Beweis:
Für hinreichend große $r > 0$ liegen alle Singularitäten von f in $K_r(0)$. Sei $\Gamma(r) : [0, \pi] \to \overline{\mathbb{H}}, \varphi \mapsto re^{i\varphi}$ der Halbkreis mit Radius r um 0.
Der Residuensatz besagt

$$\int_{-r}^{r} f(x)\ dx + \int_{\Gamma(r)} f(w)\ dw = 2\pi i \sum_{w\in\mathbb{H}} \mathrm{res}_w(f) \tag{*}$$

Die Standardabschätzung für Integrale 3.17 liefert

$$\left|\int_{\Gamma(r)} f(w)\ dw\right| \leq \pi r\, |f|_{\Gamma(r)}$$

Wegen $zf(z) \to 0$ für $z \to \infty$ nach Voraussetzung folgt $\lim_{r\to\infty} r\,|f|_{\Gamma(r)} = 0$. Also folgt 6.28 aus $(*)$. □

7 Homotopie und Riemann'scher Abbildungssatz

Wir suchen Bedingungen an γ, sodass $\int_\gamma f(w)\,dw = 0$ für alle holomorphen Funktionen f in D ist. Die Bedingung ist, dass γ **in D stetig** in eine Kurve $\overline{\gamma}$ deformiert werden kann mit $\overline{\gamma} \equiv z_0$.

Definition 7.1:
Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to G, G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, zwei geschlossene stückweise differenzierbare Wege. Dann heißt γ_0 homotop zu γ_1 in G, falls es eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to G$ gibt mit

$$H(s,0) = \gamma_0(s), H(s,1) = \gamma_1(s), 0 \leq s \leq 1 \tag{7.2}$$
$$H(0,t) = H(1,t), 0 \leq t \leq 1$$

Man schreibt $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

Proposition 7.3:
Die Relation $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis:

(a) $\gamma_0 \sim \gamma_0$ klar, $H(s,t) \equiv \gamma_0(s)$

(b) $\gamma_0 \sim \gamma_1$ mit H, dann $\gamma_1 \sim \gamma_0$ mit $\tilde{H}(s,t) = H(s, 1-t)$.

(c) $\gamma_0 \sim \gamma_1, \gamma_1 \sim \gamma_2$ mit (7.2) mittels zwei Homotopien H_{01}, H_{12}.
Definiere

$$H_{02}(s,t) = \begin{cases} H_{01}(s,2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_{12}(s,2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Dann ist $\gamma_0 \sim \gamma_2$.

$\square$

Sei ε_{z_0} der konstante Weg $\gamma \equiv z_0$.

Proposition 7.4:
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig, γ geschlossener Weg in D. Dann gilt $\gamma \sim \varepsilon_{z_0}$, wobei z_0 ein Zentrum von D ist.

Beweis:
Setze

$$H(s,t) := (1-t) \cdot \gamma(s) + t \cdot z_0$$

H ist stetig und $H([0,1]^2) \subset D$ und H erfüllt die Bedingung 7.2. $\square$

Definition 7.5:
Ein geschlossener Weg γ in D heißt homotop zu Null ($\gamma \sim 0$), wenn es ein $z_0 \in D$ gibt mit $\gamma \sim \varepsilon_{z_0}$.

Satz 7.6 (Homotopie-Invarianz des Cauchy-Integrals)**:**
Seien γ_0, γ_1 zwei geschlossene, stückweise differenzierbare Wege in $D \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma_0 \sim \gamma_1$ in D. Dann gilt für jede in D holomorphe Funktion f

$$\int_{\gamma_0} f(w)\,dw = \int_{\gamma_1} f(w)\,dw$$

Folgerung 7.7:

(a) *Sei $f : D \to \mathbb{C}$, D offen, holomorph, γ geschlossen und nullhomotop in D. Dann*

$$\int_\gamma f(w)\ dw = 0$$

(b) *Also ist nach Definition 6.8 γ auch nullhomolog. Die Umkehrung gilt nicht. Es existieren Wege γ, die nullhomolog, aber nicht hullhomotop sind (siehe Remmert, Funktionentheorie II, S. 148-149).*

Beweis von Satz 7.6*:*
Sei $H : [0,1]^2 \to D$ eine Homotopie. Da H stetig und $[0,1]^2$ kompakt, ist H gleichmäßig stetig und $H\left(I^2\right) \subset D$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist

$$r := \inf\left\{|z-w| : z \in H(I^2), w \in D^C\right\} > 0$$

Also gibt es eine natürliche Zahl n, sodass für alle $(s,t), (s',t') \in [0,1]^2$ mit

$$(s-s')^2 + (t-t')^2 < \frac{4}{n^2} \Rightarrow |H(s,t) - H(s',t')| < r$$

Setze $z_{(j,k)} := H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right), 0 \leq j,k \leq n$ und

$$I_{(j,k)} = \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], 0 \leq j,k \leq n-1$$

Der Durchmesser von $I_{(j,k)} \leq \frac{\sqrt{2}}{n} \Rightarrow H\left(I_{(j,k)}\right) \subset K_r\left(z_{(j,k)}\right) \subset D$.
Sei $P_{(j,k)}$ das Polygon durch $\left[z_{(j,k)}, z_{(j+1,k)}, z_{(j+1,k+1)}, z_{(j,k+1)}, z_{(j,k)}\right]$. Da $K_r\left(z_{(j,k)}\right)$ konvex ist folgt $P_{(j,k)} \subset K_r\left(z_{(j,k)}\right)$.
Es gilt

$$\int_{P_{(j,k)}} f(w)\ dw = 0 \qquad (ii)$$

Hiermit zeigen wir nun $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$ mit einer Leiterkonstruktion, „von Sprosse zu Sprosse“.
Die k-te Sprosse sei

$$Q_k = \left[z_{(0,k)}, z_{(1,k)}, \ldots, z_{(n,k)}\right] \text{ wobei } z_{(0,k)} = z_{(n,k)}$$

Wir zeigen nun:

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{Q_0} f = \int_{Q_1} f = \ldots = \int_{Q_n} f = \int_{\gamma_1} f$$

Dazu sei

$$\sigma_j(t) := \gamma_0(t), \frac{j}{n} \leq t \leq \frac{j+1}{n}$$

Dann ist $\sigma_j[z_{(j+1,0)}, z_{(j,0)}]$ eine geschlossene stückweise differenzierbare Kurve in der Scheibe $K_r\left(z_{(j,0)}\right)$. Daher gilt

$$0 = \int_{\sigma_j} f + \int_{\left[z_{(j+1,0)}, z_{(j,0)}\right]} f \Leftrightarrow \int_{\sigma_j} f = \int_{\left[z_{(j,0)}, z_{(j+1,0)}\right]} f$$

Summation über $j = 0, \dots, n-1$ liefert

$$\int_{\gamma_0} f = \sum_j \int_{\sigma_j} f = \int_{Q_0} f$$

Aus (ii) folgt nun

$$0 = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{P_{(j,k)}} f \tag{iii}$$

Da in $\int_{P_{(j,k)}} f$ der Summand $\int_{[z_{j+1,k}, z_{j+1,k+1}]} f$ auftaucht, wird dieser durch $\int_{[z_{j+1,k+1}, z_{j+1,k}]} f$ aufgehoben, der in $\int_{P_{(j+1,k)}} f$ auftaucht. Weiter gilt wegen der Geschlossenheit der Polygone

$$z_{(0,k)} = H\left(0, \frac{k}{n}\right) = H\left(1, \frac{k}{n}\right) = z_{(1,k)} \tag{iv}$$

sodass $\left[z_{(0,k+1)}, z_{(0,k)}\right] = \left[z_{(1,k)}, z_{(1,k+1)}\right]^{-1}$.
Somit folgt aus $(ii) - (iv)$ wegen der Orientierung der Sprossen

$$0 = \int_{Q_k} f - \int_{Q_{k+1}} f$$

für $k = 1, \dots, n-1$, woraus die Behauptung folgt. □

Folgerung 7.8:
Falls γ geschlossener Weg in G offen, mit $\gamma \sim 0$ (nullhomotop). Dann ist $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0$ für alle $z \notin G$.

Beweis:
Die Funktion $f(w) := \frac{1}{w-z}, w \in G, z \notin G$ ist holomorph in G, woraus sich die Behauptung mittels Folgerung 7.7 ergibt. □

Definition 7.9:
Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to G$ zwei Wege in G offen, sodass

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a, \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$$

Dann heißt γ_0 homotop zu γ_1 mit fixierten Endpunkten, falls es eine stetige Abbildung $H : [0,1]^2 \to G$ gibt mit

$$H(s,0) = \gamma_0(s), H(s,1) = \gamma_1(s), H(0,t) = a, H(1,t) = b \ \forall t \in [0,1] \tag{7.10}$$

Hieraus folgt sofort:

Satz 7.11 (Wegunabhängigkeit)**:**
Seien γ_0, γ_1 zwei Wege in G offen von a nach b, die homotop mit fixierten Endpunkten sind. Dann gilt für $f \in \mathcal{O}(G)$

$$\int_{\gamma_0} f(w)\, dw = \int_{\gamma_1} f(w)\, dw$$

Beweis:
Falls γ_0 homotop zu γ_1 mit a, b fixiert, so ist $\gamma_0\gamma_1^{-1}$ geschlossen. Aus 7.10 folgt mit der Abbildung

$$\gamma(s) = \begin{cases} \gamma_0(3s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{3} \\ b & \frac{1}{3} \leq s \leq \frac{2}{3} \\ \gamma_1(3-3s) & \frac{2}{3} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

dass $\gamma \sim 0$ mit

$$\Lambda(s,t) := \begin{cases} H(3s(1-t), t) & 0 \leq s \leq \frac{1}{3} \\ H(1-t, 3s-1+2t-3st)) & \frac{1}{3} \leq s \leq \frac{2}{3} \\ \gamma_1((3-3s)(1-t)) & \frac{2}{3} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Also folgt aus Folgerung 7.7

$$0 = \int_\gamma f = \int_{\gamma_0} f - \int_{\gamma_1} f + \underbrace{\int_b f}_{=0}$$

□

Definition 7.12:
Eine offene Menge $G \subset \mathbb{C}$ heißt einfach zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist und jede geschlossene Kurve in G nullhomolog ist.

Folgerung 7.13:
Sei G einfach zusammenhängend und $f \in \mathcal{O}(G)$. Dann gilt

(*i*) *Für jeden geschlossenen Weg γ in G gilt $\int_\gamma f(w)\, dw = 0$.*

(*ii*) *f ist integrabel in G.*

(*iii*) *Falls $f(z) \neq 0\ \forall z \in G$, so gibt es ein $g : G \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \exp(g(z))$. Falls $z_0 \in G$ mit $\exp(w_0) = f(z_0)$, kann man $g(z_0) = w_0$ wählen.*

Beweis:
i): klar.
ii): Aus 7.11 gilt $F(z) = \int_\gamma f(w)\, dw$, F ist wohldefiniert für beliebige Wege γ von z_0 nach z in G. Dann ist $F'(z) = f(z), z \in G$, wie in Satz 3.34.
iii): Wie 4.34. □

7.1 Familien von holomorphen Funktionen

Definition 7.14:

(*i*) Eine Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D)$ heißt beschränkt in $A \subset D$, wenn es ein $M > 0$ gibt mit

$$|f|_A \leq M \ \forall f \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{z \in A} |f(z)| \leq M$$

(*ii*) $\mathcal{F}$ heißt lokal beschränkt in D, falls es zu jedem $z \in D$ eine Umgebung $U_z \subset D$ gibt, sodass $\mathcal{F}$ in U_z beschränkt.

Bedingung (*ii*) ist äquivalent dazu, dass $\mathcal{F}$ auf jeder kompakten Menge $K \subset D$ beschränkt ist. Beschränkte Familien sind lokal beschränkt, aber die Umkehrung gilt nicht. Betrachte

$$\mathcal{F} = \{n \cdot z^n \in \mathcal{O}(K_1(0)), n \in \mathbb{N}\}$$

Eine Folge (f_n) heißt beschränkt, wenn die Familie $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

Satz 7.15 (Satz von Montel für Folgen)**:**
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, (f_n) lokal beschränkt, $f_n \in \mathcal{O}(D)$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n'})$ von (f_n), die in D kompakt konvergiert. Dieser Satz gilt nicht für reell-analytische Funktionen.

Satz 7.16:
Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D)$ eine lokal beschränkte Familie. Dann gibt es zu jedem Punkt $z_0 \in D$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Kreisscheibe $K \subset D$ um z_0 mit

$$|f(v) - f(z)| \leq \varepsilon \ \forall f \in \mathcal{F}, \forall v, z \in K$$

Beweis:
Wähle $r > 0$ so klein, dass $K_{2r}(z_0) \subset D$. Setze $\tilde{K} = K_r(z_0), K' = K_{2r}(z_0)$. Die Cauchy'sche Integralformel liefert $\forall v, z \in \tilde{K}$

$$\begin{aligned} f(v) - f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K'} f(w) \ \left[\frac{1}{w - v} - \frac{1}{w - z}\right] \ dw \\ &= \frac{v - z}{2\pi i} \int_{\partial K'} \frac{f(w)}{(w - v)(w - z)} \ dw \end{aligned}$$

Aus der Standardabschätzung erhalten wir

$$|f(v) - f(z)| \leq \frac{|v - z|}{2\pi i} \frac{2}{r} |f|_{K'}$$

da $|w - v| \, |w - z| \geq r^2$. Da $\mathcal{F}$ lokal beschränkt ist, so ist für hinreichend kleines $2r > 0$

$$0 < M := \frac{2}{r} \sup\{|f|_K : f \in \mathcal{F}\} < \infty$$

Setze $K := B_\delta(z_0)$ mit $\delta := \min\left\{\frac{\varepsilon}{2M}, r\right\}$.
Also folgt $\mathcal{F}$ lokal beschränkt $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ lokal gleichgradig stetig. $\square$

Beweis von 7.15:
Wähle in D eine abzählbare dichte Teilmenge A. Wir verwenden das Cantor'sche Diagonalverfahren. Zu jedem $l \in \mathbb{N}$ gibt es eine Teilfolge $f_{l_0}, f_{l_1}, \ldots$ von (f_n) mit

(a) $(f_{l_n})_n$ konvergiert in a_l.

(b) $(f_{l_n})_n$ ist eine Teilfolge von $(f_{(l-1)_n})_n$.

Teil (a) folgt aus Bolzano-Weierstraß, da $(f_n(a))_n$ und insbesondere $(f_{(l-1)_n})$ beschränkt in $\mathbb{C}$ ist.
Per Induktion: Sei $(f_{k_n})_n\ \forall k < l$ schon konstruiert. Dann wähle nach $(a), (b)$ eine Teilfolge, die in a_l konvergiert, d.h. $(a), (b)$ gelte für alle Folgen $(f_{k_n})_n, k \leq l$.
Bilde $(g_n)_n$ mittels $g_n := A_{n_n}$ (Diagonalfolge). g_n konvergiert in allen Punkten von A.
Zu zeigen bleibt: $(g_n)_n$ konvergiert kompakt in D. Dies ist äquivalent zur lokal gleichmäßigen Konvergenz in D nach Satz 4.24v). Sei dazu $z_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$. Nach 7.16 gibt es eine Kreisscheibe $K \subset D$ um z_0, sodass

$$|g_n(v) - g_n(z)| \leq \varepsilon\ \forall v, z \in K, \forall n \in \mathbb{N} \tag{$*$}$$

Da A dicht in D liegt, gibt es ein $a \in A\ \cap\ K$. Aus $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(a) =: g^*(a)$ folgt mit $(*)$, dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|g_n(z_0) - g^*(a)| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$$

Mit der Dreiecks-Ungleichung folgt

$$|g_n(z_0) - g_m(z_0)| \leq |g_n(z_0) - g^*(a)| + |g^*(a) - g_m(z_0)| < 4\varepsilon\ \forall m, n \geq n_0$$

also ist $(g_n(z_0))_n$ eine Cauchy-Folge mit Limes $g^*(z_0) \in \mathbb{C}$. Weiterhin folgt aus $(*)$

$$\begin{aligned} |g_n(v) - g_m(v)| &\leq |g_n(v) - g_n(z_0) - (g_m(v) - g_m(z_0)) + (g_n(z_0) - g_m(z_0))| \\ &< 6\varepsilon \end{aligned} \tag{$**$}$$

für alle $m, n \geq n_0, v \in K$. Da $(g_n(v)), v \in D$ gegen $g^*(v) \in \mathbb{C}$ konvergiert, folgt schließlich mit $\lim\limits_{n\to\infty} g_m(v) = g^*(v)$. Aus $(**)$ folgt

$$|g_n(v) - g^*(v)| < 6\varepsilon\ \forall v \in K, n \geq n_0$$

d.h. die lokal gleichmäßige Konvergenz von $(g_n) \subset (f_n)$ gegen g^*. $\square$

Folgerung 7.17 (Montel-Kriterium)**:**
Sei $(f_n) \in \mathcal{O}(D)$ lokal beschränkt. Es gilt $f_n \to f \in \mathcal{O}(D)$ kompakt in D, wenn jede in D kompakt konvergente Teilfolge von (f_n) gegen f konvergiert.

Beweis:
Falls (f_n) nicht gegen f kompakt konvergiert, so gibt es ein $K \subset D$ kompakt und eine Teilfolge $(f_{n'}) \subset (f_n)$ mit

$$|f_{n'} - f|_K \geq \varepsilon\ \forall n'$$

für ein $\varepsilon > 0$. Da $(f_{n'})$ auch lokal beschränkt ist, gäbe es nach 7.15 eine kompakt konvergente Teilfolge $(f_{n''}) \subset (f_{n'})$. Da

$$|f_{n''} - f|_K \geq \varepsilon$$

so ist f nicht Limes von $(f_{n''})$. $\square$

Folgerung 7.18 (Vitali)**:**
Sei G Gebiet, $(f_n) \in \mathcal{O}(G)$ lokal beschränkt auf G. Die Konvergenzmenge

$$A := \{z \in G : \lim_{n\to\infty} f_n(z) \text{ existiert in } \mathbb{C}\}$$

habe mindestens einen Häufungspunkt in G. Dann konvergiert (f_n) kompakt in G.

Beweis:
Wegen 7.17 ist zu zeigen: alle kompakt konvergenten Teilfolgen von (f_n) haben den gleichen Limes. Dies folgt aus dem Identitätssatz 4.1, da alle Limiten auf A übereinstimmen, d.h. überall auf G bzw. einer kompakten Menge in G gleich sind. □

Definition 7.19:
Eine Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D)$ heißt normal in D, falls jede Folge aus $\mathcal{F}$ eine Teilfolge besitzt, die in D kompakt konvergiert.

Satz 7.20 (Satz von Montel)**:**
Es gilt: $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(D)$ normal $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ ist in D lokal beschränkt.

Beweis:
" $\Rightarrow$ " : zu zeigen ist, dass für alle $K \in D$ kompakt ist $\sup\{|f|_K : f \in \mathcal{F}\} < \infty$. Falls dies nicht gilt, so existiert ein $L \subset D$ kompakt und $(f_n) \subset \mathcal{F}$ mit $\lim_{n\to\infty} |f_n|_L = \infty$. Diese Folge hätte keine in D kompakt konvergente Teilfolge, denn für deren Limes $f \in \mathcal{O}(D)$ wäre

$$|f|_L \geq \underbrace{|f_{n'}|_L}_{\to\infty} - \underbrace{|f - f_{n'}|_L}_{\to 0}$$

" $\Leftarrow$ " : folgt aus 7.15. □

Bemerkung:
Man vergleiche $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig in D $:\Leftrightarrow \forall z_0 \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall f \in \mathcal{F}$ gilt

$$|f(v) - f(z_0)| < \varepsilon\ \forall v \in D$$

mit

Satz 7.21 (Satz von Arzela-Ascoli)**:**
Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von stetigen Funktionen $D \to \mathbb{C}$. Dann ist $\mathcal{F}$ normal wenn

(i) $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig

(ii) für alle $v \in D$ ist $\{f(v) : f \in \mathcal{F}\}$ beschränkt.

7.2 Der Riemann'sche Abbildungssatz

Die (offene) Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} := K_1(0)$ ist das Modell eines einfach zusammenhängenden Gebiets. Wir wollen die Klasse der einfach zusammenhängenden G studieren, sodass es für solche G eine biholomorphe Abbildung $\varphi : G \to \mathbb{E}$ gibt.
Damit lassen sich Integral und Potenzreihen von $\mathbb{E}$ nach G transportieren. Nach Liouville kann G nicht ganz $\mathbb{C}$ sein (da sonst φ konstant).
Da Biholomorphie von φ auch Homöomorphie impliziert lassen sich Homotopien von $\mathbb{E}$ nach G transportieren, d.h. auch G ist einfach zusammenhängend. Dabei muss G nicht beschränkt sein, denn betrachte

$$\mathbb{H} \to \mathbb{E} \text{ sowie } \mathbb{C}^- \to \mathbb{E}$$

mit entsprechenden biholomorphen Funktionen (z.B. die Cayley-Abbildung aus §2).

Satz 7.22:
Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \neq \mathbb{C}$ ist biholomorph auf die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ abbildbar.
Selbst die topologische Version ist beeindruckend mit homöomorph statt biholomorph. Die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{E}, \varphi(z) = \frac{z}{\sqrt{1+|z|}}$$

ist homöomorph, aber nicht biholomorph. Also sind zwei beliebige einfach zusammenhängende Gebiete des $\mathbb{R}^2$ topologisch invariant.

Beweis in mehreren Schritten:
1) topologische Eigenschaft von $G \longrightarrow$ alg. Eigenschaften von $\mathcal{O}(G)$.

□

Lemma 7.23:
Ist G einfach zusammenhängend, so hat jede Einheit $g \in \mathcal{O}(G)$ eine Quadratwurzel $h \in \mathcal{O}(G)$, d.h. $g = h^2$ in G.

Beweis:
Sei g eine Einheit. Da $\frac{1}{g} \in \mathcal{O}(G)$, folgt dass g keine Nullstellen in G hat, d.h. einen Logarithmus $\varphi \in \mathcal{O}(G)$ besitzt, also gilt $g(z) = \exp(\varphi(z))$.
Wähle $h(z) = \exp\left(\frac{\varphi(z)}{2}\right) \Rightarrow g(z) = h(z)^2$ und $h \in \mathcal{O}(G)$. □

Proposition 7.24:
Ist $\psi : G \to \hat{G}$ (wobei $G, \hat{G} \subset \mathbb{C}$ Gebiete) biholomorph, so hat mit G auch $\hat{G}$ die (Q)-Eigenschaft, dass jede Einheit in $\mathcal{O}(G)$ eine Q-Wurzel in G hat.

Beweis:
Sei $\hat{f} \in \mathcal{O}(\hat{G})$ Einheit, so ist $f = \hat{f} \circ \psi$ eine Einheit in $\mathcal{O}(G)$. Also ist

$$f = h^2 = \hat{f} \circ \psi$$

für ein $h \in \mathcal{O}(G)$ und $\hat{f} = (h \circ \psi^{-1})^2 =: \hat{h}^2, \hat{h} \in \mathcal{O}(\hat{G})$. □

Wir nennen solche Gebiete Q-Gebiete.

Satz 7.25:
Jedes Q-Gebiet $G \subsetneq \mathbb{C}$ ist biholomorph auf $\mathbb{E}$ abbildbar.

2. Schritt: Holomorphe Injektionen

Lemma 7.26:
Zu jedem Q-Gebiet $G \subsetneq \mathbb{C}$ gibt es eine holomorphe Injektion

$$f : G \to \mathbb{E} \text{ mit } f(0) = 0$$

Beweis:
Sei $a \in \mathbb{C} \setminus G$. Dann ist $z - a$ Einheit in $\mathcal{O}(G) \overset{(7.23)}{\Longrightarrow} \exists \nu \in \mathcal{O}(G)$ mit $\nu(z)^2 = z - a$. Behauptung: $\nu : G \to \mathbb{C}$ ist injektiv. Es gilt

$$\nu(G) \cap (-\nu)(G) = \emptyset \tag{$*$}$$

denn angenommen es gäbe Punkte $b, b' \in G$ mit $\nu(b) = -\nu(b') \Leftrightarrow \nu(b)^2 = \nu(b')^2$. Dann gilt

$$b - a \overset{def}{=} \nu(b)^2 = \nu(b')^2 = b' - a \Longrightarrow b = b' \Rightarrow \nu(b) = -\nu(b') = \nu(b) \Longrightarrow \nu(b) = 0$$

Also ist $b = a$, d.h. Widerspruch zu $a \notin G$.
Aus der Gebietstreue 4.30 folgt $(-\nu)(G) \neq \emptyset$ (weil ν offen). Also gibt es wegen $(*)$ eine Kreisscheibe $K := K_r(z_0)$ um $z_0 \in (-\nu)(G)$ mit $\nu(G) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{K}$.
Da $\mathbb{C} \setminus \overline{K}$ durch

$$g : \mathbb{C} \setminus \overline{K} \to \mathbb{E} \text{ mit } g(z) = \frac{r}{2} \left(\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{\nu(0) - z_0} \right)$$

injektiv in $\mathbb{E}$ abgebildet wird (da g biholomorph) so leistet $f = g \circ \nu$ das Gewünschte, denn nach Wahl des shifts

$$\frac{r}{2} \cdot \frac{1}{\nu(0) - z_0}$$

ist $f(0) = g(\nu(0)) = 0$ und beide Summanden sind vom Betrag $< \frac{1}{2}$. □

Bemerkung:
Falls $\mathbb{C} \setminus G$ innere Punkte hat, z.B. z_0, führt

$$z \mapsto \frac{z}{z - z_0}$$

sofort zum Ziel. Nur Gebiete wie z.B. $\mathbb{C}^-$ machen Probleme, aber hier hilft Koebes Quadratwurzeltrick.

3. Schritt: Dehnungen.

Definition 7.27:
Sei $G \subset \mathbb{E}$ Gebiet mit $0 \in G$. Jede holomorphe Injektion

$$\kappa : G \to \mathbb{E} \text{ mit } \kappa(0) = 0 \text{ und } |\kappa(z)| > |z| \ \ \forall z \in G \setminus \{0\}$$

heißt echte Dehnung von G in $\mathbb{E}$ bezüglich der 0 (Umkehrabbildung zu Kontraktion).

Sei $j : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ Quadratabbildung. Ferner sei mit $z_0 \in \mathbb{E}$

$$g_{z_0}(z) := \frac{z - z_0}{\overline{z_0} z - 1}$$

Aus Beispiel 2.12 sieht man, dass $g_{z_0}(z)$ eine biholomorphe Abbildung ist mit

1) $g_{z_0}(0) = z_0$ und $g_{z_0}(z_0) = 0$.

2) $g_{z_0} \circ g_{z_0} = id_z$.

Nach 4.32 (Schwarz-Lemma) gilt

3) $|g_{z_0}(z)| \leq |z| \ \forall z \in \mathbb{E}$

Proposition 7.28:
Sei j die Quadratabbildung. Die Abbildung

$$\psi_{z_0} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}, z \mapsto g_{z_0^2} \circ j \circ g_{z_0}$$

erfüllt

$$\psi_{z_0}(0) = 0 \ \textit{sowie} \ |\psi_{z_0}(z)| < |z| \ \forall z \in \mathbb{E} \backslash \{0\} \tag{7.29}$$

d.h. ψ ist eine echte Kontraktion.

Beweis:
Ausrechnen.
$\psi_{z_0}(z) = z \cdot \frac{z-b}{\bar{b}z-1}$ mit $b = \psi'_{z_0}(0) = \frac{2z_0}{1+|z_0|^2} \in \mathbb{E}$.
(7.29) folgt aus 3), da

$$|g_{z_0}(z)| \leq |z|, \left|g_{z_0^2}(z)\right| \leq |z| \ \text{ und } \ |j(z)| \leq |z|$$

für alle $z \in \mathbb{E} \backslash \{0\}$. □

Lemma 7.30 (Quadratwurzelverfahren)**:**
Sei $G \subset \mathbb{E}$ Q-Gebiet und $z_0 \in \mathbb{E}$ mit $z_0^2 \notin G$. Sei $w \in \mathcal{O}(G)$ die Quadratwurzel von $g_{z_0^2}|_G \in \mathcal{O}$ mit $\nu(0) = z_0$.
Dann ist die Abbildung

$$\kappa : G \to \mathbb{E}, z \mapsto g_{z_0}(\nu(z))$$

eine Dehnung von G. Es gilt

$$\psi_{z_0} \circ \kappa = \mathrm{Id}_G \tag{7.31}$$

Beweis:
Da $g_{z_0^2}$ nullstellenfrei in G ist sowie $g_{z_0^2}(0) = z_0^2$, so ist ν und wegen $\nu(G) \subset \mathbb{E}$ auch κ wohldefiniert.
Es gilt $\kappa(G) \subset \mathbb{E}$ und $\kappa(0) = g_{z_0}(\nu(0)) = g_{z_0}(z_0) = 0$.
Wegen $g_{z_0} \circ g_{z_0} = id_{\mathbb{E}}$ und $j \circ \nu = g_{z_0^2}$ folgt

$$\psi_{z_0} \circ \kappa = g_{z_0^2} \circ j \circ g_{z_0} \circ g_{z_0} \circ \nu = g_{z_0^2} \circ g_{z_0^2} = \mathrm{Id}_G$$

Somit ist $\kappa : G \to \mathbb{E}$ injektiv und wegen Formel 7.29 gilt

$$|z| = |\psi_{z_0}(\kappa(z))| < |\kappa(z)| \ \forall z \in G \text{ mit } \kappa(z) \neq 0, \forall z \in G \backslash \{0\}$$

Wegen $\psi_{z_0} \circ \kappa = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ folgt insbesondere

$$\kappa'(0) = \frac{1 + |z_0|^2}{2z_0}$$

□

4. Schritt: Existenzbeweis mittels Extremalprinzip
Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein Q-Gebiet. Dann ist die Familie

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{O}(G) : f(G) \subset \mathbb{E}, f(0) = 0, f \text{ injektiv}\}$$

nach Satz 7.25 nicht leer. Nach Satz 4.42 bildet jedes $f \in \mathcal{F}$ G biholomorph auf $f(G) \subset \mathbb{E}$ ab. Die $f \in \mathcal{F}$ mit $f(G) = \mathbb{E}$ lassen sich wie folgt charakterisieren.

Satz 7.32:
Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein Q-Gebiet, $z_0 \in G$ fest. Dann gilt $h(G) = \mathbb{E}$ für jede Funktion $h \in \mathcal{F}$ mit

$$|h(z_0)| = \sup\{|f(z_0)| : f \in \mathcal{F}\} \tag{$*$}$$

Beweis:
Wegen Proposition 7.24 ist mit G auch $h(G)$ ein Q-Gebiet. Wäre $h(G) \neq \mathbb{E}$, so existierte nach Lemma 7.30 eine Dehnung

$$\kappa : h(G) \to \mathbb{E}$$

Es gilt $g = \kappa \circ h \in \mathcal{F}$. Da $h(z_0) \neq 0$ wegen der Injektivität von h, so folgt

$$|g(z_0)| = |\kappa(h(z_0))| > |h(z_0)|$$

Widerspruch. □

Beweis vom Riemann'schen Abbildungssatz:
Sei $z_0 \in G \backslash \{0\}$. Da $\mathcal{F}$ nicht leer ist gilt

$$m := \sup\{|f(z_0)| : f \in \mathcal{F}\} > 0$$

Wähle eine Folge $(f_i)_i \subset \mathcal{F}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(z_0)| = m$.
Da $\mathcal{F}$ beschränkt ist, gibt es nach Montel 7.20 eine Teilfolge $(h_j) \subset (f_n)$, die in G kompakt konvergiert gegen ein $h \in \mathcal{O}(G)$.
Es gilt $h(0) = 0$ und $|h(z_0)| = m$. Da h wegen $h > 0$ nicht konstant ist, folgt nach Hurwitz 6.24, dass $h : G \to \mathbb{E}$ injektiv ist. Somit ist $h \in \mathcal{F}$. Nach Satz 7.32 ist damit $h(G) = \mathbb{E}$ und h biholomorph. □

Satz 7.33 (Eindeutigkeit)**:**
Seien $h, \hat{h}$ biholomorphe Abbildungen eines Gebietes G auf die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$, sodass es einen Punkt $a \in G$ gibt mit $h(a) = \hat{h}(a)$ und $\frac{h'(a)}{\hat{h}'(a)} > 0$ (reell). Dann gilt $h = \hat{h}$.

Beweis:
Sei $b := h(a)$. Falls $b = 0$, so folgt dass $f := h \circ \hat{h}^{-1}$ ein biholomorpher Automorphismus von $\mathbb{E}$ ist mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = \frac{h'(a)}{\hat{h}'(a)} > 0$.
Nach dem Schwarz-Lemma 4.32 für f und f^{-1} gilt

$$|f(z)| \leq |z|\,, |z| = \left|f^{-1}(f(z))\right| \leq |f(z)| \;\; \forall z \in \mathbb{E}$$

d.h.

$$|f(z)| = |z| \Leftrightarrow \left|\frac{f(z)}{z}\right| = 1 \;\forall z \neq 0$$

d.h. nach Schwarz gilt $f(z) = a \cdot z$ mit $|a| = 1$, woraus wegen $f'(0) > 0$ $a = 1$ folgt und damit $f = \mathrm{Id}$.
Falls $b \neq 0$ setze $g := -g_b, h_1 := g \circ h, \hat{h}_1 = g \circ \hat{h}$. Dann wende obiges Argument an, da $h_1(a) = \hat{h}_1(a) = 0$ und $\frac{h_1'(a)}{\hat{h_1}'(a)} = \frac{-g_b'(b)h'(a)}{-g_b'(b)\hat{h}'(a)} > 0$ woraus aus dem ersten Teil folgt

$$h_1 = \hat{h}_1 \Rightarrow h = \hat{h}$$

$\square$

Satz 7.34:
Ist $G \neq \mathbb{E}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $G \neq \mathbb{C}$, so existiert zu jedem Punkt $a \in G$ genau eine holomorphe Abbildung $h : G \to \mathbb{E}$ mit

$$h(a) = 0, h'(a) > 0$$

Beweis:
Nach 7.33 reicht es die Existenz zu zeigen. Nach dem Riemann'schen Abbildungssatz gibt es ein $h_1 : G \to \mathbb{E}$ biholomorph. Für $h_2 := g_{z_0} \circ h_1$ mit $z_0 = h_1(a)$ folgt $h_2(a) = 0$.
Für $h := \exp(i\varphi)h_2$ mit $\exp(i\varphi) = \frac{|h_2'(a)|}{h_2'(a)}$ gilt $h(a) = 0$ und $h'(a) > 0$. $\square$

Satz 7.35:
[Äquivalenz zu einfach zusammenhängend] Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(*i*) *Jeder geschlossene Weg in G ist nullhomolog.*

(*ii*) *Jede in G holomorphe Funktion ist in G integrabel.*

(*iii*) *Für alle $f \in \mathcal{O}(G)$ und geschlossene Wege γ in G gilt*

$$\mathrm{ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw, z \in G \setminus \mathrm{Spur}(\gamma)$$

(*iv*) *Das Innere $\mathrm{Int}(\gamma)$ eines jeden geschlossenen Weges γ in G liegt in G.*

(*v*) *Jede Einheit in $\mathcal{O}(G)$ besitzt einen Logarithmus in G.*

(*vi*) *Jede Einheit in $\mathcal{O}(G)$ besitzt eine Quadratwurzel in G.*

(*vii*) *Es gilt $G = \mathbb{C}$ oder G ist biholomorph auf $\mathbb{E}$ abbildbar.*

(*viii*) *G ist homöomorph zu $\mathbb{E}$.*

(*ix*) *G ist einfach zusammenhängend.*

8 Unendliche Produkte

Ziel sind Formeln wie z.B. $\sin(\pi z) = \pi z \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right)$.

Definition 8.1:

(*i*) Sei $(a_\nu)_{\nu \geq k}, k \in \mathbb{N}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann heißt die Folge

$$\left(\prod_{\nu=k}^{n} a_\nu\right)_{n \geq k}$$

der Partialprodukte ein unendliches Produkt mit Faktoren a_ν.

(*ii*) $p_{k,n} := \prod\limits_{\nu=k}^{n} a_\nu$ heißt konvergent, wenn es einen Index $m \geq k$ gibt, sodass $\hat{a}_m := \lim\limits_{n\to\infty} p_{m,n}$ existiert und ungleich 0 ist.
Dann heißt

$$a := a_k a_{k+1} \cdots a_{m-1} \cdot \lim_{n\to\infty} p_{m,n}$$

der Wert des Produktes und man schreibt

$$\prod_{k}^{\infty} a_\nu := a_k a_{k+1} \ldots a_{m-1} \hat{a}_m$$

Diese Zahl ist unabhängig von m. Nicht konvergente Produkte heißen divergent.
Diese Definition verhindert die Festlegung, dass wenn z.B. $a_k = 0, a_{k+j} = k + j$ für alle $j \geq 1$ zu sagen

$$\prod_{\nu=k}^{\infty} a_\nu = \lim_{n\to\infty} 0 \cdot (k+1) \cdots (k+n) = ???$$

Ähnlich möchte man Konvergenz der Partialprodukte gegen 0 ausschließen um die Korrespondenz mit Reihen via

$$\prod_{\nu}^{n} a_\nu \longleftrightarrow \sum_{\nu}^{n} \log(a_\nu) \text{ für } a_\nu > 0$$

zu erhalten.

Folgerung 8.2:

(*i*) $\prod_\nu a_\nu$ *konvergiert* $\Longleftrightarrow$ *höchstens endlich viele Faktoren* a_ν *sind* 0 *und die von* $a_\nu \neq 0$ *gebildeten Partialprodukte haben Limes* $\neq 0$.

(*ii*) $\prod_\nu a_\nu$ *konvergiert* $= 0 \Longleftrightarrow$ *mindestens ein Faktor ist Null*

(*iii*) $\prod_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *konvergiert* $\Longrightarrow \hat{a}_n := \prod_{\nu=n}^{\infty} a_\nu$ *existiert für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\lim_{n\to\infty} \hat{a}_n = 1 = \lim_{n\to\infty} a_n$

(*iv*) $a_\nu \in \mathbb{R}, a_\nu \geq 0$ *mit* $\sum_{\nu=0}^{\infty}(1 - a_\nu) = \infty$. *Dann*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=0}^{n} a_\nu = 0$$

Beweis:
Übung. Beachte, dass
$$\prod_{\nu=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)$$
divergiert. $\square$

Definition 8.3:
Sei $(f_\nu)_\nu$ eine Folge von Funktionen $f_\nu : G \to \mathbb{C}$ auf $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f_\nu \in \mathcal{C}(G)$, dann heißt
$$\prod_\nu f_\nu$$
kompakt konvergent in G, falls es zu jeder kompakten Menge $K \subset G$ einen Index $m = m(k)$ gibt, sodass
$$p_{m,n} := f_m f_{m+1} \cdots f_n, n \geq m$$
in K gleichmäßig gegen eine in K nullstellenfreie Funktion $\hat{f}_m$ konvergiert.
Für jeden Punkt $z \in G$ existiert dann
$$f : G \to \mathbb{C} \text{ definiert durch } f(z) := \prod_\nu f_\nu(z) \in \mathbb{C}$$
und wir nennen f den Limes des Produktes und schreiben
$$f = \prod_\nu f_\nu$$
Auf $K \subset G$ gilt dann
$$f\,|_K = (f_0\,|_K)(f_1\,|_K) \cdots (f_{m-1}\,|_K)\hat{f}_m$$

Folgerung 8.4:

(*i*) *Sind alle $f_\nu : G \to \mathbb{C}$ stetig und konvergiert $\prod f_\nu$ in G kompakt gegen f, so ist f stetig und f_ν konvergieren kompakt gegen 1.*

(*ii*) *Mit $\prod f_\nu, \prod g_\nu$ sind auch $\prod(f_\nu g_\nu)$ kompakt konvergent.*

(*iii*) *Jedes in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ kompakt konvergente Produkt $\prod f_\nu, f_\nu \in \mathcal{O}(G)$ hat in G einen holomorphen Limes $f \in \mathcal{O}(G)$.*

Beweis:

(*i*) klar.

(*ii*) klar.

(*iii*) Weierstraß'scher Konvergenzsatz 4.25.

$\square$

Für die Anwendung mit Umordnung der Faktoren braucht man „absolute Konvergenz" aller Teilprodukte. Hierzu dient der Begriff der normalen Konvergenz auf einer kompakten Teilmenge $K \subset G$. Im Folgenden schreiben wir, da $f_\nu \to 1, \nu \to \infty$ im Konvergenzfall
$$f_\nu = 1 + g_\nu, \nu \in \mathbb{N}_0$$
sodass $g_\nu \to 0$ für $\nu \to \infty$.

Definition 8.5:
Ein Produkt $\prod_\nu f_\nu, f_\nu = 1 + g_\nu \in \mathcal{C}(G), G \subset \mathbb{C}$ offen, heißt normal konvergent, wenn die Reihe

$$\sum_\nu g_\nu = \sum_\nu f_\nu - 1$$

in G normal konvergiert.

Folgerung 8.6:
Sei $\prod_\nu f_\nu$ normal konvergent.

(i) *Für jede Bijektion $\tau : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ konvergiert*

$$\prod_\nu f_{\tau(\nu)}$$

(ii) $\prod\limits_{j\geq 0} f_{\nu_j}$ *konvergiert normal in G für jede Teilfolge (ν_j) von (ν).*

(iii) $\prod\limits_\nu f_\nu$ *konvergiert kompakt*

(iv) *Es gibt eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$, sodass für jede Bijektion $\tau : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$*

$$\prod_{\nu\geq 0} f_{\tau(\nu)}$$

in G kompakt gegen f konvergiert.

Beweis:

$i) - iii)$ Aus den Aussagen für Reihen.

$iv)$ Für $w \in \mathbb{E}$ gilt

$$\log(1+w) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \cdot w^\nu$$

und daher

$$|\log(1+w)| \leq |w| \underbrace{(1 + |w| + |w|^2 + \ldots)}_{=\frac{1}{1-|w|}} \leq 2\,|w| \ \text{ falls } \ |w| \leq \frac{1}{2}$$

Sei $K \subset G$ kompakt und $g_n := f_n - 1$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \geq m$ gilt:

$$|g_n|_K \leq \frac{1}{2} \text{ sodass } \log(f_n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} g_n^\nu \in \mathcal{C}(K)$$

mit

$$|\log(f_n)|_K \leq 2\,|g_n|_K$$

Somit gilt

$$\sum_{\nu\geq m} |\log(f_\nu)| \leq 2 \sum_{\nu\geq m} |g_n|_K < \infty$$

Nach dem Umordnungssatz für Reihen konvergiert daher für jede Bijektion $\sigma : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_m$ die Reihe
$$\sum_{\nu \geq m} \log(f_{\sigma(\nu)})$$
in K gleichmäßig gegen
$$\sum_{\nu \geq m} \log(f_\nu)$$
Daher konvergieren
$$\exp\left(\sum_{\nu \geq m} \log(f_{\sigma_\nu})\right) = \prod_{\nu \geq m} f_{\sigma_\nu} \text{ und } \exp\left(\sum_{\nu \geq m} \log(f_\nu)\right) = \prod_{\nu \geq m} f_\nu$$
gleichmäßig gegen die gleiche Funktion in K. Benutze, dass $\exp(z)$ nullstellenfrei ist.
Da sich eine beliebige Bijektion $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nur an endlich vielen Stellen von einer Bijektion $\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\sigma'(\mathbb{N}_m) = \mathbb{N}_m$ unterscheidet folgt die Existenz von $f : G \to \mathbb{C}$, sodass
$$\prod_{\nu \geq 0} f_{\tau(\nu)}$$
in G kompakt konvergiert.

□

Folgerung 8.7:
Sei $f = \prod_{\nu \geq 0} f_\nu$ normal konvergent in $G \subset \mathbb{C}$ offen. Dann

(i) *$\hat{f}_n := \prod_{\nu \geq n} f_\nu$ konvergiert normal in G und*
$$f = f_0 \cdots f_{n-1} \hat{f}_n$$

(ii) *$\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ eine endliche oder unendliche Zerlegung von $\mathbb{N}$ mit $N_k \cap N_l = \emptyset, k \neq l$, so konvergiert*
$$\prod_{\nu \in N_k} f_\nu$$
normal in G und
$$f = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{\nu \in N_k} f_\nu \right)$$

Beispiel 8.8:

(i)
$$\begin{aligned} \prod_{\nu \geq 0} \left(1 + z^{2^\nu}\right) &= \sum_{\nu_1 \neq \nu_2 \neq \nu_3 \ldots} 1 \cdots 1 \cdot z^{2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \ldots + 2^{\nu_n}} \\ &= \sum_{b_\nu \in \{0,1,\ldots\}} z^{\sum_{\nu=0}^n b_\nu 2^\nu} = \frac{1}{1-z} \end{aligned}$$
für $|z| < 1$.

(ii)
$$\prod_{\nu \geq 1} \left((1 + z^\nu)(1 - z^{2\nu - 1})\right) = 1$$
konvergiert normal in $\mathbb{E}$. (Übung).

8.1 Nullstellen, Polstellen von Produkten

Sei G Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$. Die Nullstellenmenge $\mathcal{N}(f)$ ist diskret und abgeschlossen in G für $f \not\equiv 0$, d.h. höchstens abzählbar. Für endlich viele $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{O}(G)$, $f_\nu \not\equiv 0$ gilt

$$\mathcal{N}(f_0 \cdots f_n) = \bigcup_{\nu=0}^{n} \mathcal{N}(f_\nu)$$

und

$$o_{z_0}(f_0 \cdots f_n) = \sum_{\nu=0}^{n} o_{z_0}(f_\nu)$$

Satz 8.9:
Sei $f = \prod_\nu f_\nu, f_\nu \not\equiv 0$ in G normal konvergent mit $f_\nu \in \mathcal{O}(G)$, G Gebiet. Dann gilt für alle $z_0 \in G$

$$\begin{aligned} f &\in \mathcal{O}(G) \\ f &\not\equiv 0 \\ \mathcal{N}(f) &= \bigcup_\nu \mathcal{N}(f_\nu) \\ o_{z_0}(f) &= \sum_\nu o_{z_0}(f_\nu) \end{aligned}$$

Beweis:
Sei $z_0 \in G$ fest. Da $f(z_0) = \prod_\nu f_\nu(z_0)$ konvergiert, gibt es einen Index n_1, sodass $f_n(z_0) \neq 0 \; \forall n \geq n_1$. Nach Folgerung 8.7($i$) gilt

$$f = f_0 f_1 \cdots f_{n-1} \hat{f}_n \text{ wobei } \hat{f}_n = \prod_{\nu \geq n} f_\nu \in \mathcal{O}(G)$$

nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz 4.25.
Es folgt

$$o_{z_0}(f) = \sum_{\nu=0}^{n-1} o_{z_0}(f_\nu) + \underbrace{o_{z_0}(\hat{f}_n)}_{=0}$$

da $\hat{f}_n(z_0) \neq 0$. Hieraus folgt

$$\mathcal{N}(f) = \bigcup_\nu \mathcal{N}(f_\nu)$$

Da $f_\nu \not\equiv 0$, ist $\mathcal{N}(f_\nu)$ und damit auch $\mathcal{N}(f)$ abzählbar und diskret, d.h. $f \not\equiv 0$. □

Lemma 8.10:
Ist $\prod_\nu f_\nu, f_\nu \in \mathcal{O}(G)$ normal konvergent in G, so konvergiert

$$\hat{f}_n := \prod_{\nu \geq n} f_\nu \in \mathcal{O}(G)$$

kompakt gegen 1 in G.

Beweis:
Sei $\hat{f}_n \not\equiv 0$. Dann ist $A := \mathcal{N}(\hat{f}_n)$, diskret und abgeschlossen in G. Alle Partialprodukte $P_{m,n-1} := \prod_{\nu=m}^{n-1} f_\nu \in \mathcal{O}(G)$ sind für $n > m$ nullstellenfrei auf $G \backslash A$ und

$$\hat{f}_n = \frac{\hat{f}_m(z)}{P_{m,n-1}} \forall z \in G \backslash A$$

Nun konvergiert $\frac{1}{P_{n,m-1}}$ in $G \backslash A$ kompakt gegen $\frac{1}{\hat{f}}$. Nach dem verschärften Konvergenzsatz von Weierstraß (siehe unten) konvergiert diese Folge auf ganz G kompakt gegen 1. □

Lemma 8.11 (Verschärfter Satz von Weierstraß)**:**

(i) *Sei G ein beschränktes Gebiet, $f_n : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig, $f_n \in \mathcal{O}(G)$ und $\lim_n f_n \mid_{\partial G}$ konvergiere gleichmäßig auf ∂G.*
Dann gibt es eine stetige Funktion f auf $\overline{G}$ mit $f \in \mathcal{O}(G)$, sodass $\lim_\nu f_\nu = f$ gleichmäßig in $\overline{G}$ konvergiert.

(ii) *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $A \subset G$ diskret und abgeschlossen, $f_n \in \mathcal{O}(G)$, sodass mit $\lim_n f_n \mid_{G \backslash A}$ kompakt konvergent. Dann ist (f_n) in ganz G kompakt konvergent mit Limes $f \in \mathcal{O}(G)$.*

Beweis:

(i) Nach dem Maximumsprinzip 4.31 für beschränkte Gebiete gilt

$$|f_m - f|_{\overline{G}} = |f_m - f|_{\partial G}$$

$f_m \mid_{\partial G}$ ist eine Cauchyfolge bezüglich $|\cdot|_{\partial G}$, also auch bezüglich $|\cdot|_{\overline{G}}$.
Daher ist f_n gleichmäßig konvergent in der kompakten Menge $\overline{G}$ gegen eine Funktion $f \in \mathcal{C}(\overline{G})$.
Nach dem Weierstraß'schen Konvergenzsatz 4.25 ist zusätzlich $f \in \mathcal{O}(G)$ (da $f_n \in \mathcal{O}(G)$) und (f_n) konvergiert kompakt gegen f.

(ii) Da A diskret und abgeschlossen ist gibt es zu $z_0 \in A$ eine Kreisscheie $K_r(z_0) \subset G$ mit $K_r(z_0) \cap A = \{z_0\}$. Wende i) auf $G = K_r(z_0)$ an.

□

Definition 8.12:

(i) Eine Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$$

von meromorphen Funktionen f_ν auf $D \subset \mathbb{C}$, D offen, heißt kompakt konvergent in D, wenn es zu jeder kompakten Menge $K \subset D$ einen Index $m = m(k)$ gibt, sodass

- (a) Für jede Polstellenmenge $\mathcal{P}(f_\nu), \nu \geq m$ gilt $\mathcal{P}(f_\nu) \cap K = \emptyset$.
- (b) Die Reihe $\sum_{\nu=m}^{\infty} f_\nu \mid_K$ konvergiert gleichmäßig in K.

(ii) Die Reihe heißt normal konvergent in D, wenn a) gilt und statt b) gilt

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} |f_\nu|_K < \infty \qquad (b')$$

Satz 8.13:
Seien $f_\nu, g_\nu \in \mathcal{M}(D)$ und $\sum_\nu f_\nu, \sum_\nu g_\nu$ kompakt bzw. normal konvergent in D. Dann gilt:

(i) *Es gibt eine in D meromorphe Funktion f mit: Für $U \subset D$, U offen und m so groß, dass $\mathcal{P}(f_\nu) \cap U = \emptyset$ für alle $\nu \geq m$, konvergiert $\sum_{\nu \geq m} f_\nu |_U$ kompakt bzw. normal gegen eine Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ mit*

$$f |_U = f_0 |_U + \ldots + f_{m-1} |_U + F \text{ wobei } f \in \mathcal{O}\left(D \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(f_n)\right) \tag{8.14}$$

(ii) *$\sum_\nu (a \cdot f_\nu + b \cdot g_\nu)$ konvergiert wieder kompakt/normal in D.*

(iii) *Konvergiert $\sum_\nu f_\nu$ normal gegen f, so gilt dies auch für die umgeordnete Reihe $\sum_\nu f_{\tau(\nu)}$ für eine Bijektion $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

(iv) *Durchläuft h_ν alle Produkte $f_\nu g_\nu$ genau einmal, so konvergiert $\sum_\nu h_\nu$ normal in D gegen $f \cdot g$, wo $f = \sum_\nu f_\nu, g = \sum_\nu g_\nu$. Insbesondere gilt dies für die Cauchy-Produkte*

$$P_\lambda = \sum_{\substack{\mu+\nu=\lambda \\ \mu,\nu \geq 0}} f_\mu g_\nu \in \mathcal{M}(D) \Longrightarrow \sum_{\lambda \geq 0} P_\lambda = f \cdot g$$

(v) *Für jedes $k \geq 1$ konvergiert*

$$\sum_\nu f_\nu^{(k)}$$

in D kompakt bzw. normal gegen $f^{(k)}$.

Beweis:
Übung. □

Beispiel 8.15:
Da die beiden Reihen $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^k}, k > 1$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n-\nu)}$ für $\nu \notin \mathbb{N}$ konvergieren und es für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}$ ein $r > 0$ mit $K \subset K_r(0)$ gibt, folgt die Konvergenz von

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z+\nu} - \frac{1}{\nu} \text{ und } \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu}\right) \tag{8.16}$$

und für $k \geq 2$ sind die Reihen

$$(i) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(z-\nu)^2} \text{ sowie } (ii) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(z+\nu)^k}$$

normal konvergent in $\mathbb{C}$.
<u>Konvention:</u>

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_\nu := \sum_{\nu=-\infty}^{-1} f_\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$$

wo die linke Seite konvergiert, wenn die beiden rechten Seiten kompakt oder normal konvergieren. Setze

$$\sum_\nu{}' := \sum_{\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$$

Dann ist

$$\sum_{\nu}{}' \left(\frac{1}{z+\nu} - \frac{1}{\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-\nu^2}$$

(fasse ν und $-\nu$ Terme zusammen für $\nu \geq 1$).
Aus der Summe der ersten Beiden in 8.16 folgt, dass

$$\mathcal{E}_1(z) := \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} \frac{1}{z+\nu} = \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-\nu^2}$$

als Reihe meromorphre Funktionen in $\mathbb{C}$ normal konvergiert.

Satz 8.17:
Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$

$$\pi\cot(\pi z) = \mathcal{E}_1(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-\nu^2} = \frac{1}{z} + \sum_{\nu}{}' \left(\frac{1}{z+\nu} - \frac{1}{v}\right) \tag{8.18}$$

Beweis:
Zunächst: $\pi\cot(\pi z)$ ist in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ holomorph mit Polen erster Ordnung in $m \in \mathbb{Z}$ und Hauptteil $\frac{1}{z-m}$ und $\pi\cot(\pi z)$ ist ungerade. Ferner gilt

$$2\pi\cot(2\pi z) = \pi\cot(\pi z) + \pi\cot\left(\pi z + \frac{\pi}{2}\right) \tag{8.19}$$

Verdoppelungsformel. Dies charakteriesiert den Cotangens. □

Lemma 8.20:
Sei $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})$. g habe in $m \in \mathbb{Z}$ Hauptteil $\frac{1}{z-m}$ und es gelte $g(-z) = -g(z)$ sowie $2g(2z) = g(z) + g(z+\frac{1}{2})$ $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Dann ist

$$g(z) = \pi\cot(\pi z)$$

Beweis:
Setze $h(z) := g(z) - \pi\cot(\pi z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})$. Beobachte, dass $h(0) = 0$, da $g(0) = \pi\cot(\pi z) = 0$ und

$$2h(2z) = h(z) + h\left(z + \frac{1}{2}\right) \tag{$*$}$$

Falls $h \not\equiv 0$ so gibt es nach dem Maximumsprinzip ein $z_0 \in \partial K_2(0)$ mit

$$|h(z)| < |h(z_0)| \text{ für alle } z \in K_2(0)$$

Da $\frac{1}{2}z_0, \frac{1}{2}(z_0+1) \in K_2(0)$ gilt

$$\left|h\left(\frac{z_0}{2}\right) + h\left(\frac{z_0+1}{2}\right)\right| \leq \left|h\left(\frac{z_0}{2}\right)\right| + \left|\frac{z_0+1}{2}\right| < 2\,|h(z_0)|$$

Woraus wegen ($*$) mit $z = \frac{z_0}{2}$ gilt

$$|2h(z_0)| < 2\,|h(z_0)|$$

Also gilt $h \equiv 0$. Offensichtlich ist $\mathcal{E}_1(z)$ holomorph in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ mit Hauptteil $\frac{1}{z-m}$ in $m \in \mathbb{Z}$ und $\mathcal{E}_1(-z) = -\mathcal{E}_1(z)$. □

Satz 8.21:
Es gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$\pi \cot(\pi z) = \mathcal{E}_1(z) = \frac{1}{z} + \sum^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \nu^2} = \frac{1}{z} + \sum_{\nu}{}' \left(\frac{1}{z + \nu} - \frac{1}{\nu} \right) \tag{8.22}$$

Mit

$$S_n(z) := \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{z+\nu} + \frac{1}{z-\nu} \right)$$

gilt

$$S_n(z) + S_n\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2S_{2n}(2z) + \frac{z}{2z + 2n + 1}$$

woraus im Limes $n \to \infty$ $S_n(z) \to \mathcal{E}_1(z)$*, d.h. Formel 8.22* $g(z) = \pi \cot(\pi z)$*.*

Sei $h \in \mathcal{M}(G), h \not\equiv 0$, G Gebiet, dann ist $\frac{h'}{h} \in \mathcal{M}(G)$ die logarithmische Ableitung. Für endliche Produkte $h = h_1 \cdots h_n, h_\nu \in \mathcal{M}(G)$ gilt

$$\frac{h'}{h} = \frac{h_1'}{h_1} + \ldots + \frac{h_n'}{h_n} \tag{8.22'}$$

Weiter gilt

Satz 8.23:
Sei $f = \prod f_\nu$ *in* G *kompakt/normal konvergent mit* $f \in \mathcal{O}(G)$*. Dann ist*

$$\sum_{\nu} \frac{f_\nu'}{f_\nu}$$

in G *kompakt oder normal konvergente Reihe meromorpher Funktionen.*

Beweis:

(*a*) kompakte Konvergenz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt mit Folgerung 8.7(*i*) $f = f_0 \cdots f_{n-1} \hat{f}_n$ mit

$$\hat{f}_n = \prod_{\nu \geq n} f_\nu$$

woraus

$$\frac{f'}{f} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{f_\nu'}{f_\nu} + \frac{\hat{f}_n'}{\hat{f}_n}$$

folgt. Da $\hat{f}_n$ in G nach Lemma 8.10 in G kompakt gegen 1 konvergiert, ist nach Weierstraß (8.11(*ii*)) $\hat{f}_n'$ in G kompakt konvergent gegen 0.
Zu jeder Kreisscheibe K mit $\overline{K} \subset G$ gibt es ein m, sodass $\forall n \geq m$ die Funktionen f_n nullstellenfrei in K sind und $\frac{\hat{f}_n'}{\hat{f}_n} \in \mathcal{O}(K)$ in K kompakt gegen 0 konvergiert. Somit konvergiert

$$\sum_{\nu} \frac{f_\nu'}{f_\nu} \longrightarrow \frac{f'}{f} \text{ in G}$$

(b) normale Konvergenz: Sei $g_\nu := f_\nu - 1$. Es gilt $g'_\nu = f'_\nu \ \forall \nu$.
Nach Definition 8.12 suchen wir zu $K \subset G$ kompakt einen Index m mit $\mathcal{P}\left(\frac{f'_\nu}{f_\nu}\right) \cap K = \emptyset \ \forall \nu \geq m$ und

$$\sum_{\nu \geq m} \left|\frac{f'_\nu}{f_\nu}\right|_K = \sum_{\nu \geq m} \left|\frac{g'_\nu}{f_\nu}\right|_K < \infty \tag{$*$}$$

Wähle m so groß, dass $\mathcal{N}(f_\nu) \cap K = \emptyset \ \forall \nu \geq m$ und $\min\limits_{z \in K} |f_\nu(z)| \geq \frac{1}{2} \ \forall \nu \geq m$ (möglich, da $f_\nu \to 1$ kompakt).
Nach dem Cauchyschen Abschätzungssatz (Lemma 4.15) gibt es ein $G \supset L \supset K, L$ kompakt und $M > 0$ mit

$$|g'_\nu|_K \leq M \cdot |g_\nu|_L$$

Damit gilt

$$\left|\frac{g'_\nu}{f_\nu}\right|_K \leq \frac{|g'_\nu|_K}{\min\limits_{z \in K} |f_\nu(z)|} \leq 2M \, |g_\nu|_L$$

für alle $\nu \geq m$.
Da $\sum_{nu} |g_\nu|_L < \infty$ n.V. folgt die Behauptung.

□

8.2 Das Sinusprodukt

Das Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right)$$

ist in $\mathbb{C}$ normal konvergent, da für alle $z \in \mathbb{C}$ die Summe $\sum_{\nu\in\mathbb{N}} \frac{z^2}{\nu^2}$ normal konvergent ist.

Satz 8.24 (Euler, 1734)**:**
Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\sin(\pi z) = (\pi z)\prod_{\nu\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right)$$

Beweis:
Setze $f_\nu = 1 - \frac{z^2}{\nu^2}$ und $f(z) := (\pi z)\prod_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$. Dann gilt

$$\frac{f_\nu'}{f_\nu} = \frac{-\frac{2z}{\nu^2}}{1-\frac{z^2}{\nu^2}} = \frac{-2z}{\nu^2 - z^2} = \frac{2z}{z^2-\nu^2}$$

d.h. nach Lemma 8.20

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \frac{2z}{z^2-\nu^2} \overset{8.20}{=} \pi\ \cot(\pi z) = \frac{(sin(\pi z))'}{\sin(\pi z)}$$

Mit $g(z) := \sin(\pi z)$ gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'g - g'f}{g^2} = \frac{f}{g}\left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right) = 0\ \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$$

und $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Also gilt nach dem Identitätssatz für meromorphe Funktionen 5.16 $f = cg, c \in \mathbb{C}$.
Ferner gilt

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{\pi z} = 1 = \lim_{z\to 0}\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$$

Also $c = 1$.
Mit Hilfe obiger Identität, sowie

$$\sin(z)\cdot\cos(z) = \frac{1}{2}\sin(2z)$$

und Folgerung 8.7(ii) zeigt man auch

$$\cos(\pi z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{(2z)^2}{(2\nu-1)^2}\right)$$

□

Satz 8.25 (Euler)**:**
Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\Gamma(z) = \frac{1}{\Delta(z)} \quad \textit{mit}\ \Delta(z) = z\exp(\gamma z)\prod\left((1+\frac{\nu}{z})\exp(-z/\nu)\right)$$

wobei

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}((1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}) - \log(n)) = 0,577721 \qquad \text{(Eulersche Konstante)}$$

$\Delta(z)$ heißt Weierstraß-Funktion.

Definition 8.26:
Ein elementarer Faktor ist eine Funktion
$E_p(z), p = 0, 1, 2, \ldots$ mit $E_0(z) = 1 - z$ und

$$E_p(z) = (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^2 p}{p}\right)$$

wobei

$$\log(1 - z) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j}$$

$z \to E_p\left(\frac{z}{a}\right)$ hat eine einfache Nullstelle in $z = a$. und ist sonst ungleich 0. Sei G ein Gebiet und $b \in \mathbb{C} \setminus G$, dann hat $E_p\left(\frac{a-b}{z-b}\right)$ eine einfache Nullstelle in $z = a$ in G und ist analytisch in G.

Lemma 8.27:
Für $|z| \leq 1, p \geq 0$ gilt

$$|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$$

Beweis:
(*i*) Es gilt

$$E_p'(z) = -z^p \exp\underbrace{\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right)}_{=:t_p(z)}$$

Denn es gilt $(1 - z)t_p'(z) = 1 - z^p$.

$$E_p'(z) = -\exp(t_p(z)) + (1 - z)t_p'(z) \exp(t_p(z))$$

Da $|\exp(w)| \leq \exp(|w|), w \in \mathbb{C}$ folgt

$$\left|E_p'(tz)\right| \leq -|z|^p E_p'(t), t \geq 0, z \in \overline{\mathbb{E}}, \text{ da } |t_p(tz)| \leq t_p(t), |z| \leq 1$$

Aus $f(z) - f(0) = z \cdot \int_0^1 f'(tz)\; dt, f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}), z \in \mathbb{C}$ folgt

$$\begin{aligned} |E_p(z) - 1| &\leq |z| \int_0^1 \left|E_p'(tz)\right| \; dt \leq -|z|^{p+1} \int_0^1 E_p'(t)\; dt \\ &= -|z|^{p+1} \cdot (\underbrace{E_p(1)}_{=0} - \underbrace{E_p(0)}_{=1}) \end{aligned}$$

□

Satz 8.28:
Sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$ mit $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ und $a_n \neq 0\ \forall n \geq 1$ und jeder Wert $a_n, n \in \mathbb{N}$ kann nur endlich oft wiederholt werden.
Sei (p_n) zu (a_n) eine Folge von Zahlen in $\mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < \infty\ \forall r > 0 \tag{8.29}$$

dann konvergiert

$$f(z) = \prod_{n\in\mathbb{N}} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

normal in $\mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ hat nur Nullstellen in $z = a_n$ mit Vielfachheit.

Beweis:
Sei (p_n) Folge mit 8.29. Dann gilt nach Lemma 8.27

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \le \left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1} \le \left|\frac{r}{|a_n|}\right|^{p_n+1}$$

für alle $|z| \le \nu, r < |a_n|$.
Für $r > 0$ existiert ein N mit $|a_n| \ge r \ \forall n \ge N$. Also konvergiert in $K_r(0)$

$$\sum_{n\ge N} |1 - E_{p_n}|\left(\frac{z}{a_n}\right) \le \sum_{n \ge N}\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1}$$

normal. Also folgt nach 8.7 die normale Konvergenz. □

Satz 8.30:
Sei f eine ganze Funktion, $(a_n) \subset \mathbb{C}$ eine Folge, $a_n \neq 0$ mit $f(a_n) = 0$ mit Multiplizität wiederholt nach Ordnung der Nullstelle und $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. Sei $f(0) = 0$ mit Ordnung $m \ge 0$, $m = 0$ heißt $f(0) \neq 0$. Dann gibt es eine ganze Funktion $g \in \mathcal{O}(G)$ und eine Folge $(p_n) \subset \mathbb{N}$ mit

$$h(z) = z^m \cdot \prod_{n\in\mathbb{N}} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

Beweis:
Nach Satz 8.28 existiert $(p_n) \subset \mathbb{N}$ mit

$$h(z) = z^m \prod_{n\in\mathbb{N}} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

h hat die gleichen Nullstellen wie f mit gleichen Ordnungen. Dann hat $\frac{f(z)}{h(z)}$ hebbare Singularitäten in $z = 0, a_1, a_2, \ldots$, d.h. $\frac{f}{h}$ ist eine ganze Funktion und ungleich 0 überall. Da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist gibt es ein $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, sodass $\frac{f}{h} = \exp(g)$ (7.35). □

Satz 8.31 (Satz von Jacobi)**:**
Es gilt

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} q^{\nu^2} z^\nu = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu^2}(z^\nu + z^{-\nu}) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\Big((1-q^{2\nu})(1+q^{2\nu-1}z)(1+q^{2\nu-1}z^{-1})\Big)$$

für alle $q \in \mathbb{E}, z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Insbesondere gilt für $z = 1$:

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} q^{\nu^2} = \prod_{\nu=1}^{\infty}\Big((1-q^{2\nu})(1+q^{2\nu-1})\Big)$$

Beweis:
Setze $J(z,q) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} q^{\nu^2} z^\nu$.
Zeige:

1) $J(i,q) = J(-1,q^4)$, denn

$$i^\nu + i^{-\nu} = \begin{cases} 2 & \nu \equiv 0 \mod 4 \\ -2 & \nu \equiv 2 \mod 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Jacobi zeigte 1829, dass die Abelfunktion (Produktdarstellung von oben) $A(z,q) = J(z,q)$ erfüllt.

2) Man zeige:

$$A(q^2 z, q) = (qz)^{-1} A(z,q)$$
$$A(z^{-1}, q) = A(z,q) \qquad (z,q) \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \times \mathbb{E}\setminus\{0\}$$

3) $A(i,q) = A(-1q^4), q \in \mathbb{E}$. Hier benutze

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-q^{2\nu}) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\Big((1-q^{4\nu})\cdot(1-q^{4\nu-2})\Big)$$

$A(z,q)$ hat die Laurent-Entwicklung

$$A(z,q) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} a_\nu z^\nu \text{ mit} \qquad a_\nu = a_\nu(q)$$

Aus 2) folgt $a_{-\nu} = a_\nu$ und $a_\nu = q^{2\nu-1}a_{\nu-1}$ für $\nu \in \mathbb{Z}$ (Eindeutigkeit der Laurentreihe). Induktiv zeigt man $a_\nu = q^{\nu^2}a_0, a_0 := a(q)$. Also $A(z,q) = a(q)J(z,q)$ mit $a(0) = 1$, denn $A(z,0) = J(z,0) = 1$. Da $A(1,q)$ und $J(1,q)$ holomorph in $q \in \mathbb{E}$ sind und $J(1,0) = 1$ ist, so ist $a(q) = \frac{A(z,q)}{J(z,q)}$ holomorph nahe $q = 0$.
Aus (1) + (3) folgt dann $J(i,q) \not\equiv 0$ und der Koeffizientenvergleich liefert $a(q) = a(q^4)$, d.h. $a(q) = a(q^{4n})$, und damit liefert die Stetigkeit in $q = 0$

$$a(q) = \lim_{n\to\infty} a(q^{4n}) = a(0) = 1 \ \forall q \in \mathbb{E}$$

$\square$

Funktionen mit vorgegebenem Hauptteil
Ist h meromorph in $D \subset \mathbb{C}$ offen, so ist die Polstellenmenge $\mathcal{P}(h)$ diskret und abgeschlossen in D. Nach Satz 8.28 ist jede diskrete und abgeschlossene Menge in D Polstellenmenge einer in D meromorphen Funktion.
Frage: Können wir außerdem noch die Hauptteile an den Polstellen vorgeben? Falls $\mathcal{P}(h)$ endlich, so ist dies der Fall. Bilde die Partialbruchreihe

$$h = \sum_{\nu} q_\nu \text{ mit } q_\nu \text{ Funktionen mit vorgegebenem Hauptteil}$$

Definition 8.32:
Jede Laurentreihe $\sum_\mu b_\mu (z-d)^{-\mu} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{d\})$ heißt Hauptteil in $d \in \mathbb{C}$. Ein Hauptteil heißt endlich, wenn fast alle $b_\mu = 0$.

Lemma 8.33:
Sei $q \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{d\})$ ist Hauptteil in $d \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to \infty} q(z) = 0$.

Beweis:
$q \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{d\})$ hat Laurentreihenentwicklung $q = q_+ + q_-$ mit q_+ ganz und $q_-(z) = \sum_\mu b_\mu (z - d)^{-\mu} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{d\})$ und $\lim\limits_{z \to \infty} q_-(z) = 0$. Wegen Liouville gilt $\lim\limits_{z \to \infty} q_+(z) = 0 \Leftrightarrow q_+ \equiv 0$.
□

Definition 8.34:
Eine Abbildung φ, die jedem Punkt $d \in D$ einen (endlichen) Hauptteil zuordnet, heißt (endliche) Hauptteil-Verteilung, wenn ihr Träger

$$T := \{z \in D : \varphi(z) \neq 0\}$$

diskret und abgeschlossen in D ist.

Aufgabe: Konstruiere zu jeder Hauptteil-Verteilung φ in D mit Träger T eine Funktion $h \in \mathcal{O}(D \setminus T)$ mit Hauptteilverteilung $HV(h) = \varphi$.

Definition 8.35:
Ordne jedem Punkt in T zu einer Folge $d_1, d_2, \ldots$ an, wobei jeder Punkt von T genau einmal in der Folge vorkommt.
Konvention: wenn $0 \in T$, dann sei $d_1 = 0$. Die Hauptteilverteilung φ nun durch $(d_\nu, q_\nu)_{\nu \geq 1}$ mit $q_\nu := \varphi(d_\nu)$ eindeutig beschrieben.
Eine Reihe $h = \sum_\nu (q_\nu - g_\nu)$ heißt Mittag-Leffler-Reihe zur Hauptteilverteilung (d_ν, q_ν) in D, wenn gilt

1) g_ν ist holomorph in D.
2) Die Reihe h konvergiert normal in $D \setminus \{d_1, d_2, \ldots\}$.

Satz 8.36:
Ist h eine Mittag-Leffler-Reihe zu $(d_\nu, q_\nu)_\nu$, so gilt
$h \in \mathcal{O}(D \setminus \{d_1, d_2, \ldots\})$ und $HV(h) = (d_\nu, q_\nu)_\nu$.

Beweis:
Wegen 2) ist h in $D \setminus \{d_1, d_2, \ldots\}$ holomorph. Da alle $q_\nu - g_\nu, \nu \neq n$ in einer Umgebung $U \subset D$ von d_n holomorph sind, so konvergiert $\sum_{\nu \neq n} (q_\nu - g_\nu)$ in U einschließlich des Punktes d_n kompakt

gegen eine Funktion $\hat{h} \in \mathcal{O}(U)$ (Lemma 8.11).
Da $h - q_n = \hat{h}_n - g_n$ auf $U \backslash \{d_n\}$ gilt und $\hat{h}_n, g_n$ holomorph in d_n sind, ist q_n der Hauptteil von h in d_n. Dies gilt für alle $n \geq 1$. Also ist $HV(h) = (d_\nu, g_\nu)_\nu$. □

Satz 8.37 (Satz von Mittag-Leffler)**:**
Zu jeder Hauptteil-Verteilung $(d_\nu, q_\nu)_\nu$ in $\mathbb{C}$ existieren Mittag-Leffler-Reihen der Form

$$q_1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} (q_\nu - p_{\nu,k_\nu}) \text{ wobei } p_{\nu,k_\nu} \text{ das } k_\nu\text{-te Taylorpolynom von } q_\nu \text{ um 0}$$

Beweis:
Da die Folge $(p_{\nu,k})_{k\geq 1}$ (k-tes Taylorpolynom von q_ν um 0) in $B_{|d_\nu|}(0)$ kompakt gegen q_ν konvergiert, gibt es zu jedem $\nu \geq 2$ ein $k_\nu \in \mathbb{N}$, sodass

$$|q_\nu(z) - p_{\nu,k_\nu}(z)| \leq 2^{-\nu} \; \forall \, |z| \leq \frac{1}{2} |d_\nu|$$

Wegen $\lim_{\nu\to\infty} |d_\nu| = \infty$ gilt, liegt jedes Kompaktum K von $\mathbb{C}$ in fast allen Scheiben $B_{|d_\nu|/2}(0)$. Daher folgt

$$\sum_{\nu \geq n} |q_n - p_{\nu,k_\nu}|_K \leq \sum_{\nu\geq n} 2^{-\nu} < \infty$$

für geeignetes $n = n(k)$.
Dies zeigt normale Konvergenz der Reihe in $\mathbb{C} \backslash \{d_1, d_2, \dots\}$.
Da $p_{\nu,k_\nu} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ist die obige Reihe eine Mittag-Leffler-Reihe zu (d_ν, q_ν). □

Korollar 8.38 (Existenzsatz)**:**
Jede Hauptteil-Verteilung in $\mathbb{C}$ mit Träger T ist die Hauptteil-Verteilung einer in $\mathbb{C} \backslash T$ holomorphen Funktion.

Korollar 8.39 (Partialbruchzerlegung meromorpher Funktionen auf $\mathbb{C}$)**:**
Jede in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion h ist darstellbar durch eine in $\mathbb{C}$ normal konvergente Reihe

$$\sum_{\nu} h_\nu$$

mit rationalen Summanden h_ν, wobei jede Funktion in $\mathbb{C}$ höchstens einen Pol hat.

Beweis:
Nach Satz 8.37 existiert zu jeder Hauptteilverteilung $HV(h)$ eine Mittag-Leffler-Reihe $\hat{h}$ in $\mathbb{C}$, deren konvergente erzeugende Summanden Polynome sind. Da alle Hauptteilverteilung von h und damit auch von $\hat{h}$ endlich sind, sind alle Summanden rationale Funktionen, die genau einen Pol in $\mathbb{C}$ haben. Die Differenz $h - \hat{h}$ ist ganz, also in $\mathbb{C}$ normal konvergente Reihe von (Taylor-)Polynomen. □

Zusammenhang zur Weierstraß-Faktorisierung:
Sei (der Einfachheit halber) $d_1, d_2, \dots$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\lim |d_\nu| = \infty$ und $d_\nu \neq d_\mu, \nu \neq \mu$. Betrachte die Hauptteil-Verteilung $\left(d_\nu, \frac{1}{z-d_\nu}\right)$. Das k-te Taylorpolynom ist

$$-(d_\nu)^{-1} \sum_{k=0}^{\kappa} \left(\frac{z}{d_\nu}\right)^{\kappa_\nu}$$

und die zugehörige Mittag-Leffler-Reihe ist

$$h(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu(z) \text{ mit } h_\nu(z) = \frac{1}{z - d_\nu} + (d_\nu)^{-1} \sum_{k=0}^{\kappa_\nu} \left(\frac{z}{d_\nu}\right)^k$$

Jedes $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $\frac{f'}{f} = h$ hat Nullstellen in $d_1, d_2, \ldots$.
Es gilt

$$\frac{f_\nu'}{f_\nu} = h_\nu \text{ mit } f_\nu(z) = \left(1 - \frac{z}{d_\nu}\right) \left[\exp\left(\sum_{k=0}^{\kappa_\nu} \frac{1}{k+1} \left(\frac{z}{d_\nu}\right)^{k+1}\right)\right]$$

Beispiel 8.40:

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{\nu \in \mathbb{Z}}{}' \, \frac{1}{z+\nu} - \frac{1}{\nu}$$

ist Mittag-Leffler-Reihe zur Hauptteil-Verteilung $(-\nu, \frac{1}{z+\nu})_{\nu \in \mathbb{Z}}$, hier ist $k = k_\nu = 0$.