

# **Geometrische Analysis**

Dr. Michael Hinz  
mitgeschrieben von Arthur Sinulis

31. Juli 2015

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>3</b>
0.1	Mannigfaltigkeiten . . . . .	3
0.2	Tangentialräume . . . . .	8
0.2.1	Differential . . . . .	15
0.3	Riemannsche Metriken . . . . .	20
<b>1</b>	<b>Der Laplace-Beltrami-Operator für Funktionen</b>	<b>23</b>
1.1	Riemannsches Maß . . . . .	23
1.2	Divergenzsatz . . . . .	26
1.3	Der Laplace-Beltrami-Operator . . . . .	28
1.4	Gewichtete Mannigfaltigkeiten . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Sobolev-Räume, Laplace-Operator und Wärmeleitung</b>	<b>31</b>
2.1	Distributionen und Sobolev-Räume . . . . .	31
2.2	Dirichlet-Laplace-Operator und Resolvente . . . . .	35
2.3	Das $L^2$ -Cauchy-Problem . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Krümmungsbegriffe</b>	<b>41</b>
3.0	Exkurs in Flächentheorie . . . . .	41
3.1	Riemannscher Zusammenhang und Paralleltransport . . . . .	42
3.2	Krümmungstensor und verwandte Begriffe . . . . .	49
3.3	Der Laplace-Operator und Krümmung . . . . .	57
	<b>Literatur</b>	<b>72</b>

## 0 Grundlagen

Das Ziel dieser Vorlesung ist es, Auszüge der geometrischen Analysis darzustellen und die Bibliotheksfähigkeit zu erhöhen.

### 0.1 Mannigfaltigkeiten

#### Definition 0.1.1:

Ein topologischer Raum ist ein Paar  $(M, \mathcal{O})$  bestehend aus einer Menge  $M \neq \emptyset$  und einem Mengensystem (Topologie)  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(M)$ , derart dass

- (i)  $A_1, A_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{O}$ .
- (ii) Ist  $I$  ein Indexbereich und sind  $A_i \in \mathcal{O}$  für alle  $i \in I$ , so auch  $\bigcup_{i \in I} A_i$ .
- (iii)  $\emptyset, M \in \mathcal{O}$ .

Die Elemente von  $\mathcal{O}$  heißen offene Mengen. Eine Menge  $A \subset M$  heißt abgeschlossen, falls  $A^c$  offen ist.

#### Beispiel:

- 1) Die „natürliche Topologie“ auf  $\mathbb{R}$ :  $\mathcal{O}$  besteht aus allen Vereinigungen von Intervallen  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ .
- 2) Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum, dann setze  $\mathcal{O}$  als das System der offenen Mengen (im metrischen Sinne). Dann ist  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum.
- 3)  $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$  definiert auf  $X \neq \emptyset$  eine Topologie (indiskrete Topologie).
- 4) Ist  $X \neq \emptyset$ , so ist auch  $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$  eine Topologie (diskrete Topologie).
- 5) Für  $X \neq \emptyset$  ist  $\mathcal{O} := \{A \subset X : A^c \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$  eine Topologie (cofinite Topologie).

#### Definition 0.1.2:

- Ein topologischer Raum  $(M, \mathcal{O})$  heißt Hausdorff-Raum, falls für je zwei Punkte  $x, y \in M$ ,  $x \neq y$  offene Umgebungen  $U, V \in \mathcal{O}$  existieren, sodass  $x \in U, y \in V$  und  $U \cap V = \emptyset$ .
- Ein topologischer Raum  $(M, \mathcal{O})$  erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom (2. AA), falls es eine abzählbare Familie  $(O_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{O}$  gibt, sodass jede offene Menge  $O \in \mathcal{O}$  sich als Vereinigung von Mengen  $O_i$  darstellen lässt. Das System  $(O_i)_i$  heißt eine Basis der Topologie.

#### Beispiel 0.1.3:

Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum, so ist  $(X, \mathcal{O})$  Hausdorff. Die Kugeln  $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$  mit Radien  $r \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$  bilden eine (nicht notwendigerweise abzählbare) Basis. Ist  $X$  separabel, dann ist  $(X, \mathcal{O})$  zweitabzählbar.

**Definition 0.1.4:**

Sind  $(X, \mathcal{O}), (Y, \mathcal{Q})$  zwei topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung, so heißt  $f$  stetig, falls  $f^{-1}(Q) \in \mathcal{O}$  für alle  $Q \in \mathcal{Q}$ .

Ist  $f$  bijektiv und sind  $f$  und  $f^{-1}$  stetig, so heißt  $f$  Homöomorphismus. In diesem Fall heißen  $X$  und  $Y$  homöomorph (d.h. als topologische Räume ununterscheidbar).

**Beispiel:**

Sind  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  Topologien auf einer Menge  $X \neq \emptyset$ , so auch  $\mathcal{O} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i$ .

Ist  $(f_i)_{i \in I}$  eine Familie von Funktionen  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ , so nehmen wir den Durchschnitt über alle Topologien auf  $X$ , bezüglich derer alle  $f_i$  stetig sind. Dies ist die kleinste Topologie auf  $X$ , für die alle  $f_i$  stetig sind (Initialtopologie).

**Definition 0.1.5:**

Sei  $M$  ein topologischer Raum. Eine  $d$ -dimensionale Karte auf  $M$  ist ein Paar  $(U, \varphi)$ , bestehend aus einer offenen Teilmenge von  $M$  und einem Homöomorphismus  $\varphi$  von  $U$  auf eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$ .

**Beispiel:**

Sei  $S \neq \emptyset$  eine abzählbare Menge mit diskreter Topologie. Dann ist dies eine 0-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit; die Karten sind gegeben durch  $(\{s\}, \varphi_s), \varphi_s(s) = 0 \cong \mathbb{R}^0$  für  $s \in S$ .

Sei  $M$  eine topologische Mannigfaltigkeit und seien  $(U, \varphi), (V, \psi)$   $d$ -dimensionale Karten im obigen Sinne mit  $U \cap V \neq \emptyset$ . Dann sind  $\varphi(U \cap V)$  und  $\psi(U \cap V)$  offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$  und man kann daher über Differenzierbarkeit (im  $\mathbb{R}^d$ -Sinne) der Abbildungen  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  und umgekehrt  $\varphi \circ \psi^{-1}$  diskutieren. Diese Abbildungen heißen Kartenwechsel.

**Definition 0.1.6:**

Eine Familie  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  von Karten  $M$  bildet einen  $\mathcal{C}^k$ -Atlas, falls  $M \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ , und alle Kartenwechsel  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$   $\mathcal{C}^k$ -Abbildungen (also sogar  $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismen) sind. Zwei  $\mathcal{C}^k$ -Atlanten heißen kompatibel, falls ihre Vereinigung ein  $\mathcal{C}^k$ -Atlas ist. Die Vereinigung aller (zu einem  $\mathcal{C}^k$ -Atlas) kompatiblen  $\mathcal{C}^k$ -Atlanten nennen wir  $\mathcal{C}^k$ -Struktur auf  $M$  (maximaler  $\mathcal{C}^k$ -Atlas).

**Definition 0.1.7:**

Eine glatte Mannigfaltigkeit (=  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit) ist eine topologische Mannigfaltigkeit versehen mit einer  $\mathcal{C}^\infty$ -Struktur.

**Bemerkung:**

- i) Jeder  $\mathcal{C}^\infty$ -Atlas ist in einem maximalen  $\mathcal{C}^\infty$ -Atlas enthalten. Daher genügt es praktisch also, einen  $\mathcal{C}^\infty$ -Atlas zu betrachten (dies ergibt eine äquivalente Definition).
- ii) Im Folgenden betrachten wir nur noch den Fall  $k = \infty$  und sagen Mannigfaltigkeit statt glatte Mannigfaltigkeit, falls nicht anderweitig angegeben.

**Beispiel:**

- 1)  $\mathbb{R}^d$  ist eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, als Atlas genügt  $\{(\mathbb{R}^d, \text{Id})\}$ . Ebenso gilt dies für offene Teilmengen  $U \subset \mathbb{R}^d$ .

- 2) Sei  $M = \mathbb{R}^2$  und  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ . Für  $p = (x, y) \in U$  sei  $\theta(p) = \arctan \frac{y}{x}$ ,  $r(p) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Dann ist  $(U, (\varphi, r))$  eine Karte auf  $\mathbb{R}^2$  (Polarkoordinaten).
- 3) Die Sphäre  $S^d := \{(x^1, \dots, x^{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} : \sum_{i=1}^{d+1} (x^i)^2 = 1\}$  ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $d$ . Ein möglicher Atlas ist gegeben durch die zwei Karten  $U_1 := S^d \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$  und  $\varphi_1(x^1, \dots, x^{d+1}) = \left(\frac{x^1}{1-x^{d+1}}, \dots, \frac{x^d}{1-x^{d+1}}\right)$  sowie  $U_2 = S^d \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}$  und  $\varphi_2(x^1, \dots, x^{d+1}) = \left(\frac{x^1}{1+x^{d+1}}, \dots, \frac{x^d}{1+x^{d+1}}\right)$  (stereographische Projektionen).
- 4) Der projektive Raum  $\mathbb{R}P^d$ : Betrachte die Menge aller Geraden in  $\mathbb{R}^{d+1}$  durch den Ursprung, alias die Menge aller Richtungen. Dann ist  $\mathbb{R}P^d$  der Quotientenraum von  $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$  bzgl. der Äquivalenzrelation  $(x^1, \dots, x^{d+1}) \sim (\lambda x^1, \dots, \lambda x^{d+1})$ ,  $\lambda \neq 0$ . Falls  $x^i \neq 0$  ist, dann gilt

$$[x^1 : \dots : x^{d+1}] = [x^1/x^i : \dots : 1 : \dots : x^{d+1}/x^i].$$

Daher sind die Karten gegeben durch  $U_i = \{[x^1 : \dots : x^{d+1}] : x^i \neq 0\}$ ,  $i = 1, \dots, d+1$  mit lokalen Koordinaten gegeben durch  $y^1 = x^1/x^i$ ,  $y^{i-1} = x^{i-1}/x^i$ ,  $y^i = x^{i+1}/x^i$ ,  $\dots$ ,  $y^d = x^{d+1}/x^i$ .

Dadurch wird  $\mathbb{R}P^d$  zur  $d$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit. Es ist eine Übung zu zeigen, dass die Kartenwechsel glatt sind.

- 5)  $M, N$  seien Mannigfaltigkeit mit Atlanten  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}, \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ . Dann ist auch  $M \times N$  eine Mannigfaltigkeit mit Atlas  $\{(U_i \times V_j, (\varphi_i, \psi_j))\}_{i \in I, j \in J}$ .
- 6) Ein Spezialfall ist ein  $d$ -dimensionaler Torus  $T^d := \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{d \text{ mal}}$ .

**Bemerkung:**

- Später betrachten wir nur noch Untermannigfaltigkeiten, sodass wir als Beispiele Matrixgruppen oder Flächen im  $\mathbb{R}^n$  erhalten.
- Das Konzept der Mannigfaltigkeit geht auf Riemann und Weyl zurück.
- Die einzigen zusammenhängenden eindimensionalen Mannigfaltigkeiten sind bis auf Diffeomorphismen  $\mathbb{R}$  und  $S^1$ .
- Die zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten können nach Gauß nach der Orientierbarkeit klassifiziert werden.
- Der Fall der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten wurde von Perelman im kompakten Fall gelöst (auf Vorschlag von Thurston).
- Die Klassifikation für höherdimensionale Mannigfaltigkeiten ist aussichtslos.

**Definition 0.1.8:**

Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  zwischen zwei Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$  heißt differenzierbar oder glatt, falls für alle Karten  $(U, \varphi)$  auf  $M$  und  $(V, \psi)$  auf  $N$  die Abbildungen  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$  differenzierbar im  $\mathbb{R}^d$ -Sinne sind.

Ist  $f$  bijektiv und sind sowohl  $f$  als auch  $f^{-1}$  differenzierbar, so heißt  $f$  Diffeomorphismus und  $M$  und  $N$  heißen diffeomorph.

**Bemerkung:**

Die Karten einer  $\mathcal{C}^\infty$ -Struktur haben immer glatte Kartenwechsel. Daher genügt es, die Definition für einen Atlas zu checken. Ebenso wie im topologischen Fall sind zwei diffeomorphe Mannigfaltigkeit ununterscheidbar.

**Beispiel:**

Einen wichtigen Spezialfall werden differenzierbare Kurven  $\gamma : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M$  darstellen.

**Bemerkung** (zur Schreibweise):

- Für eine gegebene Karte  $(U, \varphi)$  schreibt man auch  $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^d(p)), p \in U$ , wobei  $x^i = \varphi^i$  die  $i$ -te Komponente von  $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d) : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^d$  bezeichnet (bzgl. der kartesischen Koordinaten im  $\mathbb{R}^d$ ).

Ist  $(V, \psi)$  eine weitere Karte mit  $V \cap U \neq \emptyset$  und  $\psi(p) = (y^1(p), \dots, y^d(p))$  mit Komponenten  $y^i = \psi^i, p \in V$ , so ergeben sich die Komponenten der Kartenwechsel  $\psi \circ \varphi^{-1}$  und  $\varphi \circ \psi^{-1}$  als  $y^i = y^i(x^1, \dots, x^d)$  respektive  $x^i = x^i(y^1, \dots, y^d)$ . Die Funktionen  $x^i$  und  $y^i$  werden daher als Funktionen auf  $U$  bzw.  $V$  als auch auf  $\psi(U \cap V)$  und  $\varphi(U \cap V)$  aufgefasst.

Man nennt  $x^1, \dots, x^d$  die lokalen Koordinaten auf  $U$ .

- Ist  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so sagt man,  $f$  sei glatt ( $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ), falls für jede Karte  $U$  mit lokalen Koordinaten  $x^1, \dots, x^d$  die Funktion  $f$  eine  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktion der lokalen Koordinaten ist, d.h. falls  $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^\infty$  ist. Für eine stetige Funktion  $f \in \mathcal{C}(M)$  schreiben wir

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}$$

für den Träger von  $f$ .

Wir betrachten nun Überdeckungs- und cut-off-Techniken zur Lokalisation.

**Lemma 0.1.9** (Covering-Lemma):

*Zu jeder Mannigfaltigkeit gibt es eine abzählbare Familie  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von relativkompakten Karten  $U_i$  mit  $M \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ , sodass jedes  $\overline{U_i}$  in einer Karte enthalten ist.*

*Beweis:*

Jeder Punkt  $x \in M$  ist in einer Karte  $V_x$  enthalten. Wählen wir eine kleine, offene Umgebung  $U_x \subset\subset V_x$  von  $x$ , sodass  $U_x$  auch Karte um  $x$  ist. Ist  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare Basis von  $M$ , so markieren wir jedes  $B_j$ , das in einem  $U_x$  enthalten ist.  $U_x$  ist offen, also selbst Vereinigung von markierten  $B_j$ . Wählen wir nun für jedes  $B_j$  genau eine Menge  $U_x$ , die  $B_j$  enthält, dann ergibt das eine Familie von offenen Mengen  $U_x$ , die  $M$  überdecken und  $\overline{U_x} \subset V_x$ .  $\square$

**Folgerung:**

Jede Mannigfaltigkeit ist ein lokalkompakter, topologischer Raum.

Eine offene Überdeckung  $\{V_j\}_{j \in J}$  von  $M$  ist eine Verfeinerung einer offenen Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$ , falls jedes  $V_j$  in einem  $U_i$  enthalten ist. Eine Überdeckung heißt lokal endlich, falls jeder Punkt  $x \in M$  nur in endlich vielen  $U_i$  enthalten ist.

**Satz 0.1.10:**

Sei  $K$  eine kompakte Teilmenge einer Mannigfaltigkeit  $M$  und  $\{U_i\}_{i=1}^k$  eine offene Überdeckung von  $K$ . Dann existieren glatte Funktionen  $\varphi_j : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger, sodass gilt:

- i)  $\text{supp } \varphi_j \subset U_j$  für  $j = 1, \dots, k$ ,
- ii)  $\varphi_j \geq 0$  für alle  $j$  und  $\sum_{i=1}^k \varphi_i(x) \leq 1$  für  $x \in M$ ,
- iii)  $\sum_{i=1}^k \varphi_i(x) = 1$  für  $x \in K$ .

*Beweis:*

Für  $M = \mathbb{R}^d$  ist dies bekannt aus Analysis bzw. PDE (vgl. auch [Gri09], Theorem 2.2). Sind alle  $U_i$  Kartengebiete, so überträgt sich der Beweis sofort. Ansonsten benutze eine ähnliche Technik wie im letzten Beweis.  $\square$

## 0.2 Tangentialräume

Sei  $M$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

### Definition 0.2.1:

Eine Abbildung  $\xi : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  heißt  $\mathbb{R}$ -Derivation in  $x_0 \in M$ , falls gilt:

i)  $\xi$  ist linear,

ii)  $\xi(fg) = \xi(f)g(x_0) + \xi(g)f(x_0)$  für alle  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ .

Die Menge aller  $\mathbb{R}$ -Derivationen  $\xi$  in  $x_0 \in M$  bezeichnen wir mit  $T_{x_0}M$ . Wir definieren  $\xi + \eta \in T_{x_0}M$  für  $\xi, \eta \in T_{x_0}M$  als Summe von zwei Funktionalen auf  $\mathcal{C}^\infty(M)$  und ebenso skalare Vielfache für  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Definition 0.2.2:

Der lineare Raum  $T_{x_0}M$  heißt Tangentialraum an  $M$  in  $x_0$ . Seine Elemente heißen Tangentialvektoren.

### Bemerkung:

Diese Definition ist sehr algebraisch.

### Satz 0.2.3:

Für eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist der Tangentialraum in jedem Punkt  $x_0 \in M$  ein  $d$ -dimensionaler Vektorraum.

*Beweis:*

Für den Satz beweisen wir insgesamt vier Behauptungen.

**Behauptung 1:** Sei  $U \subset M$  eine offene Menge und  $U_0 \subset\subset U$  eine relativkompakte, offene Teilmenge. Dann existiert zu jeder Funktion  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$  eine Funktion  $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , sodass  $f = g$  in  $U_0$ .

*Beweis:*

Nutze die Zerlegung der Eins für  $\overline{U_0}$  kompakt und  $k = 1$ , so liefert dies eine Funktion  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M)$  mit  $0 \leq \psi \leq 1$ ,  $\text{supp } \psi \subset U$ ,  $\psi = 1$  auf  $U_0$ . Setze daher  $g := \psi \cdot f$ .  $\square$

**Behauptung 2:** Sei  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  und  $f \equiv 0$  in einer offenen Umgebung eines Punktes  $x_0 \in U \subset M$ . Dann ist  $\xi(f) = 0$  für alle Tangentialvektoren  $\xi \in T_{x_0}M$ . Falls  $g_1, g_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$  gegeben sind mit  $g_1 = g_2$  in einer offenen Umgebung von  $x_0$ , so gilt also  $\xi(g_1) = \xi(g_2)$  für alle Tangentialvektoren.

*Beweis:*

Sei  $U_0$  eine offene Umgebung von  $x_0$  mit  $U_0 \subset\subset U$  und  $\psi$  ein cut-off für  $\overline{U_0}$  und  $U$  wie oben. Dann gilt  $f\psi \equiv 0$ , also  $f = f(1 - \psi)$ . Wegen der Produktregel folgt damit

$$\xi(f) = \xi(f(1 - \psi)) = \xi(f)(1 - \psi)(x_0) + \xi(1 - \psi)f(x_0) = 0,$$

denn  $(1 - \psi)(x_0) = f(x_0) = 0$ .  $\square$

**Behauptung 3:** Für eine glatte Funktion  $f : B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$  gibt es glatte Funktionen  $h_1, \dots, h_d : B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $f(x) = f(0) + x^i h_i(x)$  für  $x \in B_R(0)$  gilt. Hier ergibt sich  $h_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)$ .

*Beweis:*

Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung angewendet auf die Funktion  $t \mapsto f(tx)$  für  $x \in B_R(0)$  auf  $[0, 1]$  ergibt

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(tx) dt = f(0) + \int_0^1 \langle x, \nabla f(tx) \rangle dt = f(0) + \int_0^1 x^i \frac{\partial}{\partial x^i} f(tx) dt.$$

Also gilt die Behauptung mit  $h_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) dt$ . Offensichtlich sind diese Funktionen glatt.  $\square$

**Behauptung 4:** Unter den Voraussetzungen der obigen Behauptung existieren glatte Funktionen  $h_{ij} : B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i, j = 1, \dots, d$ , sodass für alle  $x \in B_R(0)$  gilt

$$f(x) = f(0) + x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) + x^i x^j h_{ij}(x). \quad (*)$$

*Beweis:*

Wende das obige Lemma auf die Funktionen  $h_j$  an. Dann erhält man  $h_j(x) = h_j(0) + x^i h_{ij}(x)$ . Das Einsetzen ergibt die Behauptung, denn

$$f(x) = f(0) + x^i h_i(x) = f(0) + x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) + x^i x^j h_{ij}(x).$$

$\square$

Seien  $x^1, \dots, x^d$  lokale Koordinaten einer Karte um  $x_0$ . Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ , ausgewertet in  $x_0$  (eigentlich also in  $\varphi(x_0)$ ) sind  $\mathbb{R}$ -Derivationen in  $x_0$ , und sie sind linear unabhängig. Wir zeigen, dass jeder Tangentialvektor  $\xi$  eine Darstellung der Form

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

besitzt, wobei  $\xi^i = \xi(x^i)$ . Daraus folgt, dass  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^d}\}$  eine Basis in  $T_{x_0}M$  ist. Zur Verdeutlichung: ist  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , dann ist  $\frac{\partial}{\partial x^i}(f) := \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x_0)) \in T_{x_0}M$ .

Ohne Einschränkung kann man annehmen, dass diese lokalen Koordinaten  $x_0$  auf 0 abbilden, d.h.  $0 = \varphi(x_0) = (x^1(x_0), \dots, x^d(x_0))$ . Also gilt für jedes  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  die folgende Darstellung in einer kleinen Umgebung  $V \subset U$  von  $x_0$  (nach (\*) und der richtigen Interpretation wie erwähnt)

$$f(x) = f(x_0) + x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) + x^i x^j h_{ij}(x),$$

wobei die  $h_{ij}$  glatt sind auf  $V$ . Die Linearität liefert dann

$$\xi(f) = \xi(1)f(x_0) + \xi(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) + \xi(x^i x^j h_{ij}). \quad (**)$$

Aus der Produktregel erhalten wir  $\xi(1) = \xi(1 \cdot 1) = \xi(1) + \xi(1) \Rightarrow \xi(1) = 0$ . Setzen wir  $u^i := x^j h_{ij}$ , so ergibt sich wegen der Linearität und Produktregel

$$\xi(x^i u^i) = \xi(x^i) \underbrace{u_i(x_0)}_{=x^j(x_0)h_{ij}(x_0)=0} + \xi(u^i)x^i(x_0) = 0.$$

Also reduziert sich (\*\*) auf  $\xi(f) = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ .  $\square$

Die  $\xi^i$  heißen Komponenten des Vektors  $\xi \in T_{x_0}M$  im Koordinatensystem  $x^1, \dots, x^d$ . Man schreibt manchmal auch  $\xi(f) := \frac{\partial f}{\partial \xi}$ . Dann hat man  $\frac{\partial f}{\partial \xi} = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ . Man kann also über  $\xi$  als Richtung denken und über  $\frac{\partial f}{\partial \xi}$  als Richtungsableitung.

Behauptungen 1 und 2 zeigen, dass man einen Tangentialvektor  $\xi \in T_{x_0}M$  auch als eine Derivation auf einem Quotienten aus  $C^\infty(M)$  auffassen kann: Wir nennen  $f$  und  $g$  aus  $C^\infty(M)$  äquivalent, falls es eine offene Umgebung um  $x_0$  gibt, auf der sie übereinstimmen. Der Raum der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit  $\mathcal{E}_{x_0}(M)$ . Seine Elemente heißen Keime differenzierbarer Funktionen in  $x_0$ .  $\mathcal{E}_{x_0}(M)$  ist eine Algebra. Daher lässt sich äquivalent definieren:

**Definition 0.2.4:**

Ein Tangentialvektor an  $M$  in  $x_0$  ist eine  $\mathbb{R}$ -Derivation auf  $\mathcal{E}_{x_0}(M)$ , d.h. eine Abbildung  $\xi : \mathcal{E}_{x_0}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , die linear ist und die Produktregel wie oben erfüllt.

**Definition 0.2.5:**

Ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Familie  $V = \{V(x)\}_{x \in M}$  von Tangentialvektoren mit  $V(x) \in T_x M$  für  $x \in M$ . In lokalen Koordinaten  $x^1, \dots, x^d$  hat man  $V(x) = V^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Ein Vektorfeld  $V$  heißt glatt, falls alle Funktionen/Koeffizienten  $V^i$  in jeder beliebigen Karte glatte Funktionen sind.

Sei nun  $x \in M$  festgehalten und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, welche glatt auf einer Umgebung von  $x$  ist. Das lineare Funktional  $df(x)$  auf  $T_x M$  gegeben durch

$$\forall \xi \in T_x M : \langle df(x), \xi \rangle := \xi(f)$$

nennt man das Differential von  $f$  in  $x_0$ . Hierbei bezeichnet  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  die duale Paarung eines Elements des Dualraums  $T_x^* M := (T_x M)^*$  von  $T_x M$  und eines Vektors aus  $T_x M$ . Also ist  $df(x)$  ein eindeutig bestimmtes Element von  $T_x^* M$ . Offensichtlich hat auch  $T_x^* M$  die Dimension  $d$ . Man nennt  $T_x^* M$  den Kotalangentialraum von  $M$  in  $x$  und seine Elemente Kovektoren.

Zu einer Basis  $\{e_1, \dots, e_d\}$  in  $T_x M$  gibt es eine duale Basis  $\{e^1, \dots, e^d\}$  definiert durch die Forderung  $\langle e^i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ . Die duale Basis zu  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d}\}$  ist gegeben durch  $\{dx^1, \dots, dx^d\}$ , wobei  $dx^i$  das Differential der Koordinatenfunktionen  $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist, denn

$$\left\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_j}(x^i) = \delta_{ij},$$

was aus  $\langle dx^i, \xi \rangle = \xi(x^i) = \xi^i$  folgt.

Ein allgemeiner Kovektor  $\omega \in T_x^* M$  hat eine Basisdarstellung  $\omega = \omega_i dx^i$ .

Eine Differentialform der Ordnung 1 (bzw. Kovektorfeld) auf  $M$  ist eine Familie  $\{\omega(x)\}_{x \in M}$  von Kovektorfeldern mit  $\omega(x) \in T_x^*M$ . Das Kovektorfeld  $\omega$  heißt glatt, falls für alle Karten mit lokalen Koordinaten  $x^1, \dots, x^d$  die Koeffizienten  $\omega^i = \omega^i(x)$  in der Darstellung  $\omega(x) = \omega_i(x)dx^i$  glatt sind.

Sei nun wieder  $x \in M$  fest. Den Kovektor  $df(x)$  (Differential von  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ) kann man in der Basis darstellen durch  $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ , d.h. die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x^i}$  von  $f$  sind die Komponenten des Differentials  $df(x)$  in der Basis  $dx^i$ :

$$\left\langle df, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \delta_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \left\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle.$$

**Beispiel:**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^d$  offen mit der Karte  $\text{Id}$ . Dann bildet dies eine glatte Mannigfaltigkeit. Die Elemente von  $C^\infty(U)$  sind klar. Sei  $x \in U$ , dann ist  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  (im  $\mathbb{R}^d$ -Sinne) ein Element von  $T_x U$ , wobei die Linearität klar ist und die Produktregel sich aus der Produktregel im  $\mathbb{R}^d$  ergibt. Nach obigem Satz ist  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^d}\}$  eine Basis in  $T_x U$ .

Die Differenzierbarkeit im  $\mathbb{R}^d$ -Sinne ist äquivalent zur Differenzierbarkeit im Sinne von Mannigfaltigkeiten. Für  $(U, id_U)$  und  $(\mathbb{R}, id_{\mathbb{R}})$  ist dies klar. Sagen wir  $(U, \varphi)$  und  $(\mathbb{R}, \psi)$  seien Karten aus den gleichen Strukturen. Dann muss gelten, dass  $id_U \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ id_U^{-1}$  sowie analog mit  $id_{\mathbb{R}}$  und  $\psi$  glatt sind.

Die Kartenelemente  $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}, x^i = x^i(x) = x^i(x^1, \dots, x^d)$  haben das Differential im Sinne der Mannigfaltigkeit bzw. im  $\mathbb{R}^d$ -Sinne:  $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} dx^j$ . Ein Vektorfeld ist eine Abbildung  $v(x) = v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Identifiziert man  $T_x U$  mit  $\mathbb{R}^d$  und die Standardbasis  $e^i$  mit  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ , so folgt die Koordinatendarstellung wie früher und  $v$  ist glatt, falls alle  $v^i : U \rightarrow \mathbb{R}$  glatt sind.

Es gibt noch weitere, äquivalente, aber andersartige Definitionen des Tangentialraums.

**Definition 0.2.6** (geometrische Definition des Tangentialraums):

Sei  $M$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $x \in M$ . Es sei  $K_x(M)$  die Menge der differenzierbaren Kurven in  $M$ , welche bei  $t = 0$  durch  $x$  gehen, d.h.

$$K_x(M) := \{\gamma : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M \text{ glatt}, \varepsilon > 0, \gamma(0) = x\}.$$

Zwei Kurven  $\beta, \gamma \in K_x(M)$  heißen äquivalent, falls für eine (und damit jede) Karte  $(U, \varphi)$  um  $x$  gilt  $(\varphi \circ \beta)'(0) = (\varphi \circ \gamma)'(0) \in \mathbb{R}^d$ , wobei  $\alpha'$  die Zeitableitung bezeichnet. Die Äquivalenzklassen  $[\gamma] \in K_x(M) / \sim$  heißen Tangentialvektoren an  $M$  in  $x$  und  $T_x^{geo} M := K_x(M) / \sim$ .

**Bemerkung:**

Ein Tangentialvektor in dieser Definition ist also eine Äquivalenzklasse differenzierbarer Kurven. Die Idee ist, dass es der Geschwindigkeitsvektor einer Bahnkurve ist.

**Definition 0.2.7** (physikalische Definition des Tangentialraums):

Es sei  $D_x(M)$  die Menge aller Karten  $(U, \varphi)$  um  $x$ . Ein Tangentialvektor ist eine Abbildung  $v : D_x(M) \rightarrow \mathbb{R}^d$ , sodass für alle  $(U, \varphi)$  und  $(V, \psi)$  gilt

$$v((V, \psi)) = D(\varphi \circ \psi^{-1})(\varphi(x))v((U, \varphi)).$$

Für zwei Karten um  $x$  gehen die zugeordneten Vektoren des Kartenwechsels auseinander hervor. Der Vektorraum solcher Abbildungen heißt Tangentialraum an  $M$  in  $x$ , geschrieben  $T_x^{phys} M$ .

Das Differential des Kartenwechsels  $D(\varphi \circ \psi^{-1})(\varphi(x))$  ergibt sich durch die Jacobi-Matrix  $\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(x)}\right)_{i,j=1,\dots,d}$  in  $\varphi(x)$ . Man erhält  $w^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} v_i$  ( $w = v((V, \psi))$ ).

**Lemma 0.2.8:**

*Es gibt drei untereinander verträgliche Bijektionen  $\Phi_1 : T_x^{geo} M \rightarrow T_x M$ ,  $\Phi_2 : T_x M \rightarrow T_x^{phys} M$  sowie  $\Phi_3 : T_x^{phys} M \rightarrow T_x^{geo} M$ , sodass die Hintereinanderausführung von Zweien die Dritte ergibt und somit sind  $T_x^{geo} M$ ,  $T_x^{phys} M$  und  $T_x M$  allesamt äquivalent.*

*Beweis:*

1): Sei  $[\gamma] \in T_x^{geo} M$ . Dann ist durch  $\xi : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\xi(f) = (f \circ \gamma)'(0)$  eine  $\mathbb{R}$ -Derivation in  $x$  gegeben.  $\xi$  ist wohldefiniert: Sei  $(U, \varphi)$  eine beliebige Karte um  $x$  und ohne Einschränkung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  glatt und  $\alpha \in [\gamma]$  mit Definitionsbereich  $(-\varepsilon, +\varepsilon)$  für  $\alpha$  und  $\gamma$ . Dann folgt nach Definition der Äquivalenzrelation  $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \gamma)'(0)$  und daher folgt nach der Kettenregel

$$(f \circ \alpha)'(0) = \underbrace{(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha)'(0)}_{=D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))(\varphi \circ \alpha)'(0)} = \underbrace{(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)'(0)}_{=D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))(\varphi \circ \gamma)'(0)} = (f \circ \gamma)'(0).$$

Offensichtlich ist diese Zuordnung linear. Die Produktregel folgt aus der Produktregel für  $\mathbb{R}^d$ -wertige Funktionen. Also ist  $\xi := \Phi_1([\gamma]) \in T_x M$ .

2): Ist  $\xi : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $\mathbb{R}$ -Derivation in  $x$ , so ist  $v : D_x(M) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$v((U, \varphi)) := \left(\xi(x^i)\right)_{i=1,\dots,d}$$

wobei  $\varphi = (x^1, \dots, x^d)$  die Kartenabbildung, d.h.  $x^i$  die lokalen Koordinaten sind (wobei  $x^i \in \mathcal{E}_x(M)$  zu interpretieren ist, oder mittels einer cutoff Funktion auf  $x^i \in C^\infty(M)$  fortgesetzt wird). Dies definiert einen Tangentialvektor im physikalischen Sinne, d.h. ein Element von  $T_x^{phys}$ : Seien  $(V, \psi), (U, \varphi)$  Elemente von  $D_x M$  mit Karten  $\varphi = (x^1, \dots, x^d), \psi = (y^1, \dots, y^d)$  und Kartenwechsel  $y = \psi \circ \varphi^{-1}$  auf  $\varphi(U \cap V)$ , so hat man

$$\xi(y^i) = \frac{\partial y^i}{\partial x_j}(\varphi(x)) \xi(x^j). \tag{**}$$

Um dies zu zeigen, nutzen wir die Produktregel und die Behauptung 3 aus dem Beweis des vorherigen Satzes. Ohne Einschränkung sei dabei  $\varphi(x) = \psi(x) = 0$  und  $\varphi(U)$  eine kleine offene Kugel um 0 sowie  $U \subset V$ . Dann gilt es nach Behauptung 3 Komponentenfunktionen  $y^1, \dots, y^d$  des Kartenwechsels  $\psi \circ \varphi^{-1}$  mit der Gestalt  $y^i = w_{ij} x^j$ , gesehen als Funktion von  $\varphi(U)$  mit glatten  $w_{ij}$ . Es gilt

$$w_{ij} = w_{ij}(x^1, \dots, x^d) = \int_0^1 \frac{\partial y^i}{\partial x_j}(tx^1, \dots, tx^d) dt. \tag{\Delta}$$

Gesehen als Funktionen  $y^i$  auf  $V \subset M$  ergibt das  $y^i = (w_{ij} \circ \varphi_j)x^j$ . Wegen der Produktregel und der Linearität von  $\xi$  sowie  $\varphi(x) = 0$  (d.h. auch  $x^j(x) = 0$  für alle  $j$ ) gilt nun

$$\xi(y^i) = (w_{ij} \circ \varphi)(x)\xi(x^j) + 0 = w_{ij}(0)\xi(x^j)$$

und mit  $(\Delta)$  gilt nun

$$w_{ij}(0) = \int_0^1 \frac{\partial y^i}{\partial x_j}(0, \dots, 0) dt = \frac{\partial y^i}{\partial x_j}(0)$$

wie in  $(**)$  gewünscht.

3): Ist  $v : D_x(M) \rightarrow \mathbb{R}^d$  ein Element von  $T_x^{phys} M$  und  $(U, \varphi)$  eine Karte um  $x$ , so kann man  $\gamma : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow U$  für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  definieren durch

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + tv((U, \varphi))).$$

Dann ist  $[\gamma]$  ein geometrischer Tangentialvektor und es ist unabhängig von der Kartenwahl: Ist  $(V, \psi)$  eine weitere Karte um  $x$  und  $\alpha$  analog definiert mit  $(V, \psi)$  anstelle von  $(U, \varphi)$ , so ist

$$(\psi \circ \gamma)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)'(0) = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))v((U, \varphi)) = (\varphi \circ \gamma)'(0)$$

genau dann, wenn die Bedingung an die Kartenwechsel aus der Definition des physikalischen Tangentialvektors erfüllt ist.

4): Wir zeigen exemplarisch, dass  $\Phi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1 = id_{T_x^{geo} M}$ : Sei  $[\gamma] \in T_x^{geo}(M)$ . Dann ist  $\Phi_1([\gamma])$  die Derivation  $f \mapsto (f \circ \gamma)'(0)$ ,  $\Phi_2 \circ \Phi_1([\gamma])$  der physikalische Tangentialvektor  $v$  mit  $v((U, \varphi)) = (\varphi \circ \gamma)'(0)$  und  $\Phi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1([\gamma])$  ist die Klasse zur Kurve  $\beta(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t(\varphi \circ \gamma)'(0))$ . Man hat also  $\varphi \circ \beta(t) = \varphi(x) + t(\varphi \circ \gamma)'(0)$  und damit

$$(\varphi \circ \beta)'(0) = (\varphi \circ \gamma)'(0),$$

also  $[\gamma] = [\beta]$ . Der Rest läuft analog. □

### Bemerkung:

Ein Tangentialvektor kann also auch dargestellt werden als die Geschwindigkeit einer Bahnkurve in einem Punkt (geometrisch) oder eine einen Koordinatenvektor, der sich mit Kartenwechseln gut verträgt (physikalisch).

### Beispiel:

Sei  $M = \mathbb{R}^d$ . Wir wissen bereits, dass  $T_x \mathbb{R}^d$  isomorph zum  $\mathbb{R}^d$  ist (aufgrund der Dimensionen). Ein konkreter Isomorphismus ist (ähnlich wie im vorigen Beweis) folgendermaßen gegeben: Für jedes  $v \in \mathbb{R}^d$  definiere  $D_v|_x : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_v|_x(f) := (f \circ \gamma)'(0)$ , wobei  $\gamma(t) = x + tv$ .

Wir haben schon gezeigt, dass  $D_v|_x$  eine  $\mathbb{R}$ -Derivation ist (vgl. Schritt 1 vom Beweis). Durch  $v \mapsto D_v|_x$  ist ein Isomorphismus von  $\mathbb{R}^d$  nach  $T_x \mathbb{R}^d$  gegeben. Dabei ist die Linearität offensichtlich.

Injektivität: Ist  $v \in \mathbb{R}^d$  und  $D_v|_x = 0$  in  $T_x \mathbb{R}^d$  und  $v = v^i e_i$  die Darstellung in der Standardbasis, so folgt mit  $f(x) = x^j(x) = x_j$  gerade

$$0 = D_v|_x(x^j) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)(x) = v^j,$$

d.h.  $v = 0$ .

Surjektivität: Hat man  $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x \mathbb{R}^d$ , so betrachten wir  $v := w^i e_i \in \mathbb{R}^d$ . Dann folgt mit  $\gamma(t) = x + tv$

$$D_v|_x(f) = (f \circ \gamma)'(0),$$

also insbesondere  $D_v|_x(x^j) = w^j = w(x^j)$ . Wegen der Produktregel und der Linearität gilt also  $D_v|_x(f) = w(f)$  für jedes Polynom  $f$ . Die Polynomapproximation lokal um  $x$  liefert die Behauptung per Widerspruch (falls  $D_v|_x(f) - w(f) > \varepsilon$ , wähle eine Taylorapproximation um  $x$  mit Fehler  $< \varepsilon$ ).

### 0.2.1 Differential

Sei  $M$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit,  $N$  eine  $d'$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $f : M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung. Sei  $x \in M$  und  $\xi \in T_x M$ . Wir setzen dann

$$df_x(\xi)(g) := \xi(g \circ f), g \in \mathcal{C}^\infty(N).$$

Für  $g \in \mathcal{C}^\infty(N)$  ist offensichtlich  $g \circ f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  und die rechte Seite ist wohldefiniert. Die Abbildung  $df_x(\xi) : \mathcal{C}^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}$  ist offensichtlich linear. Außerdem ist eine  $\mathbb{R}$ -Derivation auf  $\mathcal{C}^\infty(N)$  in  $f(x)$ , denn für  $g, h \in \mathcal{C}^\infty(N)$  gilt

$$\begin{aligned} df_x(\xi)(gh) &= \xi(gh \circ f) = \xi((g \circ f)(h \circ f)) = \xi(g \circ f)h \circ f(x) + \xi(h \circ f)g \circ f(x) \\ &= g(f(x))df_x(\xi)(h) + h(f(x))df_x(\xi)(g). \end{aligned}$$

Also ist  $df_x(\xi) \in T_{f(x)}N$ .

#### Lemma 0.2.9:

- i) Für jedes  $x \in M$  ist  $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)}N$  eine lineare Abbildung.
- ii) Für  $M = N$  und  $f = id_M$  gilt  $d(id)_x = id_{T_x M}$ .
- iii) Ist  $f : M \rightarrow N$  diffeomorph, dann ist  $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)}N$  ein Isomorphismus und es gilt  $(df_x)^{-1} = d(f_{f(x)}^{-1})$ .

*Beweis:*

i) und ii) sind klar, (iii) ist eine Übung. □

#### Beispiel 0.2.10:

Für  $M = \mathbb{R}^d$  und  $N = \mathbb{R}^{d'}$  mit globalen Karten  $id$  und Koordinaten  $x^1, \dots, x^d$  und  $y^1, \dots, y^{d'}$  erhält man

$$df_x \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (g) = \frac{\partial}{\partial x^i} (g \circ f)(x) = \frac{\partial g}{\partial y^j} (f(x)) \frac{\partial f^j}{\partial x^i} (x) = \left( \frac{\partial f^j}{\partial x^i} (x) \frac{\partial}{\partial y^j} \right) (g),$$

also  $df_x \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial f^j}{\partial x^i} (x) \frac{\partial}{\partial y^j}$ , d.h. die Basiswechselmatrix von  $df_x$  in den Koordinatenbasen  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^d} \right\}$  und  $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{d'}} \right\}$  von  $T_x \mathbb{R}^d$  bzw.  $T_{f(x)} \mathbb{R}^{d'}$  respektive ist gerade die Jacobi-Matrix von  $f$ . Identifiziert man  $\mathbb{R}^d$  mit  $T_x \mathbb{R}^d$  und  $\mathbb{R}^{d'}$  mit  $T_{f(x)} \mathbb{R}^{d'}$ , so ist  $df_x$  gerade das Differential von  $f$  im  $\mathbb{R}^d$ -Sinne.

### Untermannigfaltigkeiten

Ist  $(M, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum, so kann man auf einer beliebigen Teilmenge  $S \subset M$  eine Topologie  $\mathcal{O}_S$  definieren durch

$$\mathcal{O}_S := \{S \cap U : U \in \mathcal{O}\}.$$

Es ist eine leichte Übung zu zeigen, dass dies eine Topologie ist. Man nennt diese Teilraum-, relative oder induzierte Topologie auf  $S$  bzgl.  $M$ . Ist  $M$  Hausdorff mit 2. AA, so auch  $S$  bzgl. der Relativtopologie.

Sei  $M$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

**Definition 0.2.11:**

$S \subset M$  heißt eine Untermannigfaltigkeit von  $M$  der Dimension  $d' \leq d$ , falls für jedes  $x_0 \in S$  eine Karte  $(U, \varphi)$  auf  $M$  existiert mit  $x_0 \in U$ , sodass der Schnitt  $S \cap U$  gegeben ist durch

$$S \cap U = \{x \in U : x^{d'+1}(x) = \dots = x^d(x) = 0\},$$

wobei  $\varphi = (x^1, \dots, x^d)$  die Kartenabbildung ist.

Das Bild  $\varphi(U \cap S)$  liegt im  $d'$ -dimensionalen Unterraum  $\{x^{d'+1} = \dots = x^d = 0\}$ . Betrachten wir  $\varphi|_{S \cap U}$  als Abbildung von  $U \cap S$  in  $\mathbb{R}^{d'}$ , so wird  $(U \cap S, \varphi|_{S \cap U})$  zu einer  $d'$ -dimensionalen Karte auf  $S$  um  $x_0$  mit Koordinaten  $x^1, \dots, x^{d'}$ . Mit dem Atlas aller dazu kompatiblen Karten wird  $S$  zu einer glatten Mannigfaltigkeit.

**Bemerkung:**

- $S$  wird als topologischer Raum betrachtet mit induzierter Topologie. Die obige Kartenbedingung macht aus  $S$  zunächst eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension  $d'$  und stellt auch eine  $C^\infty$ -Struktur auf  $S$  zur Verfügung. (Übung: Zeige, dass die Kartenwechsel glatt sind).
- Folgendes Lemma produziert viele Untermannigfaltigkeiten.

**Lemma 0.2.12:**

Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $d$  und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion. Falls  $df_x \neq 0$  für alle  $x \in N$  mit  $N := \{x \in M : f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$ , dann ist  $N$  eine Untermannigfaltigkeit von  $M$  der Dimension  $d - 1$ .

**Bemerkung 0.2.13:**

Es gilt eine allgemeinere Version des Lemmas, der sogenannte Satz vom regulären Wert: Ist  $M$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit,  $M'$  eine  $d'$ -dimensionale Mf mit  $d' \leq d$  und ist  $f : M \rightarrow M'$  eine glatte Abbildung, sodass für einen Wert  $y \in M'$  das Differential  $df_x$  für alle  $x \in f^{-1}(y)$  den Rang  $d'$  hat, so ist  $f^{-1}(y)$  eine Vereinigung von Untermannigfaltigkeiten von  $M$  der Dimension  $d - d'$ .

**Beispiel 0.2.14:**

- (1) In  $\mathbb{R}^d$  betrachten wir die Sphäre  $S^{d-1}$ . Offensichtlich ist  $S^{d-1} = f^{-1}(0)$  für  $f(x) = \|x\|^2 - 1$  und  $df_x = 2(x^1, \dots, x^d)$  verschwindet nirgends auf  $S^{d-1}$ . Also ist  $S^{d-1}$  eine Untermannigfaltigkeit vom  $\mathbb{R}^d$  mit Dimension  $d - 1$ .
- (2) Sei allgemeiner  $Q = \{x \in \mathbb{R}^d : x^T A x = 1\}$  eine nichtleere Quadrik im  $\mathbb{R}^d$ , wobei  $A$  eine symmetrische  $d \times d$ -Matrix ist. Dann ist  $Q$  eine  $(d - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, denn  $Q = f^{-1}(0)$  mit  $f(x) = x^T A x - 1$  und es gilt  $df_x = 2x^T A \neq 0$  für alle  $x \in Q$ . Denn wäre  $x^T A = 0$  für ein  $x$ , so auch  $x^T A x = 0$  im Widerspruch zur Voraussetzung.
- (3) Die orthogonale Gruppe  $O(d) = \{X \in \mathbb{R}^{d \times d} : X^T X = E\}$ , wobei  $E$  die Einheitsmatrix ist, ist eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{d \times d}$  (mit globaler Karte  $id$ ) der Dimension  $\frac{1}{2}d(d - 1)$ . Denn  $O(d)$  ist das Urbild der Einheitsmatrix  $E$  unter

der Abbildung  $f : \mathbb{R}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}_s^{d \times d}$ , wobei  $\mathbb{R}_s^{d \times d}$  der Vektorraum der symmetrischen  $d \times d$ -Matrizen ist, gegeben durch  $f(X) = X^T X$ . Die Abbildung ist stetig partiell differenzierbar und das Differential  $df_A : \mathbb{R}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  an der Stelle  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  ist gegeben durch

$$df_A H = A^T H + H^T A.$$

Für jede orthogonale Matrix  $A \in O(D)$  ist  $df_A$  surjektiv, denn die Gleichung  $S = df_A H$  für  $S \in \mathbb{R}_s^{d \times d}$  hat eine Lösung, nämlich  $H = \frac{1}{2}AS$ . Also ist nach der obigen Bemerkung  $O(d)$  eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $\dim \mathbb{R}^{d \times d} - \dim \mathbb{R}_s^{d \times d} = d^2 - \frac{1}{2}d(d+1) = \frac{1}{2}d(d-1)$ .

*Beweis vom Lemma 0.2.12:*

Für jedes  $x_0 \in N$  existiert eine Karte  $U$  um  $x_0$ , sodass  $df \neq 0$  in  $U$ , d.h. der Vektor  $(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^d})$  ist nicht null. Wegen dem Satz über implizite Funktionen existiert  $V \subset U$  offen mit  $x_0 \in V$  und ein Index  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sodass die  $f(x) = 0$  nach  $x_i$  aufgelöst werden kann, d.h.  $f(x) = 0$  ist in  $V$  äquivalent zu  $x^i = \tilde{f}(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^d)$  mit einer geeigneten Funktion  $\tilde{f}$ . Sei ohne Einschränkung  $i = d$ , d.h.  $x^d = \tilde{f}(x^1, \dots, x^{d-1})$ . Wir wechseln nun die Koordinaten:  $y^1 = x^1, \dots, y^{d-1} = x^{d-1}, y^d = x^d - f(x^1, \dots, x^{d-1})$ . Dann ist die Gleichung für  $N$  in  $V$  gerade  $y^d = 0$ , d.h.  $N \cap V = \{y \in V : y^d = 0\}$ , also ist  $N$  eine  $d-1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.  $\square$

**Beispiel 0.2.15:**

- (4) Der Graph einer  $\mathcal{C}^1$ -Abbildung  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  zusammenhängend und offen, ist gegeben durch  $\Gamma_g := \{(w, g(w)) : w \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^{d+d'}$ . Dies ist eine Untermannigfaltigkeit von  $\Omega \times \mathbb{R}^{d'}$  der Dimension  $d$ : Betrachten die Funktion  $F : \Omega \times \mathbb{R}^{d'} \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ ,  $F((w, v)) = v - g(w)$ .  $\Omega$  ist eine Mannigfaltigkeit und  $\mathbb{R}^{d'}$  ist eine Mannigfaltigkeit, und damit auch  $\Omega \times \mathbb{R}^{d'}$ . Man hat  $\Gamma_g = \{(w, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^{d'} : F((w, v)) = 0\}$  und  $\frac{dF}{dv^j} = 1, j = 1, \dots, d'$ , also  $dF$  hat Rang  $d'$  auf  $\Gamma_g$  und nach der Bemerkung 0.2.1 ist  $\Gamma_g$   $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\Omega \times \mathbb{R}^{d'}$ .

Falls  $N$  eine Untermannigfaltigkeit von  $M$  und  $x \in N \subset M$ , dann kann man nach der Struktur von  $T_x N$  im Vergleich zu  $T_x M$  fragen.

**Lemma 0.2.16:**

In der Situation von Lemma 0.2.12 und Bemerkung 0.2.13 hat man für alle  $x \in M$  die Relation  $T_x N = \ker df_x \subset T_x M$ .

*Beweis:*

Sei  $\xi \in T_x N$ ,  $(U, \varphi)$  eine Karte auf  $N$  mit  $x \in U$ . Sei  $\gamma$  eine glatte Kurve in  $\varphi(U)$  mit  $\gamma(0) = \varphi(x)$  und  $\dot{\gamma}(0) = d\varphi(\xi)$  (z.B. kann man  $\gamma(t) = \varphi(x) + td\varphi(\xi)$  nehmen). Dann ist  $\beta := \varphi^{-1}(\gamma)$  eine Kurve in  $N$  mit  $\beta(0) = x$ . Wegen  $N = f^{-1}(0)$  gilt  $f \circ \beta(t) = 0$  für alle  $t$ , also auch  $df_x \circ \beta(0) = 0$  und somit  $\xi = \beta(0) \in \ker df_x$ . Also gilt  $T_x N \subset \ker df_x$ . Wir wissen nun aber, dass  $\dim T_x N = \dim N = d - d'$  und  $\dim \ker df_x = d - d'$  und somit  $T_x N = \ker df_x$ .  $\square$

**Beispiel 0.2.17:**

- 1) Zu  $S^{d-1}$  mit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|^2 - 1$  wie zuvor ergibt sich  $T_x S^{d-1} = \ker df_x = \{v \in \mathbb{R}^d : \langle x, v \rangle_{\mathbb{R}^d} = 0\}$ .
- 2) Sei  $Q = \{x \in \mathbb{R}^d : x^T A x = 1\}$  wie zuvor,  $f(x) = x^T A x - 1$  mit  $df_x = 2x^T A \neq 0$  für  $x \in Q$ . Nun gilt  $T_x Q = \ker df_x = \{v \in \mathbb{R}^d : x^T A v = 0\}$ .
- 3)  $O(d) = \{X \in \mathbb{R}^{d \times d} : X^T X = E\}$  ist eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $\frac{1}{2}d(d-1)$  von  $\mathbb{R}^{d \times d}$  und für  $f(x) = X^T X - E$  gilt  $O(d) = f^{-1}(0)$  mit  $df(A)H = A^T H + H^T A$ . Der Tangentialraum  $T_E O(d)$  an  $O(d)$  in  $E$  ist der Raum der schiefsymmetrischen Matrizen, denn man hat  $df(E)H = H + H^T A$ , also  $T_E O(d) = \{H \in \mathbb{R}^{d \times d} : H + H^T = 0\}$ .

Man kann die Logik der obigen Lemmata und Bemerkungen in gewissem Sinne umkehren: Ist  $S$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^d$ ,  $n \leq d$ , und  $(U, \varphi)$  eine Karte des  $\mathbb{R}^d$  mit lokalen Koordinaten  $\varphi = (x^1, \dots, x^d)$  mit  $U \cap S \neq \emptyset$ , welche  $U$  auf eine offene Teilmenge  $V = \varphi(U)$  des  $\mathbb{R}^d$  abbildet, dann muss  $\varphi$  ein Diffeomorphismus auf  $U$  sein. Die Einschränkung  $\varphi|_{U \cap S}$  bildet  $U \cap S$  auf  $W := V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$  ab, wobei  $0 \in \mathbb{R}^{d-n}$ . Betrachten wir nun die differenzierbare Abbildung  $\tilde{\varphi} : U \rightarrow \mathbb{R}^{d-n}$  gegeben durch  $\tilde{\varphi} = (x^{n+1}, x^{n+2}, \dots, x^{d-1}, x^d)$ , dann ergibt sich

$$S \cap U = \{x \in U : \tilde{\varphi}(x) = 0\}.$$

Außerdem hat  $D\tilde{\varphi}_x : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d-n}$  den Rang  $d-n$  für alle  $x \in S \cap U$ . Also ist  $S \cap U$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $U$  (nach Lemma 0.2.4 (?) bzw. Bemerkung 0.2.4). Für alle  $x \in S \cap U$  gilt  $T_x S = T_x(S \cap U) = d\tilde{\varphi}_x = \mathbb{R}^n$ .

Fazit: Das Prinzip des Lemmas (Satz vom regulären Wert) ergibt sich zumindest immer lokal.

Diese Sichtweise erlaubt einen Link zur klassischen Theorie:  $F \subset \mathbb{R}^d$  ist ein parametrisiertes Flächenstück der Dimension  $n$ , falls es  $W \subset \mathbb{R}^n$  offen und zusammenhängend gibt, eine injektive Abbildung  $f : W \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $f(W) = F$  und  $df$  hat maximalen Rang auf ganz  $W$ , sodass  $f^{-1}|_F : F \rightarrow W$  stetig.

Offensichtlich kann eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^d$  also als eine Vereinigung parametrisierter Flächenstücke dargestellt werden. Setzen wir  $f := (\varphi|_{S \cap U})^{-1} : \tilde{W} \rightarrow \mathbb{R}^d$  und betrachten  $F = f(\tilde{W}) = U \cap S$  mit  $\tilde{W} = \{(w^1, \dots, w^n) : (w^1, \dots, w^d) \in W\}$ , so ist  $f$  injektiv,  $df$  hat vollen Rang und  $f^{-1}$  ist stetig. Also ist  $F$  ein  $n$ -dimensionales Flächenstück. Wegen  $df(f^{-1}(x))(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$  identifiziert man  $T_x F = T_x(S \cap U)$  mit  $df(f^{-1}(x))(\mathbb{R}^n)$  und erhält damit  $T_x F = \text{lin}\left\{\frac{\partial f}{\partial w^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial w^n}\right\}, w \in \tilde{W}$ .

### Beispiel 0.2.18:

- (1) Die Kreislinie  $S^1$ : Betrachte Gebiete (offene, zusammenhängende Mengen)  $(0, 2\pi)$  und  $(-\pi, \pi)$  mit  $f(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ . Das ergibt zwei Flächenstücke bzw. mit lokaler Umkehrung  $f^{-1}$  von  $f$  zwei Karten, die einen Atlas bilden.
- (2) Rotationstorus im  $\mathbb{R}^3$ : Betrachten wir die Gebiete  $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ ,  $(0, 2\pi) \times (-\pi, \pi)$ ,  $(-\pi, \pi) \times (0, 2\pi)$ ,  $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$  mit Parametrisierung

$$f((\varphi, \theta)) = \begin{pmatrix} (R+r \cos(\theta)) \cos(\varphi) \\ (R+r \cos(\theta)) \sin(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

so ergibt dies vier Flächenstücke bzw. einen Atlas mit vier Karten.

### 0.3 Riemannsche Metriken

$M$  sei eine glatte  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $g = \{g_x\}_{x \in M}$  sei eine Familie von Skalarprodukten  $g_x$  auf den Tangentialräumen  $T_x M, x \in M$ . Genauer: Auf jedem Tangentialraum  $T_x M$  werde durch  $g_x$  ein Skalarprodukt  $\langle \xi, \eta \rangle_g := g_x(\xi, \eta), \xi, \eta \in T_x M$  definiert und somit wird dann  $T_x M$  zu einem Euklidischen Raum. Die Länge eines Tangentialvektors  $\xi \in T_x M$  ist gegeben durch  $\|\xi\|_g := \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$ . In lokalen Koordinaten  $x^1, \dots, x^d$  ergibt sich

$$\langle \xi, \eta \rangle_g = g_{ij}(x) \xi^i \eta^j,$$

wobei  $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \eta = \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  aus  $T_x M$  sind.  $(g_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,d}$  ist eine symmetrische, positiv definite Matrix für jedes fixierte  $x \in M$ . Die Funktionen  $g_{ij}$  nennen wir die Komponenten von  $g$  in den lokalen Koordinaten  $x^1, \dots, x^d$  und man hat  $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_g$ .

Sind für alle Karten  $(U, \varphi)$  mit lokalen Koordinaten  $x^1, \dots, x^d$  die jeweiligen Komponenten  $g_{ij} = g_{ij}(x)$  glatte Funktionen in  $x$ , so sagen wir, dass  $g$  glatt von  $x$  abhängt.

#### Definition 0.3.1:

Ist  $g$  eine Familie von Skalarprodukten  $g_x$  auf  $T_x M, x \in M$ , die glatt von  $x$  abhängt, so heißt  $g$  eine Riemannsche Metrik (RM) und  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (RMf).

#### Bemerkung:

- $g$  hängt glatt von  $x$  ab, falls für alle glatten Vektorfelder  $\xi$  und  $\eta$  auf  $M$  die Funktion  $g(\xi, \eta) : M \rightarrow \mathbb{R}$  in einer beliebigen Karten  $(U, \varphi)$  mit lokalen Koordinaten  $x^1, \dots, x^d$  die Funktion  $x \mapsto g_{ij}(x) \xi^i(x) \eta^j(x)$  glatt ist, wobei  $\xi(x) = \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \eta(x) = \eta^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$  und  $g_{ij}(x)$  die Darstellungen von  $\xi, \eta$  und  $g$  in  $x^1, \dots, x^d$  auf  $U$  sind.
- Eine RM  $g$  ist ein glattes  $(0, 2)$ -Tensorfeld. Ein glattes Kovektorfeld  $\omega$  ist ein glatter  $(0, 1)$ -Tensor. Ein glattes Vektorfeld ist ein glattes  $(1, 0)$ -Vektorfeld.
- Man schreibt auch gern  $g = g_{ij} dx^i dx^j$  wobei  $dx^i dx^j$  eine Kurznotation für das Tensorprodukt  $dx^i \otimes dx^j$  der Kovektoren  $dx^i$  und  $dx^j$  ist, definiert als bilineares Funktional auf  $T_x M$  durch

$$dx^i dx^j(\xi, \eta) := dx^i \otimes dx^j(\xi, \eta) := \langle dx^i, \xi \rangle \langle dx^j, \eta \rangle, \xi, \eta \in T_x M,$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  die duale Paarung ist. Also ist  $\langle dx^i, \xi \rangle = \xi(x^i) = \xi^i$  die  $i$ -te Komponente von  $\xi$  in  $x^1, \dots, x^d$  und somit sieht man auch hier

$$g(\xi, \eta) = g_{ij} \xi^i \eta^j.$$

#### Beispiel 0.3.2:

Betrachten wir den  $\mathbb{R}^d$  mit kartesischen Koordinaten  $x^1, \dots, x^d$  (global), d.h. für alle  $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d$  gilt  $x^i(z) = z_i$  mit

$$g_{\mathbb{R}^d} = (dx^1)^2 + \dots + (dx^d)^2.$$

Dann gilt für  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^d)$  und  $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^d)$  aus  $\mathbb{R}^d$

$$g_{\mathbb{R}^d}(\xi, \eta) = \delta_{ij} \xi^i \eta^j = \delta_{ij} \xi^i \eta^j,$$

d.h.  $g_{\mathbb{R}^d}$  ist das Standard-Skalarprodukt. Wir haben hier  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^d)$  und  $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  identifiziert.

**Satz 0.3.3:**

Zu jeder Mannigfaltigkeit  $M$  kann man eine RM  $g$  finden, sodass  $(M, g)$  eine RMf ist.

*Beweis für  $M$  kompakt:*

Sei  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1, \dots, k}$  ein Atlas und  $\{\psi_i\}_{i=1, \dots, k}$  eine Zerlegung der Eins zur Überdeckung  $\{U_i\}_{i=1, \dots, k}$ . Sei  $x \in M$ ,  $\xi, \eta \in T_x M$  und  $U_j$  eine Karte um  $x$  mit lokalen Koordinaten  $(x_{(j)}^1, \dots, x_{(j)}^d)$ . Seien  $(\xi_{(j)}^1, \dots, \xi_{(j)}^d)$  und  $(\eta_{(j)}^1, \dots, \eta_{(j)}^d)$  die Komponenten von  $\xi$  und  $\eta$  in diesen Koordinaten, d.h.  $\xi = \xi_{(j)}^i \frac{\partial}{\partial x_{(j)}^i}$ ,  $\eta = \eta_{(j)}^i \frac{\partial}{\partial x_{(j)}^i}$ . Setze

$$g_x(\xi, \eta) := \sum_{j=1, \dots, k : x \in U_j} \psi_j(x) \xi_{(j)}^i \eta_{(j)}^i.$$

Dies ist eine Riemannsche Metrik auf  $M$ : Für die Glattheit von  $g$  wähle glatte Vektorfelder  $\xi$  und  $\eta$  und setze diese ein. Dann ist  $g$  eine glatte Funktion in  $x$ .  $\square$

**Bemerkung:**

Die Idee ist es, die Euklidischen Metriken in den Koordinaten zusammenzukleben mittels einer Zerlegung der Eins.

Für nichtkompakte Mannigfaltigkeit läuft der Beweis analog ab (d.h. Zerlegung der Eins und Überdeckungen sind lokal endlich).

Wir betrachten nun RM unter Koordinatenwechseln.

**Lemma 0.3.4:**

Seien  $x^1, \dots, x^d$  und  $y^1, \dots, y^d$  lokale Koordinaten in Kartengebieten  $U$  und  $V$  und bezeichnen  $g^x$  und  $g^y$  die Matrizen einer RM  $g$  in den Koordinaten  $x^1, \dots, x^d$  bzw.  $y^1, \dots, y^d$ . Sei  $J = (J_i^k)_{i,k=1, \dots, d}$  die Jacobi-Matrix des Kartenwechsels  $y^k = y^k(x^1, \dots, x^d)$ , d.h.  $J_i^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}$ , wobei  $k$  Zeilenindex und  $i$  Spaltenindex. Dann gilt

$$g^x = J^T g^y J \text{ in } U \cap V.$$

*Beweis:*

Die Kettenregel liefert

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k} = J_i^k \frac{\partial}{\partial y^k},$$

also folgt

$$g_{ij}^x = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_g = J_i^k J_j^l \left\langle \frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l} \right\rangle_g = J_i^k g_{kl}^y J_j^l = (J^T g^y J)_{ij}.$$

$\square$

Wir untersuchen die Auswirkung einer RM  $g$  auf die Dualität von  $T_x M$  und  $T_x^* M$ . Für einen gegebenen Tangentialvektor  $\xi \in T_x M$  sei ein Kovektor  $g_x \xi \in T_x^* M$  definiert durch die Identität

$$\forall \eta \in T_x M : \langle g_x \xi, \eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle_{g(x)}.$$

Dadurch wird  $g_x$  zu einer linearen Abbildung  $g(x) : T_x M \rightarrow T_x^* M$ . In lokalen Koordinaten hat man dann

$$(g_x \xi)_j \eta^j = g_{ij}(x) \xi^i \eta^j,$$

also  $(g_x \xi)_j = g_{ij}(x) \xi^i$ . Die Matrixelemente der linearen Abbildung  $g_x$  sind also gerade  $g_{ij}(x)$ .

**Achtung:** Oft schreibt man auch  $\xi_j := (g(x)\xi)_j$ .

Für  $\xi \neq 0$  gilt auch  $g_x \xi \neq 0$ , denn  $\langle g_x \xi, \xi \rangle = \langle \xi, \xi \rangle_{g(x)} > 0$ . Also ist  $g_x : T_x M \rightarrow T_x^* M$  injektiv und daher bijektiv. Die Umkehrabbildung bezeichnen wir mit  $g_x^{-1} : T_x^* M \rightarrow T_x M$  und ihre Matrixelemente mit  $g^{ij}$ , d.h.  $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$  im Sinne von Matrizen.

Für einen Kovektor  $\omega \in T_x^* M$ ,  $\omega = \omega_j dx^j$  ist  $g_x^{-1} \omega \in T_x M$  der Vektor mit Komponenten  $\omega^i := (g_x^{-1} \omega)^i = g^{ij} \omega_j$ . Insbesondere kann  $g_x^{-1}$  als Skalarprodukt auf  $T_x^* M$  interpretiert werden durch

$$\langle \zeta, \omega \rangle_{g^{-1}} = \langle g_x^{-1} \zeta, g_x^{-1} \omega \rangle_g = \langle \zeta, g_x^{-1} \omega \rangle$$

bzw. in lokalen Koordinaten  $\langle \zeta, \omega \rangle_{g^{-1}} = g^{ij} \zeta_i \omega_j$ , wobei  $\zeta = \zeta_i dx^i$  und  $\omega = \omega_j dx^j$  Elemente von  $T_x^* M$ .

Die Dualität zwischen  $T_x M$  und  $T_x^* M$  nutzt man nun, um den Gradienten einer Funktion zu erklären. Für eine glatte Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir den *Gradienten*  $\nabla f(x)$  von  $f$  in  $x$  als den Vektor

$$\underbrace{\nabla f(x)}_{\in T_x M} = g_x^{-1} \underbrace{df(x)}_{\in T_x^* M},$$

wobei  $g_x^{-1} : T_x^* M \rightarrow T_x M$  als lineare Abbildung verstanden wird. Für  $\xi = \nabla f(x)$  und  $\eta \in T_x M$  hat man

$$\langle \nabla f(x), \eta \rangle_g = \langle df(x), \eta \rangle = \frac{\partial f(x)}{\partial \eta},$$

und in lokalen Koordinaten ergibt sich

$$(\nabla f(x))^i = g^{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Ist  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere glatte Funktion, so folgt

$$\langle \nabla f(x), \nabla h(x) \rangle_g = \langle df(x), \nabla h(x) \rangle = g^{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial h}{\partial x^j} = \langle df, dh \rangle_{g^{-1}}.$$

# 1 Der Laplace-Beltrami-Operator für Funktionen

## 1.1 Riemannsches Maß

Sei  $M$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Mit  $\mathcal{B}(M)$  bezeichnen wir die  $\sigma$ -Algebra der Borel-Mengen über  $M$ .

Sei  $(U, \varphi)$  eine Karte auf  $M$ . Dann kann man  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^d$  betrachten mit der Einschränkung des  $d$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes  $\lambda$  auf  $\varphi(U)$ . Ist  $E \subset M$ , so ist nach Definition aus der Maßtheorie die Menge  $\varphi(E \cap U)$  Lebesgue-messbar in  $\varphi(U)$ , falls für alle  $B \subset \varphi(U)$  gilt

$$\lambda(B) \geq \lambda(\varphi(E \cap U) \cap B) + \lambda((\varphi(U) \setminus \varphi(E \cap U)) \cap B),$$

d.h.

$$\lambda(\varphi(\varphi^{-1}(B))) \geq \lambda(\varphi(E \cap U) \cap \varphi(\varphi^{-1}(B))) + \lambda((\varphi(U) \setminus \varphi(E \cap U)) \cap \varphi(\varphi^{-1}(B))). \quad (*)$$

Wegen der Injektivität von  $\varphi$  ist die rechte Seite gerade

$$\lambda(\varphi(E \cap U \cap \varphi^{-1}(B))) + \lambda(\varphi(U \setminus E \cap \varphi^{-1}(B))).$$

Außerdem ist  $\lambda \circ \varphi$  (oder  $\lambda_{\varphi^{-1}}$  wie in der Stochastik) ein äußeres Maß auf  $U$  und (\*) ist gerade

$$\lambda \circ \varphi(\varphi^{-1}(B)) \geq \lambda \circ \varphi(E \cap U \cap \varphi^{-1}(B)) + \lambda \circ \varphi(U \setminus E \cap \varphi^{-1}(B))$$

für alle  $B \subset \varphi(U)$ . Wegen der Bijektivität von  $\varphi$  ist das aber genau die Forderung, dass  $E \cap U$  bzgl.  $\lambda \circ \varphi$  in  $U$  messbar ist. Man identifiziert deshalb die beiden Messbarkeitsbegriffe. Wir sagen,  $E \cap U$  ist (*Lebesgue-*)messbar in  $U$ , falls  $\varphi(E \cap U)$  (Lebesgue-)messbar in  $\varphi(U)$  ist.

$E \subset M$  heißt dann *messbar*, falls für jede Karte  $(U, \varphi)$   $E \cap U$  messbar in  $U$  ist.

**Notation:** Bei fixierter Karte  $(U, \varphi)$  schreibt man wieder  $\lambda$  für  $\lambda \circ \varphi$ . Man nennt  $\lambda$  dann auch das Lebesgue Maß auf der Mf  $M$ . Die Gesamtheit aller messbaren Mengen im obigen Sinne bildet eine  $\sigma$ -Algebra, welche wir mit  $\Lambda(M)$  bezeichnen. Man hat  $\mathcal{B}(M) \subset \Lambda(M)$ . Sei nun  $g$  eine Riemannsche Metrik auf  $M$ . Wir zeigen, dass es auf jeder RMf.  $(M, g)$  ein kanonisches Maß  $\nu$  auf der  $\sigma$ -Algebra der  $\Lambda(M)$  aller Lebesgue-messbaren Mengen gibt, das sogenannte Riemannsche Maß (bzw. Riemannsche Volumen).

### Bemerkung 1.1.1:

- Auf  $\mathbb{R}^d$  ist  $\lambda$  kanonisch (d.h. bewegungsinvariant und normiert auf dem Einheitswürfel). Auf topologischen Gruppen (insbesondere Lie-Gruppen) sind Haarsche Maße kanonisch. Diese Situation ist aber sehr speziell: Bereits für sogenannte Subriemannsche Mannigfaltigkeiten ist kein kanonisches Maß mehr bekannt, noch weniger für allgemeine metrische, topologische oder messbare Räume.

### Satz 1.1.2:

Für jede RMf.  $(M, g)$  existiert ein eindeutig bestimmtes Maß  $\nu$  auf  $\Lambda(M)$ , sodass in jeder Karte  $(U, \varphi)$  die Identität  $d\nu = \sqrt{\det g} d\lambda$  gilt, wobei  $g = (g_{ij})_{ij}$  die Matrix der Riemannschen Metrik  $g$  in  $U$  ist und  $\lambda$  das Lebesgue-Maß in  $U$ . Ferner hat man:

- (i) Jede  $\nu$ -Nullmenge ist messbar.
- (ii)  $\nu(\Omega) > 0$  für jede nichtleere offene Teilmenge  $\Omega \subset M$ .
- (iii)  $\nu(K) < \infty$  für kompakte Mengen  $K \subset M$ .
- (iv) Für alle  $A \in \Lambda(M)$  gilt

$$\nu(A) = \sup\{\nu(K) : K \subset A \text{ kompakt}\} \quad (\text{innere Regularität})$$

sowie

$$\nu(A) = \inf\{\nu(\Omega) : \Omega \supset A \text{ offen}\}. \quad (\text{äußere Regularität})$$

*Beweis:*

Sei  $(U, \varphi)$  eine Karte. Für jede messbare  $A \subset U$  setzen wir

$$\nu(A) := \int_A \sqrt{\det g} d\lambda. \quad (\#)$$

Dann ist  $\nu$  ein Maß auf  $\Lambda(U)$  der  $\sigma$ -Algebra der messbaren Mengen in  $U$ . Das Maß  $\nu$ , welches in jeder Karte  $(U, \varphi)$  gemäß (#) definiert ist, kann eindeutig fortgesetzt werden zu einem Maß auf  $\Lambda(M)$ . Wir stellen die Kompatibilität sicher: Sind  $U$  und  $V$  zwei Karten auf  $M$  und ist  $A$  messbar in  $U \cap V$ , dann hat  $\nu$  nach (#) für beide Karten den gleichen Wert. Denn seien  $x^1, \dots, x^d$  und  $y^1, \dots, y^d$  lokale Koordinaten in  $U$  und  $V$  und  $g^x$  und  $g^y$  die zugehörigen Matrizen von  $g$ , so müssen wir zeigen, dass für jede messbare Menge  $A \subset W := U \cap V$  gilt:  $\int_A \sqrt{\det g^x} dx = \int_A \sqrt{\det g^y} dy$ , wobei  $dx$  und  $dy$  das Lebesgue-Maß in  $U$  und  $V$  bezeichnet. Nach Lemma 0.3.2 (Transformation von  $g$  unter Kartenwechseln) gilt:

$$\det g^x = (\det J)^2 \det g^y.$$

Wir benutzen den Transformationssatz für das Lebesgue-Integral:

$$\int_W f dy = \int_W f |\det J| dx$$

für nichtnegative, messbare Funktionen  $f$  mit der Jacobi-Matrix des Kartenwechsels  $J$ . Anwendung für  $f := \mathbb{1}_A \sqrt{\det g^y}$  für  $A \subset W$  messbar ergibt

$$\int_A \sqrt{\det g^y} dy = \int_A \sqrt{\det g^y} |\det J| dx = \int_A \sqrt{\det g^x} dx.$$

Damit gilt die Behauptung.

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit von  $\nu$ : Nach Lemma 0.1.9 existiert eine Familie  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von relativkompakten Karten, die  $M$  überdecken und so, dass jedes  $\bar{U}_i$  in einer Karte enthalten ist. Für  $A \in \Lambda(M)$  definieren wir eine Folge von Mengen  $A_i \subset U_i$  durch

$$A_1 := A \cap U_1, A_2 := A \cap U_2 \setminus U_1, \dots, A_i := A \cap U_i \setminus U_{i-1} \setminus \dots \setminus U_1. \quad (\Delta)$$

Dann ist  $A$  eine disjunkte Vereinigung der  $A_i$  und somit muss jede Fortsetzung von  $\nu$  auf ganz  $\Lambda(M)$  die Identität  $\nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$  erfüllen. Da aber alle  $\nu(A_i)$  bereits eindeutig bestimmt sind, so ist es auch  $\nu(A)$ .

Wir zeigen noch, dass  $\nu$   $\sigma$ -additiv auf  $M$  ist, und klären damit die Existenz. Ist  $A = \cup_{i=1}^{\infty} A^k$  eine Vereinigung paarweise disjunkter Mengen  $A^k \in \Lambda(M)$ , so definieren wir Mengen  $A_i$  und  $A_i^k$  wie in  $(\Delta)$ . Dann sind die Vereinigungen  $A_i = \cup_{k=1}^{\infty} A_i^k$  disjunkt und da  $\nu$  in jeder Karte  $\sigma$ -additiv ist (wegen  $(\sharp)$ ), gilt  $\nu(A_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_i^k)$ . Die Wechsel der Reihen ist erlaubt, da alles nichtnegativ ist, und Summation ergibt deshalb

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_i^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A^k).$$

Wir zeigen  $(i)$ , d.h. dass jede Nullmenge messbar ist. Sei also  $N$  eine  $\nu$ -Nullmenge, d.h. es existiert ein  $A \in \Lambda(M)$  mit  $\nu(A) = 0$  und  $A \supset N$ . Definiere  $N_i$  wie die  $A_i$  in  $(\Delta)$ , so ergibt sich  $N_i \subset A_i \subset U_i$ . Wegen  $\nu(A_i) = 0$  folgt mit  $(\sharp)$  und  $\sqrt{\det g} > 0$  in  $U_i$ , dass  $\lambda(A_i) = 0$ , also ist  $N_i$  eine Lebesgue-Nullmenge in  $U_i$ . Da das Lebesguemaß vollständig ist, ist jede Lebesgue-Nullmenge messbar, gilt  $N_i \in \Lambda(M)$  und damit also auch  $N \in \Lambda(M)$ . (Dazu betrachte die Übungsaufgabe:  $N_i$  ist eine  $\lambda \circ \varphi$ -Nullmenge genau dann, wenn  $\varphi(N_i)$  eine  $\lambda$ -Nullmenge ist).

Nun zu  $(ii)$ : Sei  $\Omega \subset M$  nichtleer und offen, so existiert eine Karte  $U \subset M$  (es existiert eine Karte  $U'$  mit  $U' \cap \Omega \neq \emptyset$ , so ist auch  $U := \Omega \cap U'$  eine Karte). Man hat  $\nu(\Omega) \geq \nu(U) = \int_U \underbrace{\sqrt{\det g}}_{>0} d\lambda > 0$ .

Zu  $(iii)$ : Sei  $K \subset M$  kompakt. Dann existieren endlich viele Karten  $U_i$ , die  $K$  überdecken, d.h.  $K$  ist eine endliche Vereinigung von Mengen  $K_i := K \cap U_i$ . Anwendung von  $(\sharp)$ , für eine Karte, die  $\overline{U_i}$  enthält, ergibt  $\nu(K_i) < \infty$ , da  $\sqrt{\det g}$  beschränkt ist auf  $\overline{U_i}$ .

Als letztes zeigen wir  $(iv)$ : Für die innere Regularität sei  $A \in \Lambda(M)$  eine relativkompakte Menge. Dann existieren  $U_1, \dots, U_m$ , die  $\overline{A}$  überdecken. Wir dürfen annehmen, dass alle  $\overline{U_i}$  kompakt und jeweils in einer anderen Karte  $V_i$  enthalten sind. Wegen der Regularität von  $\lambda$  kann jede Menge  $A_i = A \cap U_i$  approximiert werden durch eine kompakte Menge  $K_i \subset A_i$ , d.h. sind  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  beliebig vorgegeben, so existieren  $K_i$  mit  $\lambda(A_i \setminus K_i) < \varepsilon_i$  und mit  $K = \cup_{i=1}^m K_i$  folgt mit der Subadditivität  $\nu(A \setminus K) \leq \sum_{i=1}^m \nu(A_i \setminus K_i) \leq \sum_{i=1}^m \sup_{U_i} \sqrt{\det g} \varepsilon_i$ . Ist nun  $A \in \Lambda(M)$  beliebig, so nimmt man eine Ausschöpfung  $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von  $M$  durch kompakte Mengen  $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$  und wende voriges an auf  $A_k := \Omega_k \cap A$ .

Zur äußeren Regularität: Sei  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Familie von Karten, die  $M$  überdeckt mit  $\overline{U_i}$  kompakt und  $\overline{U_i}$  enthalten in einer Karten  $V_i$ , sodass die  $\overline{V_i}$  kompakt und in einer Karte enthalten ist. (Übung: Ist  $W \subset M$  offen und  $K \subset W$  kompakt, so existiert  $V \subset M$  offen mit  $K \subset V$  und  $\overline{K} \subset W$ .) Wegen der Regularität von  $\lambda$  kann die Menge  $A_i = A \cap U_i$  approximiert werden durch eine offene Menge  $\Omega_i \supset A_i$  mit  $\Omega_i \subset V_i$  und  $\lambda(\Omega_i \setminus A_i) < \varepsilon_i$  für beliebig vorgegebene  $\varepsilon_i > 0$ . Für  $\Omega = \cup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$  gilt dann

$$\nu(\Omega \setminus A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sup_{\overline{V_i}} \sqrt{\det g} \right) \varepsilon_i,$$

woraus die Regularität folgt. □

## 1.2 Divergenzsatz

Sei  $(M, g)$  eine RMf. Dann ist das Riemannsche Maß  $\nu$  nach obigem Satz auf kompakten Mengen endlich, sodass jede stetige Funktion  $\varphi \in \mathcal{C}_0(M)$  mit kompaktem Träger  $\nu$ -integrierbar ist.

**Lemma 1.2.1** (Fundamentallema der Variationsrechnung):

Ist  $f \in \mathcal{C}(M)$  und  $\int_M f \varphi d\nu = 0$  für alle  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$ , so gilt  $f = 0$  auf  $M$ .

*Beweis:*

Wir nehmen an, dass  $f(x_0) > 0$  für ein  $x_0 \in M$ . Dann ist  $f(x) > 0$  für  $x$  aus einer offenen Umgebung  $\Omega$  von  $x_0$ . Sei  $U$  eine relativkompakte, offene Umgebung von  $x_0$  mit  $\bar{U} \subset \Omega$  und  $\varphi$  eine cutoff Funktion, sodass  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ,  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\text{supp } \varphi \subset \Omega$  und  $\varphi \equiv 1$  auf  $\bar{U}$ . Wegen  $\nu(U) > 0$  folgt

$$\int_M f \varphi d\nu = \int_\Omega f \varphi d\nu \geq \int_U f d\nu > 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Wir kennen bereits den Begriff des Gradienten einer glatten Funktion auf  $M$ . Wir betrachten jetzt den Begriff der Divergenz eines glatten Vektorfeldes.

**Satz 1.2.2** (Divergenzsatz):

Für jedes glatte Vektorfeld  $v$  auf  $M$  existiert eine eindeutig bestimmte, glatte Funktion  $\text{div } v$ , sodass für alle  $u \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$  die Identität

$$\int_M (\text{div } v) u d\nu = - \int_M \langle v, \nabla u \rangle_g d\nu. \quad (*)$$

**Definition 1.2.3** (Divergenz):

Die Funktion  $\text{div } v$  heißt Divergenz des Vektorfeldes  $v$ .

**Korollar 1.2.4:**

Die Identität (\*) des vorigen Satzes gilt auch, falls  $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$  ist und  $v$  ein glattes Vektorfeld mit kompaktem Träger ist.

*Beweis:*

Übung. Benutze dazu ein cut-off Argument. □

*Beweis vom Divergenzsatz 1.2.2:*

Zur Eindeutigkeit: Angenommen es existieren zwei solcher Funktionen  $\text{div } v, \tilde{\text{div}} v$ , so haben wir für alle  $u \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$

$$\int_M (\text{div } v) u d\nu = \int_M (\tilde{\text{div}} v) u d\nu,$$

sodass aus dem Fundamentallema der Variationsrechnung 1.2.1  $\text{div } v = \tilde{\text{div}} v$  folgt.

Zur Existenz: Wir zeigen zunächst, dass  $\text{div } v$  in jeder Karte definiert werden kann: Ist  $U$

eine Karte auf  $M$  mit lokalen Koordinaten  $x^1, \dots, x^d$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_U \langle v, \nabla u \rangle_g d\nu &= \int_U \langle du, v \rangle d\nu = \int_U v^k \frac{\partial u}{\partial x^k} \sqrt{\det g} d\lambda \\ &= - \int_U \frac{\partial}{\partial x^k} \left( v^k \sqrt{\det g} \right) u d\lambda = - \int_U \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( v^k \sqrt{\det g} \right) u d\nu, \quad (\Delta) \end{aligned}$$

wobei sich die partielle Integration in  $U$  aus der partiellen Integration in  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^d$  überträgt (Übung). Wir setzen also  $\operatorname{div} v := \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( v^k \sqrt{\det g} \right)$ , wobei  $v = v^k \frac{\partial}{\partial x^k}$  ist. Sind  $U, V$  nun zwei Karten, dann kann man  $\operatorname{div} v$  mittels  $(\Delta)$  in  $U$  und  $V$  definieren. Auf  $U \cap V$  stimmen sie überein, was man wie in der Eindeutigkeitsaussage zeigt (d.h. testen mit Funktionen  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U \cap V)$  und Anwendung von Lemma 1.2.1).

Also definiert  $(\Delta)$  die Funktion  $\operatorname{div} v$  als eine glatte Funktion auf ganz  $M$  und  $(*)$  gilt für alle Testfunktionen  $u \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$  mit Träger in einer einzelnen Karte.

Zeige wir nun  $(*)$  für allgemeines  $u \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$ : Sei  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Kartenüberdeckung von  $M$ . Mittels einer Zerlegung der Eins (welche endlich ist, da  $K := \operatorname{supp} u$  kompakt ist) kann man  $u$  schreiben als Summe  $u = \sum_{i=1}^k u_i$  von glatten Funktionen  $u_i$  mit  $\operatorname{supp} u_i \subset U_{k_i}$  für einen gewissen Index  $k_i$ . Also gilt  $(*)$  für jedes  $u_i$  und Summation liefert die Formel für  $u$ .  $\square$

Man hat  $\operatorname{div} v = \frac{\partial v^k}{\partial x^k} + v^k \frac{\partial}{\partial x^k} \log \sqrt{\det g}$ . Ist insbesondere  $\det g \equiv 1$ , so folgt wie im  $\mathbb{R}^d$  die Identität  $\operatorname{div} v = \frac{\partial v^k}{\partial x^k}$ .

### 1.3 Der Laplace-Beltrami-Operator

Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

**Definition 1.3.1:**

Der Laplace-Beltrami-Operator auf  $(M, g)$  ist definiert durch  $\Delta := \operatorname{div} \circ \nabla$ , d.h.

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f), f \in C^\infty(M).$$

Für eine glatte Funktion  $f$  auf  $M$  ist also auch  $\Delta f$  eine glatte Funktion auf  $M$ . In lokalen Koordinaten  $x^1, \dots, x^d$  hat man  $\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \sqrt{\det g} g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right)$ . Zur Erinnerung:  $\nabla f = \left( g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Wende nun die Formel der Divergenz von oben mit  $v^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$  an.

**Beispiel:**

Ist  $g_{ij} = \delta_i^j$ , so auch  $g^{ij}$  und man hat  $\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2}$ .

Wir können nun die Greensche Formel auf  $M$  beweisen.

**Satz 1.3.2** (Gauss-Green-Identität):

Sind  $u, v$  glatte Funktionen auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  und hat eine von ihnen kompakten Träger, so gilt

$$\int_M u \Delta v d\nu = - \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle_g d\nu = \int_M v \Delta u d\nu.$$

**Bemerkung:**

Für  $u, v \in C_c^\infty(M)$  nennt man die Größe  $E(u) := \int_M \langle \nabla u, \nabla u \rangle_g d\nu$  auch die Energie von  $u$  und  $E(u, v) = \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle_g d\nu$  die gegenseitige Energie von  $u$  und  $v$ .

*Beweis:*

Für das Gradientenfeld  $\nabla v$  gilt  $\operatorname{supp} \nabla v \subset \operatorname{supp} v$ , also ist  $\operatorname{supp} u$  oder  $\operatorname{supp} \nabla v$  kompakt.

Satz 1.2.2 bzw. Korollar 1.2.4 liefert nun

$$\begin{aligned} \int u \Delta v d\nu &= \int_M u \operatorname{div}(\nabla v) d\nu = - \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle_g d\nu = - \int_M \langle \nabla v, \nabla u \rangle_g d\nu \\ &= \int v \operatorname{div}(\nabla u) d\nu = \int v \Delta u d\nu. \end{aligned}$$

□

## 1.4 Gewichtete Mannigfaltigkeiten

Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für manche Zwecke (z.B. Krümmungstheorie, Schrödingeroperatoren  $\Delta f + Vf$  für ein Potential  $V$  oder Drift-Terme  $\Delta f + b\nabla f$ ) ist es wichtig, folgende Erweiterung zu betrachten: Ist  $Y = Y(x)$  eine glatte, strikt positive Funktion auf  $M$ , so betrachten wir das Maß  $d\mu = Yd\nu$  auf  $\Lambda(M)$ . Die Funktion  $Y$  heißt auch Dichte von  $\mu$  (bzgl.  $\nu$ ). Für  $\mu = \nu$  hat man  $Y \equiv 1$ , d.h. auch dieser Fall ist mit eingeschlossen.

### Definition 1.4.1:

Ein Tripel  $(M, g, \mu)$  heißt gewichtete Mannigfaltigkeit, falls  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\mu$  ein Maß auf  $\Lambda(M)$  mit glatter  $\nu$ -Dichte ist.

### Bemerkung:

Die Existenz von Dichten ist durch den Satz von Radon-Nikodym geregelt. Die Glattheit ist eine sehr komplizierte Fragestellung. Als Beispiele seien die Regularitätstheorie von PDEs und heat kernels oder die Dichten Gaußscher ZV und das Malliavin-Kalkül erwähnt.

Die Definition des Gradienten ist unabhängig von der Wahl des Volumens. Unsere Definition von Divergenz und vom Laplace-Beltrami-Operator müssen aber modifiziert werden. Wir definieren die *Divergenz*  $\operatorname{div}_\mu v$  eines glatten Vektorfeldes bzgl.  $\mu$  durch

$$\operatorname{div}_\mu v := \frac{1}{Y} \operatorname{div}(Yv),$$

wobei  $\operatorname{div}$  die klassische Divergenz ist. Man erhält dann für  $u \in C_c^\infty(M)$

$$\int (\operatorname{div}_\mu v) u d\mu = - \int_M \langle v, \nabla u \rangle_g d\mu.$$

Wir definieren ebenso den *gewichteten Laplace-Operator* bzgl.  $\mu$   $\Delta_\mu$  durch  $\Delta_\mu := \operatorname{div}_\mu \circ \nabla$ . Damit erhält man wie zuvor die Gauß-Green-Formel:

$$\int_M u (\operatorname{div}_\mu v) d\mu = - \int \langle \nabla u, \nabla v \rangle_g d\mu = \int (\operatorname{div}_\mu u) v d\mu$$

In lokalen Koordinaten  $x^1, \dots, x^d$  hat man

$$\operatorname{div}_\mu v = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^i} (\rho v^i) \quad \text{und} \quad \Delta_\mu = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right),$$

wobei  $\rho = Y\sqrt{\det g}$ , d.h.  $d\mu = \rho d\lambda$  in  $U$ . Man erhält

$$\Delta_\mu = g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \underbrace{\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} g^{ij} + \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i} \right)}_{\text{Drift-Term}} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

### Beispiel:

Für  $(\mathbb{R}, g, \mu)$  mit  $g$  als Euklidischem Skalarprodukt und  $d\mu = Ydx$  hat man

$$\Delta_\mu f = \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial x} \left( Y \frac{\partial f}{\partial x} \right) = f'' + \frac{Y'}{Y} f'.$$

Im Fall  $Y = e^{-x^2}$  ergibt sich also

$$\Delta_\mu f(x) = f''(x) - 2x f'(x),$$

der sogenannte Ornstein-Uhlenbeck-Generator.

**Exkurs:**

Sei  $L = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  im  $\mathbb{R}^d$ . Dazu gehört ein stochastischer Prozess der Form  $dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt$ , wobei  $a = \sigma\sigma^T$ . Sei  $A$  eine invariante messbare Menge in  $\Omega$ , d.h.  $A = \Theta_t^{-1}A$ , wobei dies der Markov-Shift ist, so ist  $h(x) := \mathbb{P}_x(A) > 0$  eine  $L$ -harmonische Funktion, d.h.  $L(h) = 0$ . Definieren wir nun den Operator  $\tilde{L} := h^{-1}Lh$  (ground state transformation, vgl. Gross), so ist  $\tilde{L} = L + a \frac{\nabla h}{h} \cdot \nabla$ .

## 2 Sobolev-Räume, Laplace-Operator und Wärmeleitung

### 2.1 Distributionen und Sobolev-Räume

Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit. Betrachten wir den Vektorraum  $\mathcal{C}_c^\infty(M)$  zusammen mit der folgenden Konvergenz: Wir sagen, dass  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ , falls (1) alle Träger  $\text{supp } \varphi_k$  enthalten sind in einer kompakten Teilmenge  $K$  von  $M$  und (2) in jeder Karte  $U$  und für jeden Multiindex  $\alpha$  konvergiert  $\partial^\alpha \varphi_k \rightarrow \partial^\alpha \varphi$  gleichmäßig auf  $U$ . Mit  $\mathcal{D}(M)$  bezeichnen wir  $\mathcal{C}_c^\infty(M)$  versehen mit der durch (1) und (2) festgelegten Topologie (Raum der Testfunktionen).

#### Bemerkung:

- i)  $\mathcal{D}(M)$  ist ein lokalkonvexer Raum, alternativ beschrieben durch eine Familie von Halbnormen der Form  $p_K^\alpha(\varphi) = \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$ ,  $\alpha$  Multiindex und  $K \subset M$  kompakt.
- ii) Bekannte Namen aus dem Bereich sind z.B. Dieudonne, Grothendieck, Köthe oder Schwartz.

Eine Distribution ist ein stetiges, lineares Funktional auf  $\mathcal{D}(M)$  und den Vektorraum aller Distributionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{D}'(M)$ . Wir schreiben  $(u, \varphi)$  für die duale Paarung einer Funktion  $\varphi \in \mathcal{D}(M)$  und einer Distribution  $u \in \mathcal{D}'(M)$ . Die Konvergenz in (und damit die Topologie auf)  $\mathcal{D}'(M)$  ist definiert durch  $u_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} u$ , falls  $(u_k, \varphi) \xrightarrow{\mathcal{D}} (u, \varphi)$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(M)$ .

Jede offene Menge  $\Omega \subset M$  ist selbst wieder eine Mannigfaltigkeit (durch Einschränkung der Karten) und man kann analog  $\mathcal{D}(\Omega)$  und  $\mathcal{D}'(\Omega)$  definieren. In jeder fixierten Karte  $U \subset M$  sind die Räume  $\mathcal{D}(U)$  und  $\mathcal{D}'(U)$  identisch mit denen im  $\mathbb{R}^d$ -Sinne.

Wie im  $\mathbb{R}^d$  wollen wir lokal integrierbare Funktionen als Distributionen auffassen. Sei dazu  $(M, g, \mu)$  eine gewichtete Mannigfaltigkeit. Die Lebesgue-Räume  $L^p(M) := L^p(M, \mu)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  sind wie üblich definiert. Für  $1 \leq p < \infty$  ist  $L^p(M)$  separabel und  $\mathcal{C}_c^\infty(M)$  ist dicht.

Mit  $L_{loc}^p(M)$  bezeichnen wir den Raum der (Äquivalenzklassen von) messbaren Funktionen  $f$  auf  $M$ , sodass  $f \in L^p(\Omega)$  für jede relativkompakte offene Menge  $\Omega \subset M$  ist.  $L_{loc}^p(M)$  ist ebenfalls ein linearer Raum und die Topologie ist definiert durch die Familie von Halbnormen  $f \mapsto \|f\|_{L^p(\Omega)}$  für alle relativkompakten, offenen  $\Omega$ . Man hat  $L^p(M) \subset L_{loc}^p(M) \subset L_{loc}^1(M)$  (stetige Einbettung).

Einer Funktion  $f \in L_{loc}^1(M)$  kann man eine Distribution zuordnen durch  $(f, \varphi) := \int_M f \varphi d\mu$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(M)$ .

#### Lemma 2.1.1:

Sei  $f \in L_{loc}^1(M)$ . Dann ist  $f = 0$  f.ü. genau dann, wenn  $f = 0$  in  $\mathcal{D}'(M)$ , d.h. falls  $\int_M f \varphi d\mu = 0$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(M)$ .

*Beweis:*

Übung. Die Idee ist die Rückführung auf die euklidische Situation mittels Karten. Im euklidischen nutze das Glättungsverfahren. Alternativ lässt sich dies indirekt mittels der Dichtheit glatter Funktionen in  $L^1(U \cap K)$  zeigen.  $\square$

Also ist  $L^1_{loc}(M)$  injektiv in  $\mathcal{D}'(M)$  enthalten. Man kann es als Unterraum interpretieren. Auch die Konvergenz  $L^1_{loc}(M)$  impliziert jene in  $\mathcal{D}'(M)$ , d.h. die Einbettung ist stetig. Eine Distribution  $u \in \mathcal{D}'(M)$  verschwindet auf einer offenen Menge  $\Omega \subset M$ , falls  $(u, \varphi) = 0$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Verschwindet  $u$  auf einer Familie von offenen Mengen, so auch auf ihrer Vereinigung. Somit existiert eine maximale offene Menge in  $M$ , auf der  $u$  verschwindet. Das Komplement dieser Menge heißt der Träger von  $u \in \mathcal{D}'(M)$ . Der Träger  $\text{supp } f$  einer Funktion  $f \in L^1_{loc}(M)$  ist definiert als der Träger der entsprechenden Distribution  $f \in \mathcal{D}'(M)$ .

Wir betrachten nun die Vektorfeld-Versionen: Sei  $\vec{\mathcal{D}}(M)$  der Raum aller glatten Vektorfelder auf  $M$  mit kompaktem Träger und mit der Konvergenz  $v_k \xrightarrow{\vec{\mathcal{D}}} v$ , falls (1) alle  $v_k$  haben einen Träger in einer kompakten Menge  $K \subset M$  und (2) in jeder Karte  $U$  mit lokalen Koordinaten  $x^1, \dots, x^d$  gilt:  $\partial^\alpha v_k^i \rightarrow \partial^\alpha v^i$  gleichmäßig auf  $U$  für jeden Multiindex  $\alpha$ , wobei  $v_k^i$  und  $v^i$  die Komponenten von  $v_k$  und  $v$  in  $U$  sind, d.h.  $v_k = v_k^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  und  $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Die Elemente des Dualraumes  $\vec{\mathcal{D}}'(M)$ , versehen mit ähnlicher Topologie wie zuvor, nennen wir Vektorfelder im Distributionensinne.

**Bemerkung:**

Macht man die selbe Konstruktion für glatte Kovektorfelder, erhält man sogenannte 1-Ströme (1-currents). Die Theorie der Ströme geht zurück auf de Rham und Schwartz und spielt eine große Rolle in der Variationsrechnung.

Ein Vektorfeld  $v$  auf  $M$  ist messbar, falls für jede Karte  $U$  die Komponentenfunktionen messbar sind.  $\vec{L}^p(M)$  sei der Raum aller (Äquivalenzklassen von) von messbaren Vektorfeldern  $v$  mit  $|v| := \sqrt{\langle v, v \rangle_g} \in L^p(M)$ . Ähnlich ist  $\vec{L}^p_{loc}(M)$  definiert durch  $|v| \in L^p_{loc}(M)$ .

Die Norm in  $\vec{L}^p(M)$  ist  $\|v\|_{\vec{L}^p(M)} := \| |v| \|_{L^p(M)}$ . Auch die  $\vec{L}^p(M)$  sind Banachräume, für  $p = 2$  Hilberträume mit Skalarprodukt  $\langle v, w \rangle_{\vec{L}^2(M)} := \int_M \langle v, w \rangle_g d\mu$ .

Jedes Vektorfeld  $v \in \vec{L}^1_{loc}(M)$  bestimmt wieder ein Vektorfeld im Distributionensinne durch  $(v, \psi) = \int_M \langle v, \psi \rangle_g d\mu$ . Das ergibt die stetige Einbettung  $\vec{L}^1_{loc}(M) \subset \vec{\mathcal{D}}'(M)$ .

Wir können nun einige Operatoren definieren. Für eine Distribution  $u \in \mathcal{D}'(M)$  definieren wir eine Distribution  $\Delta_\mu u \in \mathcal{D}'(M)$  durch

$$(\Delta_\mu u, \varphi) = (u, \Delta_\mu \varphi) \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{D}(M), \tag{*}$$

analog zu Ableitungen im Distributionen-Sinne auf  $\mathbb{R}^d$ . Beachte, dass aus  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$  die Konvergenz  $\Delta_\mu \varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \Delta_\mu \varphi$  folgt und somit gilt  $(u, \Delta_\mu \varphi_k) \rightarrow (u, \Delta_\mu \varphi)$ , also ist  $\Delta_\mu$  stetig und damit ein Element von  $\mathcal{D}'(M)$ . Wir nennen  $\Delta_\mu : \mathcal{D}'(M) \rightarrow \mathcal{D}'(M)$  den Laplace-Operator im Distributionensinne. Er existiert auf ganz  $\mathcal{D}'(M)$ .

Ist  $u$  glatt, so gilt ebenso (\*), denn mittels Gauß-Green hat man für  $\varphi \in \mathcal{D}(M)$

$$(\Delta_\mu u, \varphi) = \int_M (\Delta_\mu u) \varphi d\mu = \int_M u \Delta_\mu \varphi d\mu = (u, \Delta_\mu \varphi)$$

d.h.  $\Delta_\mu u$  im klassischen und im Distributionensinne stimmen überein.

Für jede Distribution  $u \in \mathcal{D}'(M)$  definieren wir den Gradienten im Distributionensinne  $\nabla u \in \vec{\mathcal{D}}'(M)$  durch die Identität

$$(\nabla u, \psi) = -(u, \operatorname{div}_\mu \psi)$$

für alle  $\psi \in \vec{\mathcal{D}}(M)$ . Ist  $u$  glatt, so erfüllt auch ihr klassischer Gradient diese Identität. Für  $u \in L^2_{loc}(M)$ , sodass  $\nabla u \in \vec{L}^2_{loc}(M)$ , so nennen wir  $\nabla u$  den schwachen Gradienten. Falls  $u \in L^2_{loc}(M)$  und kann man  $\Delta_\mu u$  mit einer  $L^2_{loc}(M)$ -Funktion identifizieren, so nennt man  $\Delta_\mu u$  den schwachen Laplacian von  $u$ . Nicht für alle  $u \in L^2_{loc}(M)$  existiert  $\Delta_\mu u$  im schwachen Sinne.

**Lemma 2.1.2** (Abschließbarkeit vom Operator):

Ist  $u_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} u$ , dann folgt  $\nabla u_k \xrightarrow{\vec{\mathcal{D}}'} \nabla u$ . Gilt insbesondere  $u_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} u$  und  $\nabla u_k \xrightarrow{\vec{\mathcal{D}}'} v$ , so muss gelten  $v = \nabla u$ .

*Beweis:*

Nach Definition gilt für alle  $\psi \in \vec{\mathcal{D}}(M)$ , dass  $(\nabla u_k, \psi) = -(u_k, \operatorname{div}_\mu \psi)$  und somit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\nabla u_k, \psi) = -\lim_k (u_k, \operatorname{div}_\mu \psi) = -(u, \operatorname{div}_\mu \psi) = (\nabla u, \psi),$$

was gerade  $\nabla u_k \rightarrow \nabla u$  ist. Der Rest ist klar.  $\square$

Wir definieren den *Sobolev-Raum*  $W^1(M) := W^1(M, g, \mu) := \{u \in L^2(M) : \nabla u \in \vec{L}^2(M)\}$ , d.h.  $W^1(M)$  enthält diejenigen Funktionen  $L^2(M)$ -Funktionen, deren schwacher Gradient existiert und in  $\vec{L}^2(M)$  ist. Offensichtlich ist  $W^1(M)$  ein linearer Raum. Ein natürliches Skalarprodukt auf  $W^1(M)$  ist

$$\langle u, v \rangle_{W^1} := \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2} = \int_M uv \, d\mu + \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle_g \, d\mu$$

mit zugehöriger Norm  $\|u\|_{W^1}^2 := \langle u, u \rangle_{W^1}$ .

**Lemma 2.1.3:**

$W^1(M)$  ist ein Hilbertraum.

*Beweis:*

Sei  $(u_k)_k$  eine Cauchyfolge in  $W^1(M)$ . Dann ist  $(u_k)_k$  eine Cauchyfolge in  $L^2(M)$  mit Grenzwert  $u \in L^2(M)$ . Aber ebenso ist  $(\nabla u_k)_k$  Cauchyfolge in  $\vec{L}^2(M)$  und hat daher einen Grenzwert  $v \in \vec{L}^2(M)$ . Konvergenz in  $L^2(M)$  bzw.  $\vec{L}^2(M)$  impliziert Konvergenz in  $\mathcal{D}'(M)$ . Und somit folgt aus Lemma 2.1.2, dass  $\nabla u = v$  in  $\mathcal{D}'(M)$ , d.h.  $u$  lässt sich durch eine  $L^2(M)$ -Funktion repräsentieren. Folglich ist  $u \in W^1(M)$  und  $u_k \xrightarrow{W^1(M)} u$ .  $\square$

Auf  $W^1(M)$  ist der schwache Gradient  $u \mapsto \nabla u$  überall definiert.

**Bemerkung:**

Ist  $M \subset \mathbb{R}^d$  eine offene Teilmenge, so ergibt sich die klassische Definition  $W^1(M)$ .  
Man hat  $\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{W^1}$  für alle  $u \in W^1(M)$ , d.h. die Einbettung ist stetig.

## 2.2 Dirichlet-Laplace-Operator und Resolvente

Erneut sei  $(M, g, \mu)$  eine gewichtete Mannigfaltigkeit. Um  $\Delta_\mu$  im  $L^2$ -Kontext betrachten zu können, müssen wir untersuchen, wie sich daraus ein selbstadjungierter Operator auf  $L^2 = L^2(M)$  erhalten lässt. A priori ist  $\Delta_\mu$  definiert auf  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(M)$ , was ein dichter Unterraum von  $L^2$  ist, d.h.  $\Delta_\mu$  mit Definitionsgebiet  $\mathcal{D}$  ist dicht definiert. Wir schreiben für diesen Operator  $A := \Delta_\mu|_{\mathcal{D}}$ . Dieser Operator  $(A, \mathcal{D})$  ist symmetrisch, d.h. man hat  $(Au, v)_{L^2} = (u, Av)_{L^2}$  für alle  $u, v \in \mathcal{D}$ .

Zur Erinnerung: Ein dicht definierter, unbeschränkter linearer Operator  $(T, \text{dom } T)$  auf einem Hilbertraum  $H$  heißt selbstadjungiert, falls  $\text{dom } T = \text{dom } T^*$  und  $T = T^*$  auf  $\text{dom } T$ . Dabei ist  $\text{dom } T^* = \{u \in H : \exists f \in H, \text{ sodass } \langle Tv, u \rangle_H = \langle v, f \rangle_H \text{ für alle } v \in \text{dom } T\}$  und  $T^*u = f$ . Diese Funktion  $f$  ist eindeutig bestimmt.

### Bemerkung:

Selbstadjungiertheit entspricht der Symmetrie und Übereinstimmung der Domains. Die Diskussion der Domains ist so delikate, da beim Übergang zu  $T^*$  „(unsichtbare) Abschluss-effekte“ auftreten.

Selbstadjungierte Operatoren sind die korrekte Verallgemeinerung von symmetrischen Matrizen bzw. von reellen Zahlen. Sie erlauben Spektraltheorie und Anwendungen (Funktional-kalkül, Störungs- und Streutheorie, Bilinearformen, isoperimetrische Ungleichungen, ...).

Der Operator  $(A, \mathcal{D})$  ist nicht selbstadjungiert auf  $L^2(M)$ , denn:

**Behauptung:** Für  $A = \Delta_\mu|_{\mathcal{D}}$  ist der adjungierte Operator  $A^*$  gegeben durch  $\text{dom } A^* = \{u \in L^2(M) : \Delta_\mu u \in L^2(M)\}$  und auf  $\text{dom } A^*$  gilt  $A^*u = \Delta_\mu u$  (im schwachen Sinne). Offensichtlich enthält  $\text{dom } A^*$  Funktionen, die keinen kompakten Träger haben, für  $M = \mathbb{R}$  ist  $u(x) = e^{-x^2} \in \text{dom } A^*$ , aber nicht in  $\mathcal{D}$ .

*Beweis:*

Die Gleichung  $(Av, u)_{L^2} = (v, f)_{L^2}$  ist äquivalent zu der Gleichung  $(u, \Delta_\mu v) = (f, v)$ , d.h. es gilt  $\Delta_\mu u = f$  im Distributionensinne. Also ist  $u \in \text{dom } A^*$  genau dann, wenn  $\Delta_\mu u \in L^2(M)$  und in diesem Falle gilt  $A^*u = \Delta_\mu u$ .  $\square$

Ist  $(T, \text{dom } T)$  dicht definiert auf einem Hilbertraum  $H$  und ist  $T$  symmetrisch, so gilt immer  $\text{dom } T \subset \text{dom } T^*$  und  $Tv = T^*v$  auf  $\text{dom } T$ . Man schreibt auch  $T \subset T^*$ . Ist  $(S, \text{dom } S)$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T$ , d.h.  $\text{dom } T \subset \text{dom } S$  und  $Sv = Tv$  auf  $\text{dom } T$ , so folgt  $T \subset S = S^* \subset T^*$ , d.h. insbesondere  $\text{dom } T \subset \text{dom } S \subset \text{dom } T^*$ . Das Problem, eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T$  zu finden, besteht also darin,  $\text{dom } S$  geeignet zu wählen. Auf  $\text{dom } S$  ergibt sich  $S$  dann durch  $T^*|_{\text{dom } S}$ .

Wir betrachten weitere Funktionenräume:  $W_0^1(M) := \overline{\mathcal{D}(M)}^{W^1(M)}$ , d.h. der Abschluss von  $\mathcal{D}(M)$  in  $W^1(M)$  und  $W_0^2(M) := \{u \in W_0^1(M) : \Delta_\mu u \in L^2(M)\}$ , d.h.  $W_0^2(M)$  besteht aus den  $W_0^1(M)$ -Funktionen, für welche der schwache Laplacian existiert und in  $L^2(M)$  ist. Offensichtlich gilt  $\mathcal{D} \subset W_0^2(M)$ .

Mit dem Skalarprodukt aus  $W^1(M)$  wird  $W_0^1(M)$  ein Hilbertraum. Für  $M$  kompakt gilt  $W_0^1(M) = W^1(M)$ .

Ferner betrachten wir den Raum  $W^2(M) := \{u \in W^1(M) : \Delta_\mu u \in L^2(M)\}$  (Vorsicht:

Die Notation ist nicht konsistent mit PDE-Theorie).

Wir studieren nun  $(\Delta_\mu |_{W_0^2(M)}, W_0^2)$  als dicht definierten Operator auf  $L^2(M)$ . Offensichtlich ist er eine Erweiterung von  $\Delta_\mu |_{\mathcal{D}}$ . Wir sehen später, dass dieser Operator selbstadjungiert ist. Wir schreiben  $\Delta_\mu$  für  $\Delta_\mu |_{W_0^2}$ . Dass  $(\Delta_\mu, W_0^1(M))$  symmetrisch ist, folgt aus Gauß-Green.

**Lemma 2.2.1:**

Für alle  $u \in W_0^1(M)$  und  $v \in W^2(M)$  hat man

$$\int_M u \Delta_\mu v d\mu = - \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle_g d\mu.$$

*Beweis:*

Für  $u \in \mathcal{D}$  hat man

$$\int_M u \Delta_\mu v d\mu = (\Delta_\mu v, u) = (v, \Delta_\mu u) = (v, \operatorname{div}_\mu(\nabla u)) = -(\nabla v, \nabla u) = - \int_M \nabla v \nabla u d\mu. \quad (*)$$

Für allgemeines  $u \in W_0^1(M)$  existiert eine Folge  $(u_k) \subset \mathcal{D}$  mit  $u_k \xrightarrow{W'} u$ , also insbesondere  $u_k \xrightarrow{L^2} u$ , und die Identität (\*) gilt für alle  $u_k$ . Somit hat man

$$\int_M u \Delta_\mu v d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M u_k \Delta_\mu v d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} - \int \langle \nabla u_k, \nabla v \rangle_g d\mu = - \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle_g d\mu.$$

□

Sind  $u, v \in W_0^2(M)$ , so ergibt das Lemma 2.2  $\langle \Delta_\mu u, v \rangle_{L^2} = \langle u, \Delta_\mu v \rangle_{L^2}$ , d.h.  $(\Delta_\mu, W_0^2(M))$  ist symmetrisch. Ebenso folgt, dass für  $u \in W_0^2(M)$  gilt

$$\langle u, \Delta_\mu u \rangle_{L^2} = \int_M u \Delta_\mu u d\mu = - \int_M |\nabla u|_g^2 d\mu \leq 0,$$

d.h.  $\Delta_\mu$  ist nicht-positiv definit bzw.  $(L, W_0^2(M))$  mit  $L := -\Delta_\mu |_{W_0^2(M)}$  ist nicht-negativ definit. Den Operator  $(L, W_0^2(M))$  nennt man den Dirichlet-Laplace Operator auf  $(M, g, \mu)$ .

Die Motivation ist dabei das Dirichlet-Problem, d.h. auf  $(M, g, \mu)$  betrachten wir das Problem  $-\Delta_\mu u + \alpha u = f$  auf  $M$  mit  $u \in W_0^1(M)$ , wobei für gegebene  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $f \in L^2(M)$  eine solche Funktion  $u$  gesucht wird, und die erste Zeile im schwachen Sinne zu interpretieren ist. Für  $\alpha \leq 0$  kann es viele verschiedene Lösungen geben, z.B. löst  $u = c$  für eine Konstante  $c$  das Problem für  $\alpha = 0$  und  $f = 0$ , falls  $M$  kompakt ist. Für  $\alpha > 0$  gibt es genau eine Lösung: Betrachten wir die Resolvente  $R_\alpha := (L + \alpha \operatorname{Id})^{-1}$ ,  $\alpha > 0$  von  $L$ . Sie ist immer definiert:

**Satz 2.2.2:**

Für  $\alpha > 0$  ist  $R_\alpha := (L + \alpha \operatorname{Id})^{-1}$  ein beschränkter, nichtnegativ definit, selbstadjungierter Operator  $R_\alpha : L^2(M) \rightarrow L^2(M)$  und man hat  $\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{\alpha}$ .

*Beweis:*

Wir zeigen, dass für jedes  $f \in L^2(M)$  genau ein  $u \in W_0^2$  existiert, sodass

$$(L + \alpha \text{Id})u = f,$$

d.h.

$$-\Delta_\mu u + \alpha u = f. \quad (*)$$

Dann existiert  $R_\alpha$  und man hat  $R_\alpha f = u$ . Es genügt,  $u \in W_0^1(M)$  zu finden mit (\*), denn erfüllt  $u$  die Identität (\*), so folgt  $\Delta_\mu u = \alpha u - f$ , d.h.  $\Delta_\mu u \in L^2(M)$  und somit  $u \in W_0^2(M)$ .

Betrachten wir beide Seiten von (\*) als Distributionen und wenden sie an auf Testfunktionen

$$-(u, \Delta_\mu \varphi) + \alpha(u, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Wegen  $u \in W_0^1(M)$  kann man das umschreiben zu

$$(\nabla u, \nabla \varphi) + \alpha(u, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (**)$$

Gilt dies nun für alle  $\varphi \in \mathcal{D}$ , so gilt es auch für alle  $\varphi \in W_0^1(M)$  wegen der Dichtheit. Außerdem können wir in (\*\*) die dualen Paarungen als  $L^2$ -Skalarprodukte lesen. Es genügt zu zeigen, dass genau ein  $u \in W_0^1(M)$  existiert, sodass (\*\*) für alle  $\varphi \in W_0^1(M)$  gilt. Wir schreiben  $[u, \varphi]_\alpha := \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{L^2} + \alpha \langle u, \varphi \rangle_{L^2}$ . Dann ist  $[\cdot, \cdot]_\alpha$  ein Skalarprodukt in  $W_0^1(M)$  (wobei  $\alpha = 1$  dem Standard-Skalarprodukt entspricht) und es gilt

$$\min(\alpha, 1) \|u\|_{W_1}^2 \leq [u, u]_\alpha \leq \max(\alpha, 1) \|u\|_{W_1}^2,$$

also ist  $(W_0^1(M), [\cdot, \cdot]_\alpha)$  auch ein Hilbertraum. Somit hat  $[u, \varphi]_\alpha = \langle f, \varphi \rangle_{L^2}$ ,  $\varphi \in W_0^1(M)$  aber genau eine Lösung  $u \in W_0^1(M)$  wegen dem Rieszschen Darstellungssatz, vorausgesetzt, dass  $\varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle_{L^2}$  ein beschränktes, lineares Funktional auf  $W_0^1(M)$  ist. Das folgt aber aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle f, \varphi \rangle_{L^2}| \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \leq \alpha^{-1/2} \|f\|_{L^2} [\varphi, \varphi]_\alpha^{1/2}.$$

Also existiert  $R_\alpha$  und  $R_\alpha f = u$ . Falls  $f \neq 0$ , so folgt auch  $R_\alpha f \neq 0$ .

Wir zeigen noch die Nichtnegativität, Normabschätzung und die Selbstadjungiertheit. (\*\*) liefert zunächst

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \alpha \|u\|_{L^2}^2 = \langle f, u \rangle_{L^2},$$

woraus folgt, dass  $\langle R_\alpha f, f \rangle \geq 0$ , d.h.  $R_\alpha$  ist nichtnegativ definit. Ebenso folgt  $\alpha \|u\|_{L^2}^2 \leq |\langle f, u \rangle_{L^2}| \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2}$ , d.h.  $\|R_\alpha f\|_{L^2} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^2}$  für alle  $f \in L^2(M)$  mit  $f \neq 0$ , d.h.  $\|R_\alpha\|_{L^2} \leq \frac{1}{\alpha}$ . Da  $R_\alpha$  beschränkt ist, sind Symmetrie und Selbstadjungiertheit äquivalent und es genügt zu zeigen, dass  $\langle R_\alpha f, g \rangle_{L^2} = \langle f, R_\alpha g \rangle_{L^2}$  für alle  $f, g \in L^2(M)$ . Setze  $R_\alpha f = u, R_\alpha g = v$ , so ergibt (\*\*)

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2} + \alpha \langle u, v \rangle_{L^2} = \langle f, R_\alpha g \rangle.$$

Da die linke Seite aber symmetrisch in  $u$  und  $v$  ist, muss die rechte Seite symmetrisch in  $f$  und  $g$  sein, d.h.  $R_\alpha$  ist symmetrisch.  $\square$

Wir benutzen diesen Satz für unser Hauptresultat des Abschnitts:

**Satz 2.2.3:**

Auf einer gewichteten Mannigfaltigkeit  $(M, g, \mu)$  ist der Dirichlet-Laplace Operator  $(L, W_0^2(M))$  ein selbstadjungierter, nichtnegativ definiter Operator in  $L^2(M)$ . Der Operator  $(L, W_0^2(M))$  ist die einzig bestimmte Erweiterung von  $(-\Delta_\mu |_{\mathcal{D}}, \mathcal{D})$  zu einem selbstadjungierten Operator, deren Domain in  $W_0^1(M)$  enthalten ist.

*Beweis:*

Wir wissen bereits, dass  $L$  symmetrisch und nichtnegativ definit ist. Zur Selbstadjungiertheit: Wir wissen, dass die Resolvente  $R := R_1 = (L + \text{Id})^{-1}$  existiert und ein beschränkter, selbstadjungierter Operator ist. Wir zeigen, dass  $L = R^{-1} - \text{Id}$  selbstadjungiert ist. Es genügt zu zeigen, dass  $(R^{-1}, W_0^2(M))$  selbstadjungiert ist (denn  $\text{Id}$  ist stets selbstadjungiert und die Summe selbstadjungierter Operatoren ist selbstadjungiert). Die Symmetrie von  $R^{-1}$  folgt aus der Symmetrie von  $L$ . Also ist  $(R^{-1})^*$  eine Erweiterung von  $R^{-1}$  und es genügt zu zeigen, dass  $\text{dom}(R^{-1})^* \subset \text{dom} R^{-1} = W_0^2(M)$ . Nach Definition haben wir

$$\text{dom}(R^{-1})^* = \{u \in L^2 : \exists f \in L^2 \text{ sodass } \forall v \in \text{dom} R^{-1} = W_0^2(M) : \langle R^{-1}v, u \rangle = \langle v, f \rangle\}.$$

Da  $Rf$  aber immer definiert ist und in  $\text{dom} R^{-1}$ , liefert die Symmetrie von  $R^{-1}$

$$\langle R^{-1}v, Rf \rangle_{L^2} = \langle v, R^{-1}Rf \rangle_{L^2} = \langle v, f \rangle_{L^2},$$

also  $\langle R^{-1}v, u \rangle_{L^2} = \langle R^{-1}v, Rf \rangle_{L^2}$  für alle  $v \in W_0^2(M)$ , woraus folgt, dass  $u = Rf$  und  $u \in \text{dom} R^{-1}$ . Also folgt die Selbstadjungiertheit.

Zur Eindeutigkeit der Erweiterung: Schreiben wir  $L_0 := -\Delta_\mu |_{\mathcal{D}}$  und nehmen wir an, dass  $L_1$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $L_0$  mit  $\text{dom} L_1 \subset W_0^1(M)$ . Wir wollen zeigen, dass  $L_1 = L$ . Wie zuvor gezeigt gilt

$$\text{dom} L_0^* = \{u \in L^2(M) : \Delta_\mu u \in L^2(M)\},$$

und auf dieser Domain gilt  $L^*u = -\Delta_\mu u$ . Die Inklusion  $L_0 \subset L_1$  (d.h.  $\text{dom} L_0 \subset \text{dom} L_1$  und  $L_1u = L_0u$  für  $u \in \text{dom} L_0$ ) impliziert  $L_1^* = L_1 \subset L_0^*$ , und somit folgt  $\text{dom} L_1 \subset W_0^1(M) \cap \text{dom} L_0^* = \{u \in W_0^1(M) : \Delta_\mu u \in L^2(M)\} = \text{dom} L$ .

Ist  $u \in \text{dom} L_1$ , so folgt  $L_1u = L_0^*u = -\Delta_\mu u = Lu$ , also  $L_1 \subset L$ . Somit aber auch  $L_1 = L_1^* \subset L^*$  und damit  $L_1 = L$ .  $\square$

## 2.3 Das $L^2$ -Cauchy-Problem

Sei  $(M, g, \mu)$  eine gewichtete Mannigfaltigkeit und sei  $L = -\Delta_\mu|_{W_0^2}$  der Dirichlet-Laplace-Operator. Gegeben sei eine Funktion  $f \in L^2(M)$ . Wir sagen, dass eine Funktion  $u : (0, \infty) \rightarrow L^2(M)$  das  $L^2$ -Cauchy-Problem für  $L$  löst, falls

(i) Die Abbildung  $t \mapsto u(t)$  ist für alle  $t > 0$  differenzierbar in der  $L^2$ -Norm, d.h. für alle  $t > 0$  existieren die Grenzwerte  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(u(t \pm h) - u(t))$  und stimmen überein in  $L^2(M)$ . Falls das so ist, schreiben wir  $\frac{du}{dt}(t)$  für dieses Element von  $L^2$ .

(ii) Für jedes  $t > 0$  ist  $u(t) \in \text{dom } L$  und  $\frac{du}{dt}(t) = -Lu(t)$ .

(iii) Man hat  $\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = f$  in  $L^2(M)$ .

Wir schreiben dafür kurz

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -Lu & t > 0 \\ u = f & t = 0 \end{cases} \quad (\text{CP})$$

### Bemerkung:

Man kann natürlich in jeder Klasse  $u(t) \in L^2(M)$  eine messbare Funktion  $u = u(t, x)$  auf  $(0, \infty) \times M$  auswählen. Sie ist für festes  $t > 0$  a priori durch (CP) scheinbar nur  $\mu$ -f.ü. eindeutig bestimmt.

Wir benutzen den folgenden Satz, ohne ihn zu beweisen. Einen kurzen Beweis kann man mit Standardargumenten der Spektraltheorie geben (siehe [Gri09], Kapitel 7).

### Satz 2.3.1:

Es existiert eine eindeutig bestimmte Familie  $(P_t)_{t \geq 0}$  von Operatoren auf  $L^2(M)$ , sodass gilt:

(i) Für alle  $t \geq 0$  ist  $P_t : L^2(M) \rightarrow L^2(M)$  ein beschränkter, selbstadjungierter Operator mit  $\|P_t\| \leq 1$  und insbesondere ist  $P_0 = \text{Id}$ .

(ii) Für alle  $s, t \geq 0$  gilt  $P_t \circ P_s = P_{t+s}$ .

(iii) Für alle  $t \geq 0$  und alle  $f \in L^2(M)$  gilt  $\lim_{s \rightarrow t} P_s f = P_t f$ , wobei der Grenzwert wieder in der Norm von  $L^2(M)$  zu sehen ist. Insbesondere gilt mit  $t = 0$ :  $\lim_{t \rightarrow 0^+} P_t f = f$ .

(iv) Für alle  $f \in L^2(M)$  und  $t > 0$  gilt  $P_t f \in \text{dom } L$  und  $\frac{d}{dt}(P_t f) = -LP_t f$ .

Somit löst  $u(t) := P_t f$  das  $L^2$ -Cauchy-Problem (CP) für  $L$ .

### Bemerkung:

Man hat  $P_t = e^{-tL}$  im Sinne der Spektraldarstellung von  $L$ . Gleichbedeutend dazu ist, dass  $\text{dom } L = \{f \in L^2(M) : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(P_t f - f) \text{ existiert in } L^2\}$  und  $-Lf = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(P_t f - f)$  für  $f \in \text{dom } L$ .

Wir gehen hier nicht weiter in die Details, sondern geben eine Übersicht zu einigen weiteren bekannten Resultaten.

**Beispiel:**

Nehmen wir  $M = \mathbb{R}^d$  mit  $\mu$  als Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^d$  und  $L = -\Delta$  mit  $\text{dom } L = W_0^2(\mathbb{R}^d) = W^2(\mathbb{R}^d)$ , so erhält man  $P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t, x - y) f(y) dy$ , wobei  $p(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$ .

Wir interessieren uns vor allem für Integralkerne wie im Beispiel.

**Satz 2.3.2:**

Für jedes  $f \in L^2(M)$  und jedes  $t > 0$  ist  $P_t f$  eine Funktion in  $C^\infty(M)$ .

Wir sehen also, dass die Klasse von  $P_t f \in L^2(M)$  nicht nur einen stetigen Repräsentanten hat, sondern, dass dieser auch glatt ist. Insbesondere ergibt der Ausdruck  $P_t f(x)$  Sinn für alle  $x \in M$  und man kann daher einen Integralkern (Dichte) finden.

**Satz 2.3.3:**

Für jedes  $t > 0$  und  $x \in M$  existiert genau eine Funktion  $p_{t,x} \in L^2(M)$ , sodass für alle  $f \in L^2(M)$  gilt

$$P_t f(x) = \int_M p_{t,x}(y) f(y) \mu(dy) = \langle p_{t,x}, f \rangle_{L^2}.$$

Die Funktion  $p_{t,x}$  ist zunächst nur  $\mu$ -fast überall definiert. Für alle  $t > 0$  und alle  $x, y \in M$  setzen wir nun  $p_t(x, y) := \langle p_{t/2,x}, p_{t/2,y} \rangle_{L^2(M)}$ .

**Definition 2.3.4:**

Die Funktion  $p_t(x, y)$  heißt Wärmeleitungskern (heat kernel) der gewichteten Mannigfaltigkeit  $(M, g, \mu)$ .

**Satz 2.3.5:**

Auf jeder gewichteten Mannigfaltigkeit  $(M, g, \mu)$  hat der Wärmeleitungskern folgende Eigenschaften:

- (i)  $p_t(x, y) = p_t(y, x)$  für alle  $t > 0$  und  $x, y \in M$ .
- (ii) Für alle  $f \in L^2(M)$  und alle  $x \in M$  und  $t > 0$  gilt:  $P_t f(x) = \int_M p_t(x, y) f(y) \mu(dy)$ .
- (iii)  $p_t(x, y) \geq 0$  für alle  $t > 0$  und  $x, y \in M$  und  $\int_M p(t, x, y) \mu(dy) \leq 1$  für alle  $t > 0$  und  $x \in M$ .
- (iv) Für alle  $t, s > 0$  und  $x, y \in M$  gilt  $p_{t+s}(x, y) = \int_M p_t(x, z) p_s(z, y) \mu(dz)$  (Chapman-Kolmogorov-Gleichung).
- (v) Für alle  $y \in M$  ist  $u(t, x) := p_t(x, y)$  ist eine  $C^\infty$ -Funktion auf  $(0, \infty) \times M$  und löst die Wärmeleitungsgleichung  $\frac{du}{dt} = \Delta_\mu u$ .
- (vi) Für jede Funktion  $f \in C_0^\infty(M)$  gilt  $\lim_{t \rightarrow 0} \int_M p_t(x, y) f(y) \mu(dy) = f(x)$  uniform in  $x \in M$ .
- (vii) Ist  $M$  zusammenhängend, so gilt  $p_t(x, y) > 0$  für alle  $t > 0, x, y \in M$ .

### 3 Krümmungsbegriffe

Ziel: Geben einen ersten (kleinen) Überblick und später einige Verbindungen zur Analysis.

#### 3.0 Exkurs in Flächentheorie

Wir betrachten ein  $d$ -dimensionales parametrisiertes Flächenstück  $F$  im  $\mathbb{R}^{d+1}$ , d.h.  $F = f(W)$  mit  $W \subset \mathbb{R}^d$  offen und zusammenhängend,  $f : W \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  injektiv und glatt und so, dass  $df$  auf ganz  $W$  Rang  $d$  hat und  $f^{-1}|_F : F \rightarrow W$  stetig ist.

Wir hatten den Tangentialraum  $T_x F$  an  $F$  in  $x \in F$  definiert durch

$$T_x F = \text{lin}\left\{\frac{\partial f}{\partial w^1}(w), \dots, \frac{\partial f}{\partial w^d}(w)\right\},$$

wobei  $f(w) = x, w \in W$ . Interpretiert man  $T_x F$  als Unterraum von  $\mathbb{R}^{d+1}$  und seine Elemente als Vektoren im  $\mathbb{R}^{d+1}$ , so kann man durch Einschränkung des Euklidischen Skalarprodukts auf  $\mathbb{R}^{d+1}$  ein Skalarprodukt auf  $T_x F$  definieren durch  $I_x(v, w) = \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}}$  für  $v, w \in T_x F$ .  $I_x$  heißt *erste Fundamentalform für  $F$*  und  $g = \{g(x)\}_{x \in F}$  mit  $g(x) := I_x$  definiert eine Riemannsche Metrik auf  $F$ .

Man kann zu jedem  $x \in F$  genau einen Vektor  $N(x) \in \mathbb{R}^{d+1}$  finden mit  $\|N(x)\|_{\mathbb{R}^{d+1}} = 1$ , der senkrecht steht auf  $T_x F$  und so, dass  $\left\{\frac{\partial f}{\partial w^1}(w), \dots, \frac{\partial f}{\partial w^d}(w), N(x)\right\}$  eine positiv orientierte Basis  $\mathbb{R}^{d+1}$  ist. Man nennt  $N(x)$  die Einheitsnormale von  $F$  in  $x$ . Man kann zeigen, dass dies nicht von der Wahl der Parametrisierung  $f$  abhängt. Offensichtlich ist  $N(x)$  kein Element des Tangentialraums.

Die Abbildung  $N : F \rightarrow S^d$  heißt Gauß-Abbildung. Wir betrachten ihr Differential  $dN(x) : T_x F \rightarrow T_{N(x)} S^d \subset T_{N(x)} \mathbb{R}^{d+1} \cong \mathbb{R}^{d+1}$ . In diesem Fall ist  $T_{N(x)} S^d = T_x F$ , denn  $T_{N(x)} S^d = \{v \in \mathbb{R}^{d+1} : v \text{ ist orthogonal zu } N(x)\} = T_x F$ . Die Abbildung  $-dN(x) : T_x F \rightarrow T_x F$  heißt Weingarten-Abbildung. Man kann zeigen, dass  $II_x(v, w) := \langle v, -dN(x)w \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}} = I_x(v, -dN(x)w)$  eine symmetrische Bilinearform  $II_x : T_x F \times T_x F \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Sie heißt zweite Fundamentalform von  $F$ . Sie hat geometrische Bedeutung: Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow F$  eine Kurve, dann kann man sie auch als Kurve im  $\mathbb{R}^{d+1}$  auffassen und als solche ihre Krümmung berechnen. Diese hat einen Anteil  $\kappa^N = \kappa^N(x), x \in F$ , der nur durch die Fläche hervorgerufen wird (nicht durch die Kurve innerhalb der Fläche). Ist  $\gamma$  eine Kurve in  $F$  mit  $\gamma(0) = x$  und  $v \in T_x F$  mit  $|v| = 1$  eine Richtung mit  $\dot{\gamma}(0) = v$ , so ergibt sich  $\kappa^N(x) = |II_x(v, v)|$ . Man nennt  $\kappa^N(x)$  die *Normalkrümmung von  $F$  in  $x$  in Richtung  $v$* . Sie hängt nicht von der Wahl der Kurve  $\gamma$  ab, nur von ihrer Richtung  $v \in T_x F$ .

Zu der symmetrischen Bilinearform  $II_x$  existiert eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von  $-dN(x)$  mit reellen Eigenwerten und man darf annehmen, dass sie geordnet sind:  $\kappa_1(x) \leq \kappa_2(x) \leq \dots \leq \kappa_d(x)$ . Sie heißen die Hauptkrümmungen von  $F$  in  $x$  und die zugehörigen Eigenvektoren die Hauptkrümmungsrichtungen.

Für *zweidimensionale Flächenstücke* sind  $\kappa_1(x)$  und  $\kappa_2(x)$  die minimale und die maximale Normalkrümmung. Man nennt  $M(x) := \kappa_1(x)\kappa_2(x)$  die *Gauß-Krümmung* von  $F$  und  $H(x) = \kappa_1(x) + \kappa_2(x)$  die mittlere Krümmung von  $F$  in  $x$ .

### 3.1 Riemannscher Zusammenhang und Paralleltransport

Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $d$ .

Richtungsableitungen skalarer Funktion sind gegeben durch die Anwendung von Tangentialvektoren. Wir wollen zusätzlich diskutieren, wie sich Vektorfelder ändern, wenn sie an verschiedenen Punkten ausgewertet bzw. an einer Kurve entlang bewegt werden. Da für ein Vektorfeld  $v$  die Vektoren  $v(x)$  und  $v(y)$  in den verschiedenen Tangentialräumen  $T_xM$  und  $T_yM$  liegen, kann eine Beschreibung der Änderung nicht trivial sein. Wir suchen also eine „korrekte Version von“ von  $D_vX = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X(\gamma(t)) - X(\gamma(0))}{t}$ , wobei  $v \in T_xM$  und  $\gamma : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M$  eine Kurve mit  $\gamma(0) = x$  und  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Offensichtlich ist dies sinnlos, da  $X(\gamma(t)) \in T_{\gamma(t)}M \neq T_xM \ni X(\gamma(0))$ . Der mathematische Begriff, der dies ermöglicht, ist der Riemannsche Zusammenhang. Wir führen einen passenden Ableitungsbegriff ein.

#### Definition 3.1.1:

Ein Riemannscher Zusammenhang (Levi-Civita Zusammenhang)  $\nabla$  auf  $(M, g)$  ist eine Zuordnung  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ , bei welcher aus zwei glatten Vektorfeldern  $X$  und  $Y$  auf  $M$  ein neues, glattes Vektorfeld  $\nabla_X Y$  entsteht, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $\nabla$  ist tensoriell im unteren Argument, d.h.  $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$  und  $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ ,
- (ii)  $\nabla$  ist linear im oberen Argument, d.h.  $\nabla_X (Y_1 + \lambda Y_2) = \nabla_X Y_1 + \lambda \nabla_X Y_2$ ,
- (iii)  $\nabla$  erfüllt die Produktregel:  $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y$ ,
- (iv)  $\nabla$  ist metrisch, d.h.  $X(\langle Y, Z \rangle) = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Z, \nabla_X Y \rangle$ ,
- (v)  $\nabla$  ist torsionsfrei, d.h.  $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$ , wobei  $[X, Y]$  die Lie-Klammer von  $X$  und  $Y$  ist, definiert als das Vektorfeld  $[X, Y] := XY - YX$ , d.h.  $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$  für  $f \in C^\infty(M)$ .

Hierbei sind  $X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2$  Vektorfelder,  $f \in C^\infty(M)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alle beliebig.

#### Beispiel:

Die Richtungsableitung im  $\mathbb{R}^d$  für Vektorfelder ist ein Riemannscher Zusammenhang (Übung). Hier ergibt die in der Einleitung erwähnte Formel Sinn (im Sinne der kartesischen Koordinaten  $X = (X^1, \dots, X^d)$  mit Euklidischer Metrik  $g_{ij} \equiv \delta_i^j$ . Alle  $T_x \mathbb{R}^d$  können als Euklidische Räume mit  $\mathbb{R}^d$  und ein und derselben Basis identifiziert werden).

*Bedeutung des Riemannschen Zusammenhangs:*

Sei  $F = f(W)$  ein glattes,  $d$ -dimensionales Flächenstück im  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Eine Abbildung  $X : F \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  nennen wir ein Vektorfeld auf  $F$ , falls  $X(x) \in T_x F$  für alle  $x \in F$  gilt. Zur Erinnerung:  $T_x F \cong \mathbb{R}^d \subsetneq \mathbb{R}^{d+1}$ . Ist  $X : F \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  ein Vektorfeld auf  $F$ , so können wir die Richtungsableitung  $D_v X(x) := DX(x) \cdot v \in \mathbb{R}^{d+1}$  von  $X$  in  $x$  in Richtung  $v \in T_x M$  betrachten. Im Allgemeinen ist aber  $D_v X(x)$  kein Vektor in  $T_x M$ . Man muss den Anteil herausprojizieren, der nicht orthogonal zur Einheitsnormalen  $N(x)$  ist. Bezeichne die orthogonale Projektion von  $\mathbb{R}^{d+1}$  auf  $T_x F$  mit  $pr_x(u) := u - \langle u, N(x) \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}} N(x)$ ,  $u \in \mathbb{R}^{d+1}$ . Für ein Vektorfeld  $X$  auf  $F$  und  $x \in F$  und  $v \in T_x M$  heißt  $\nabla_v X(x) := pr_x(D_v X(x)) =$

$D_v X(x) - \langle D_v X(x), N(x) \rangle N(x) \in T_x M$  die kovariante Ableitung von  $X$  in  $x$  in Richtung  $v$ .

**Beispiel:**

Die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes auf einem  $d$ -dimensionalen Flächenstück ist ein Riemannscher Zusammenhang. Der Beweis ist eine Übungsaufgabe.

Definition 3.1.1 ist also eine abstrakte Formulierung der kovarianten Ableitung. Gelten in der Definition nur (i) – (iii), so heißt das zugehörige Objekt (allgemeiner) Zusammenhang. Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit: Schreiben wir  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  für  $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ , so gilt

**Satz 3.1.2:**

Auf jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  gibt es genau einen Riemannschen Zusammenhang  $\nabla$  und er erfüllt die Identität

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} (X \langle Y, Z \rangle - Z \langle X, Y \rangle + Y \langle Z, X \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle) \quad (*)$$

Diese Formel heißt Koszuls Formel.

*Beweis:*

Wir zeigen zunächst, dass jeder Riemannsche Zusammenhang (wie in Definition 3.1.1) die Koszul-Formel erfüllt. Die Bedingung (iv) erzwingt

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\ Y \langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\ Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Torsionsfreiheit (iv) ergibt sich

$$X \langle Y, Z \rangle - Z \langle X, Y \rangle + Y \langle Z, X \rangle = 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle X, [Y, Z] \rangle,$$

unter Beachtung, dass  $[X, Y] = -[Y, X]$ .

Für die Existenz von  $\nabla$  seien  $X$  und  $Y$  fixiert. Setze

$$\omega(Z) := \frac{1}{2} (X \langle Y, Z \rangle - Z \langle X, Y \rangle + Y \langle Z, X \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle) \quad (\#)$$

für Vektorfelder  $Z$ . Dann ist  $\omega$  ein Kovektorfeld auf  $M$ . Ist  $f$  eine glatte Funktion auf  $M$ , so ergibt sich nach der Produktregel für das Vektorfeld  $X$

$$\omega(fZ) = f\omega(Z) + \frac{1}{2} (Xf \langle Y, Z \rangle + Yf \langle Z, X \rangle - Xf \langle Y, Z \rangle - Yf \langle X, Z \rangle) = f\omega(Z).$$

Die Additivität in  $Z$  ist klar. Da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf jedem Tangentialraum ein Skalarprodukt definiert, gibt es genau ein Vektorfeld  $A$  auf  $M$  mit  $\omega(Z) = \langle A, Z \rangle$  für alle Vektorfelder  $Z$ . Wir setzen

$$\nabla_X Y := A. \quad (*)$$

Das definiert einen Riemannschen Zusammenhang. Die Additivität in  $X$  und die Linearität in  $Y$  sind klar. Ist  $h$  eine glatte Funktion, so sei  $\tilde{X} := hX$  und  $\tilde{\omega}$  sei definiert wie in (#) mit  $\tilde{X}$  statt  $X$ . Dann folgt

$$\tilde{\omega}(Z) = h\omega(Z) + \frac{1}{2}(-Zh\langle X, Y \rangle + Yh\langle Z, X \rangle - \langle Z, X \rangle Yh + \langle Y, X \rangle Zh) = h\omega(Z).$$

Beachte, dass

$$\begin{aligned} [\tilde{X}, Y]u &= [hX, Y]u = hXYu - Y(hX)u = hXYu - (Yh)Xu - hY(Xu) \\ &= h[X, Y]u - (Yh)Xu \end{aligned}$$

für jede glatte Funktion  $u$ . Also hat man die Eigenschaften (i) und (ii) in den Definitionen 3.1.1. Die Produktregel (iii) ergibt sich ähnlich. Ist  $\omega'$  definiert wie in (#), aber mit  $fY$  anstelle von  $Y$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \omega'(Z) &= f\omega(Z) + \frac{1}{2}((Xf)\langle Y, Z \rangle - (Zf)\langle X, Y \rangle + (Zf)\langle X, Y \rangle + (Xf)\langle Z, Y \rangle) \\ &= f\omega(Z) + X(f)\langle Z, Y \rangle, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ .

Die metrische Eigenschaft ergibt sich aus der Koszul-Formel (die nach Konstruktion (#) und (\*) gilt):

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle \nabla_X Z, Y \rangle &= \frac{1}{2}(X\langle Y, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle + Y\langle Z, X \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle \\ &\quad + \langle Y, [Z, X] \rangle) + \frac{1}{2}(X\langle Z, Y \rangle - Y\langle X, Z \rangle + Z\langle Y, X \rangle - \langle X, [Z, Y] \rangle \\ &\quad + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle) \\ &= X\langle Y, Z \rangle \end{aligned}$$

Ähnlich erhält man die Torsionsfreiheit (v). □

Nun sei  $T > 0$  und  $\gamma : (0, T) \rightarrow M$  eine glatte Kurve.

**Definition 3.1.3:**

Ein Vektorfeld  $X$  auf  $M$  heißt *parallel längs*  $\gamma$ , falls  $\nabla_{\dot{\gamma}} X = 0$  für alle  $t \in (0, T)$ .

Nehmen wir an, dass  $x \in M$ ,  $\gamma(0) = x$  und  $v \in T_x M$ . Wir betrachten die Bedingungen:

$$\begin{cases} \nabla_{\dot{\gamma}} X(\gamma(t)) = 0 & t \in (0, T) \\ X(\gamma(0)) = v \end{cases} \quad (*)$$

**Satz 3.1.4:**

*Es gibt genau ein Vektorfeld  $X$  parallel längs  $\gamma$ , sodass  $X(\gamma(0)) = v$ , d.h. das Anfangswertproblem (\*) hat genau eine Lösung.*

**Bemerkung:**

Wir nutzen also die Evolution eines Anfangswertproblems, um einen „guten Begriff von Parallelität für Tangentialvektoren“ in variierenden Tangentialräumen zu finden bzw. eine besonders kanonische Weise finden, um Tangentialvektoren in Tangentialräumen entlang einer Kurve ineinander zu überführen.

*Beweisskizze:*

Wir zeigen den Satz für den Fall, dass die Kurve in einer einzelnen Kartenumgebung liegt. Den allgemeinen Fall kann man mit Standardargumenten darauf zurückführen (mittels Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher DGL).

Seien  $x^1, \dots, x^d$  lokale Koordinaten um  $x$ ,  $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $\gamma(t) = \gamma^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Dann ist (\*) äquivalent zu

$$\begin{cases} 0 = \nabla_{(\dot{\gamma})^k(t) \frac{\partial}{\partial x^k}} X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \stackrel{(**)}{=} \frac{\partial X^j(\gamma(t))}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^j} + (\dot{\gamma})^k(t) X^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j} & t \in (0, T) \\ v^j = X^j(\gamma(0)) \end{cases}$$

Dies ist ein System von linearen gewöhnlichen DGL auf  $(0, T)$ , das nach Picard-Lindelöf genau eine Lösung auf  $(0, T)$  besitzt. Um (\*\*) zu rechtfertigen: Man hat nach Definition 3.1.1 nach Bedingung (iii)

$$\begin{aligned} \nabla_{(\dot{\gamma})^k(t) \frac{\partial}{\partial x^k}} \left( X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) &= X^j \nabla_{(\dot{\gamma})^k \frac{\partial}{\partial x^k}} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) + (\dot{\gamma})^k(t) (X^j) \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \dot{\gamma}^k(t) X^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) + \frac{\partial X^j(\gamma(t))}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung:**

Wir haben die folgende Darstellung für Tangentialvektoren benutzt: Für eine Kurve  $\alpha : (0, T) \rightarrow M$  und einen Tangentialvektor  $w \in T_{\alpha(0)}M$  mit  $\dot{\alpha}(0) = w$  gilt

$$w(f) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(\alpha(s)) - f(\alpha(0))}{s} = \left. \frac{\partial f(\alpha(s))}{\partial s} \right|_{s=0}$$

für alle glatten Funktionen  $f$ .

**Definition 3.1.5:**

Sei  $t \in (0, T)$ . Die Abbildung  $P_{\gamma,t} : T_{\gamma(0)}M \rightarrow T_{\gamma(t)}M$ , die einem Tangentialvektor  $v \in T_{\gamma(0)}M = T_xM$  den Tangentialvektor  $X(\gamma(t)) \in T_{\gamma(t)}M$  wie im Anfangswertproblem zuordnet, heißt Paralleltransport von  $\gamma(0)$  nach  $\gamma(t)$  längs  $\gamma$ .

**Lemma 3.1.6:**

*Jeder Paralleltransport  $P_{\gamma,t}$  ist ein linearer Isomorphismus.*

*Beweis:*

Die Linearität ist klar wegen der linearen Abhängigkeit im AWP (\*) von den Anfangsdaten (Superpositionsprinzip).  $P_{\gamma,t}$  ist invertierbar: Ist  $\tilde{\gamma}$  die Kurve, die durch  $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t-s)$ ,  $s \in (0, t)$  definiert wird, so hat man  $(P_{\gamma,t})^{-1} = P_{\tilde{\gamma},t}$ . □

Der Riemannsche Zusammenhang ist nichts weiter als die infinitesimale Version des Paralleltransportes:

**Satz 3.1.7:**

Sei  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  eine Kurve mit  $\gamma(0) = x \in M$  und  $\dot{\gamma}(0) = v \in T_x M$ . Dann gilt für jedes Vektorfeld  $X$  auf  $M$  die Identität

$$\nabla_v X(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(P_{\gamma,t})^{-1} X(\gamma(t)) - X(x)}{t}.$$

*Beweis:*

Ist  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^d}\}$  eine Basis in  $T_x M$ , so ist  $\{b^1, \dots, b^d\}$  mit

$$b_i(t) := P_{\gamma,t} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \quad (\S)$$

eine Basis in  $T_{\gamma(t)} M$  wegen Lemma 3.1.6. Also existieren Funktionen  $X^i(t)$ , sodass gilt  $X(\gamma(t)) = X^i(t) b_i(t)$  (Koeffizienten bezüglich neuer Basis für festes  $t$ ). Daraus folgt wegen (§) aber, dass  $P_{\gamma,t}^{-1} X(\gamma(t)) = X^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Also hat man

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{\gamma,t}^{-1} X(\gamma(t)) - X(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} - X^i(0) \frac{\partial}{\partial x^i}}{t} = (X^i) \cdot (0) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

wobei  $(X^i) \cdot = \frac{\partial}{\partial t} X^i$ .

Andererseits folgt aus der Produktregel für den Riemannschen Zusammenhang (Definition 3.1.1), dass

$$\nabla_v X = \nabla_v (X^i b_i) = X^i \nabla_v b_i + v(X^i) b_i,$$

wobei  $b_i$  wie in (§) als Vektorfelder (entlang  $\gamma$ ) aufgefasst werden. Da sie alle parallel sind längs  $\gamma$ , d.h.  $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} b_i(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} P_{\gamma,t} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = 0$ , folgt

$$\nabla_v X(x) = v(X^i) b_i(0) = \frac{dX^i(\gamma(t))}{dt} \Big|_{t=0} b_i(0) = (X^i) \cdot (0) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

und somit die Gleichheit. □

Seien  $x^1, \dots, x^d$  lokale Koordinaten und  $(g_{ij})$  die zugehörige Koordinatendarstellung der Metrik  $g$ . Wir definieren

$$g_{jl,k} := \frac{\partial}{\partial x^k} g_{jl}$$

d.h. die Anwendung des Vektorfeldes  $\frac{\partial}{\partial x^k}$  auf die glatte Funktion  $g_{jl} = g_{jl}(x)$  ergibt eine neue glatte Funktion  $g_{jl,k}$ , sowie  $\Gamma_{jk,l} := \frac{1}{2} (g_{jl,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l})$  und  $\Gamma_{jk,l}^i g^{il} = \Gamma_{jk,l} = \frac{1}{2} g^{il} (g_{jl,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l})$ . Die Funktionen  $\Gamma_{jk,l}^i$  nennt man Christoffel-Symbole. Man verwendet sie auch für die lokale Darstellung des Krümmungstensors. Für  $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$ ,  $Y = \frac{\partial}{\partial x^k}$ ,  $Z = \frac{\partial}{\partial x^l}$  liefert die Koszul-Formel aus Satz 3.1.2 die Identitäten

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle = \frac{1}{2} (g_{kl,j} + g_{jl,k} - g_{jk,l}) = \Gamma_{jk,l}$$

unter Beachtung, dass  $\left\langle \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle = g_{kl}$  und  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} g_{kl} = \frac{\partial}{\partial x^j} g_{kl} = g_{kl,j}$  und es gilt  $[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}] = 0$  (d.h. die Lie-Klammer verschwindet für Basisvektoren). Mit  $(g^{il}) = (g_{il})^{-1}$  folgt

$$\Gamma_{jk}^i \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle = \Gamma_{jk}^i g_{il} = \Gamma_{jk,l} = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle,$$

also gilt  $\Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k}$ . Die Christoffelsymbole sind also die Komponenten bzgl. der Basisvektoren in  $T_x M$  des Vektors, der durch den Riemannschen Zusammenhang aus zwei Basisvektoren entsteht.

Daraus kann man auch Koordinatendarstellungen für allgemeine Vektorfelder bekommen: Seien  $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $Y = \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \xi^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \xi^i \eta^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \left( \xi^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k \xi^i \eta^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Mit  $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$  ergibt sich

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} (Y) = \left( \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k \eta^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Mit  $\nabla_i := \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$  schreibt man auch

$$\nabla_i \eta^k = \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k \eta^j,$$

wobei die linke Seite gelesen werden muss als die  $k$ -te Komponente der Ableitung eines Vektorfeldes mit Komponenten  $\eta^1, \dots, \eta^d$  nach  $x^i$ , d.h.  $\nabla_i \eta^k = (\nabla_i Y)^k$ . Für  $M = \mathbb{R}^d$  mit euklidischer Metrik ergibt sich wie gewöhnlich die partielle Ableitung  $\nabla_i \eta^k = \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i}$ . Den Summanden  $\Gamma_{ij}^k \eta^j$  kann man also als Korrekturterm lesen.

Betrachten wir die Christoffelsymbole in Zusammenhang mit Kurven und Variationsrechnung (Exkurs). Ist  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  eine Kurve, so ist ihre Energie (Wirkung der Bahnkurve) definiert durch

$$E(\gamma) := \frac{1}{2} \int_0^T \|\dot{\gamma}(t)\|_g^2 dt,$$

wobei  $\dot{\gamma}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \gamma(t)$ . Bezeichnen  $\gamma^1(t), \dots, \gamma^d(t)$  die Komponenten von  $\gamma(t)$  in lokalen Koordinaten  $x^1, \dots, x^d$ , d.h.  $\gamma(t) = \gamma^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$ , so ergibt sich

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^T g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) dt,$$

wobei  $\dot{\gamma}^i(t) = \frac{\partial}{\partial t} \gamma^i(t)$ . Wir schreiben auch  $\ddot{\gamma}^i(t) := \frac{\partial}{\partial t} \dot{\gamma}^i(t)$ .

**Lemma 3.1.8:**

Die Euler-Lagrange-Gleichungen für  $E$  sind gegeben durch

$$\ddot{\gamma}^i(t) + \Gamma_{jk}^i(\gamma(t))\dot{\gamma}^j(t)\dot{\gamma}^k(t) = 0, i = 1, \dots, d. \quad (\text{EL})$$

**Definition 3.1.9:**

Eine Kurve  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ , die (EL) erfüllt, heißt geodätische Kurve (Geodäte).

Geodäten sind also kritische Punkte des Energiefunktional. Wir sehen später auch, dass Geodäten gerade auch die „kürzesten“ Wege zwischen zwei Punkten sind.

*Beweis:*

Die Euler-Lagrange-Gleichungen eines Funktional  $I(\gamma) = \int_0^T f(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt$  sind gegeben durch  $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \dot{\gamma}^i} - \frac{\partial f}{\partial \gamma^i} = 0, i = 1, \dots, d$ . Für  $I = E$  ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( g_{ik}(\gamma(t))\dot{\gamma}^k(t) + g_{ji}(\gamma(t))\dot{\gamma}^j(t) \right) - g_{jk,i}(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^k(t) = 0, i = 1, \dots, d,$$

was äquivalent ist zu

$$g_{ik}\ddot{\gamma}^k + g_{ji}\ddot{\gamma}^j + g_{ik,l}\dot{\gamma}^l\dot{\gamma}^k + g_{ji,l}\dot{\gamma}^l\dot{\gamma}^j - g_{jk,i}\dot{\gamma}^j\dot{\gamma}^k = 0.$$

Aus  $g_{ik} = g_{ki}$  folgt

$$2g_{lm}\ddot{\gamma}^m + (g_{lk,j} + g_{jl,k} - g_{jk,l})\dot{\gamma}^j\dot{\gamma}^k = 0, i = 1, \dots, d$$

und somit auch

$$g^{il}g_{lm}\ddot{\gamma}^m + \frac{1}{2}g^{il}(g_{lk,j} + g_{jl,k} - g_{jk,l})\dot{\gamma}^j\dot{\gamma}^k = 0, i = 1, \dots, d$$

und wegen  $g^{il}g_{lm} = \delta_m^i$  folgt  $g^{il}g_{lm}\ddot{\gamma}^m = \ddot{\gamma}^i$ , und das ergibt (EL).  $\square$

## 3.2 Krümmungstensor und verwandte Begriffe

Wie zuvor sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Riemannischem Zusammenhang  $\nabla$ .

### Definition 3.2.1:

Der Krümmungstensor  $R$  von  $M$  bzw.  $\nabla$  ist definiert durch

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

wobei  $X, Y, Z$  beliebige Vektorfelder sind.

Jedem Paar  $X, Y$  von Vektorfeldern wird also eine Abbildung  $R(X, Y)$  zugeordnet, die ein beliebiges Vektorfeld  $Z$  in ein Vektorfeld  $R(X, Y)Z$  überführt. Die Abbildung  $R(X, Y)$  nennt man den Krümmungsoperator zu  $X$  und  $Y$ .

Für  $M = \mathbb{R}^d$  mit euklidischer Metrik (dann ist  $\nabla$  die Richtungsableitung via Komponenten) hat man  $R(X, Y)Z = 0$  für alle Vektorfelder  $X, Y, Z$ : Ist  $Z = Z^i e_i$  die Darstellung von  $Z$  mit Komponentenfunktionen  $Z^i$  bzgl. der Standardbasis  $\{e_1, \dots, e_d\}$  des  $\mathbb{R}^d$ , so hat man

$$\nabla_X Z = X(Z^i) e_i$$

denn  $\nabla_X e_i = 0$  für alle  $i$ . Also

$$\nabla_Y \nabla_X Z = Y(X(Z^i) e_i)$$

und analog  $\nabla_X \nabla_Y Y(X(Z^i) e_i)$  sowie  $\nabla_{[X, Y]} Z = (XY - YX)(Z^i) e_i$ . Man kann  $R$  als eine Größe (bzw. einen Begriff) interpretieren, die (der) angibt, wie sehr eine Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$  lokal vom  $\mathbb{R}^d$  abweicht.

Eine weitere Interpretation ergibt sich in lokalen Koordinaten  $x^1, \dots, x^d$ . Da für alle  $i, j$   $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$  gilt, hat man

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Mit anderen Worten, der Krümmungstensor  $R$  misst die Nichtkommutativität des Riemannschen Zusammenhangs (der kovarianten Ableitung).

### Bemerkung:

Manche Autoren definieren  $R$  mit anderem Vorzeichen.

### Lemma 3.2.2:

(i) Die Abbildung  $(X, Y) \mapsto R(X, Y)$  ist bilinear, genauer:

$$\begin{aligned} R(fX_1 + X_2, Y) &= fR(X_1, Y) + R(X_2, Y) \\ R(X, gY_1 + Y_2) &= gR(X, Y_1) + R(X, Y_2) \end{aligned}$$

für alle Vektorfelder  $X, Y$  usw. und  $f, g \in C^\infty(M)$ .

(ii) Für zwei beliebige Vektorfelder  $X, Y$  ist der zugehörige Krümmungsoperator  $R(X, Y)$  linear, d.h.  $R(X, Y)(fZ + W) = fR(X, Y)Z + R(X, Y)W$  für alle Vektorfelder  $W, Z$  und Funktionen  $f$ .

*Beweis:*

(i) Es gilt

$$\begin{aligned}
R(fX_1 + X_2, Y)Z &= \nabla_{fX_1+X_2} \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX_1+X_2} Z - \nabla_{[fX_1+X_2, Y]} Z \\
&= f \nabla_{X_1} \nabla_Y Z + \nabla_{X_2} \nabla_Y Z - \nabla_Y (f \nabla_{X_1} Z) - \nabla_Y \nabla_{X_2} Z - \nabla_{(fX_1+X_2)Y - Y(fX_1+X_2)} Z \\
&= \nabla_{X_1} \nabla_Y Z + \nabla_{X_2} \nabla_Y Z - f \nabla_Y \nabla_{X_1} Z - Y(f) \nabla_{X_1} Z - \nabla_Y \nabla_{X_2} Z \\
&\quad - f \nabla_{X_1 Y} Z - \nabla_{X_2 Y} Z + \underbrace{\nabla_Y (f) \nabla_{X_1} Z + \nabla_{f Y X_1} Z + \nabla_Y X_2 Z}_{= Y(f) \nabla_{X_1} Z + f \nabla_{Y X_1} Z} \\
&= f \nabla_{X_1} \nabla_Y Z - f \nabla_Y \nabla_{X_1} Z - f (\nabla_{X_1 Y} - \nabla_{Y X_1}) Z \\
&\quad + \nabla_{X_2} \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{X_2} Z - (\nabla_{X_2 Y} - \nabla_{Y X_2}) Z \\
&= fR(X_1, Y)Z + R(X_2, Y)Z.
\end{aligned}$$

Die zweite Aussage ist analog.

(ii) Die Additivität ist klar. Wir zeigen  $R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)(Z)$ . Man hat

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla_Y (fZ) &= \nabla_X (f \nabla_Y Z + (Yf)Z) \\
&= f \nabla_X \nabla_Y Z + (Xf) \nabla_Y Z + (Yf) \nabla_X Z + X(Yf)Z.
\end{aligned}$$

Das ergibt

$$\nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) = f(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z) + ((XY - YX)f)Z,$$

woraus

$$\begin{aligned}
R(X, Y)(fZ) &= f \nabla_X \nabla_Y Z - f \nabla_Y \nabla_X Z + [X, Y](f)Z - f \nabla_{[X, Y]} Z - [X, Y](f)Z \\
&= fR(X, Y)(Z)
\end{aligned}$$

folgt. □

**Bemerkung:**

Im Beweis kann man sehen, dass der Korrekturterm  $\nabla_{[X, Y]}$  notwendig für die Linearität des Krümmungsoperators  $R(X, Y)$  ist.

Wir betrachten den Krümmungstensor  $R$  in lokalen Koordinaten. Wir definieren dazu die Komponentenfunktionen  $R_{lij}^k$  der Bilder  $R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)$  der Basisvektoren  $\frac{\partial}{\partial x^l}$  unter dem Krümmungsoperator  $R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ , d.h.

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^l} = R_{lij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

**Bemerkung:**

Man kann z.B. zeigen, dass  $R_{lij}^k = \frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^j} + \Gamma_{im}^k \Gamma_{jl}^m - \Gamma_{jm}^k \Gamma_{il}^m$ . Wir schreiben  $R_{klij} := g_{km} R_{lij}^m = \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle$ .

Wir betrachten nun weitere Symmetrieeigenschaften.

**Lemma 3.2.3:**

Für Vektorfelder  $X, Y, Z, W$  hat man

- (i)  $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$ , d.h.  $R_{klij} = -R_{lkji}$ .
- (ii)  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ , d.h.  $R_{klij} + R_{kijl} + R_{kjli} = 0$ .
- (iii)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$ , d.h.  $R_{klij} = -R_{lkij}$ .
- (iv)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$ , d.h.  $R_{klij} = R_{ijkl}$ .

*Beweis:*

Wegen der Linearität reicht es, (i) – (iv) für Koordinatenvektorfelder  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  zu zeigen. Wir dürfen also annehmen, dass alle Lie-Klammern von  $X, Y, Z, W$  null sind.

- (i) Folgt direkt aus der Definition 3.2.1.
- (ii) Dies folgt wegen  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y = 0$  und der Torsionsfreiheit aus Definition 3.1.1, d.h.  $\nabla_Y Z = \nabla_Z Y$  usw.
- (iii) Es genügt zu zeigen, dass  $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$  für alle  $X, Y, Z$ .  
Man hat  $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle$  und aus der metrischen Eigenschaft aus Definition 3.1.1 folgt  $\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle = X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle$ . Also gilt mittels der metrischen Eigenschaft in der zweiten Zeile

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, Z \rangle &= X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle - Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle \\ &= \frac{1}{2}XY \langle Z, Z \rangle - \frac{1}{2}Y \langle X \langle Z, Z \rangle \rangle = \frac{1}{2}[X, Y] \langle Z, Z \rangle = 0. \end{aligned}$$

- (iv) Aus (i) und (ii) folgt

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(Y, X)Z, W \rangle = \langle R(X, Z)Y, W \rangle + \langle R(Z, Y)X, W \rangle$$

und aus (ii) und (iii) folgt

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle = \langle R(Y, W)X, Z \rangle + \langle R(W, X)Y, Z \rangle.$$

Addition ergibt

$$\begin{aligned} 2 \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= \langle R(X, Z)Y, W \rangle + \langle R(Z, Y)X, W \rangle + \langle R(Y, W)X, Z \rangle \\ &\quad + \langle R(W, X)Y, Z \rangle. \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned} 2 \langle R(Z, W)X, Y \rangle &= \langle R(Z, X)W, Y \rangle + \langle R(X, W)Z, Y \rangle + \langle R(W, Y)Z, X \rangle \\ &\quad + \langle R(Y, Z)W, X \rangle = 2 \langle R(X, Y)Z, W \rangle. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung:**

Teil (ii) nennt man auch (erste) Bianchi-Identität.

Sei  $x \in M$  und für  $X, Y \in T_x M$  schreiben wir  $|X \wedge Y| := \sqrt{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle X, X \rangle & \langle X, Y \rangle \\ \langle X, Y \rangle & \langle Y, Y \rangle \end{pmatrix}}$ .

**Proposition 3.2.4:**

Ist  $\sigma \subset T_x M$  ein zweidimensionaler Unterraum von  $T_x M$  und sind  $X, Y \in \sigma$  zwei linear unabhängige Vektoren, dann ist die reelle Zahl  $K(X, Y) := \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{|X \wedge Y|^2}$  unabhängig von der Wahl von  $X$  und  $Y$ .

*Beweis:*

Offensichtlich ist  $\{X, Y\}$  eine Basis von  $\sigma$ . Ist  $\{X', Y'\}$  eine weitere Basis, so erfolgt der Übergang von  $\{X, Y\}$  zu  $\{X', Y'\}$  durch Anwendung der elementaren Transformationen  $(X, Y) \mapsto (Y, X)$ ,  $(X, Y) \mapsto (\lambda X, Y)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(X, Y) \mapsto (X + \lambda Y, Y)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Die Zahl  $K(X, Y)$  ist invariant unter jeder dieser Transformationen.  $\square$

**Definition 3.2.5:**

Ist  $\sigma \subset T_x M$  ein zweidimensionaler Unterraum und ist  $\{X, Y\}$  eine beliebige Basis von  $\sigma$ , so heißt  $K(\sigma) := K(X, Y)$  die Schnittkrümmung von  $\sigma$  in  $x$ .

$K(\sigma)$  ist nach der obigen Proposition wohldefiniert. Aus der Kenntniss aller  $K(\sigma)$  lässt sich der Krümmungstensor rekonstruieren, die Informationsgehalte sind also äquivalent.

**Lemma 3.2.6:**

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum der Dimension  $d \geq 2$  und seien  $R : V \times V \rightarrow \times V \rightarrow V$  und  $R' : V \times V \times V \rightarrow V$  trilineare Abbildungen, sodass (formal) die Bedingungen (i) – (iv) in Lemma 3.2.3 erfüllt sind, d.h. mit  $V$  anstelle von  $T_x M$ . Sind  $X, Y$  zwei linear unabhängige Vektoren, so schreiben wir  $\sigma := \text{lin}\{X, Y\}$  und wir setzen  $K(\sigma) := \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{|X \wedge Y|^2}$  und  $K'(\sigma)$  analog mit  $R'$ . Gilt  $K(\sigma) = K'(\sigma)$  für alle zweidimensionalen Unterräume, so gilt  $R = R'$ .

*Beweis:*

Es genügt zu zeigen, dass  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle R'(X, Y)Z, T \rangle$  für alle  $X, Y, Z, T \in V$ . Nach Voraussetzung hat man  $\langle R(X, Y)X, Y \rangle = \langle R'(X, Y)X, Y \rangle$  für alle  $X, Y \in V$ . Damit folgt auch  $\langle R(X + Z, Y)(X + Z), Y \rangle = \langle R'(X + Z, Y)(X + Z), Y \rangle$ , d.h.

$$\begin{aligned} & \langle R(X, Y)X, Y \rangle + 2 \langle R(X, Y)Z, Y \rangle + \langle R(Z, Y)Z, Y \rangle \\ &= \langle R'(X, Y)X, Y \rangle + 2 \langle R'(X, Y)Z, Y \rangle + \langle R'(Z, Y)Z, Y \rangle, \end{aligned}$$

also  $\langle R(X, Y)Z, Y \rangle = \langle R'(X, Y)Z, Y \rangle$  für alle  $X, Y, Z \in V$ . Insbesondere also

$$\langle R(X, Y + T)Z, Y + T \rangle = \langle R'(X, Y + T)Z, Y + T \rangle,$$

d.h.

$$\langle R(X, Y)Z, T \rangle + \langle R(X, T)Z, Y \rangle = \langle R'(X, Y)Z, T \rangle + \langle R'(X, T)Z, Y \rangle.$$

Dies kann man umschreiben in

$$\langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle R'(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(Y, Z)X, T \rangle - \langle R'(Y, Z)X, T \rangle$$

unter Ausnutzung der Symmetrien wie in Lemma 3.2.3. Daraus kann man schlussfolgern, dass die linke Seite invariant unter Anwendung von zyklischen Permutationen der ersten drei Elemente ist. Mit der Bianchi-Identität (Lemma 3.2.3 (ii)) folgt

$$3(\langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle R'(X, Y)Z, T \rangle) = 0,$$

und damit die Behauptung.  $\square$

### Beispiel:

Für ein zweidimensionales Flächenstück  $F$  im  $\mathbb{R}^3$  ist  $\dim T_x F = 2$ , d.h. es gibt nur einen relevanten Unterraum  $\sigma = T_x F$  und somit nur eine Schnittkrümmung  $K(T_x F) = K_x(\sigma)$ .

**Behauptung:** Die Schnittkrümmung  $K_\sigma$  stimmt mit der Gauß-Krümmung  $\kappa_1(x)\kappa_2(x)$  in  $x$  überein.

Dazu sei  $F = f(W)$  ein zweidimensionales, parametrisiertes Flächenstück, d.h.  $F \subset \mathbb{R}^3$ ,  $f : W \rightarrow \mathbb{R}^3$  glatt etc., wobei  $W \subset \mathbb{R}^2$ , d.h.  $f = f(w_1, w_2)$  und  $T_x F = \text{lin}\left\{\frac{\partial f}{\partial w^1}(w), \frac{\partial f}{\partial w^2}(w)\right\}$  mit  $f(w) = x$  und die erste Fundamentalform hat die darstellende Matrix  $G = (g_{ij})$  mit  $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial w^i}, \frac{\partial f}{\partial w^j} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}$ , d.h. für  $u = u^i \frac{\partial f}{\partial w^i}$  und  $v = v^j \frac{\partial f}{\partial w^j}$  ergibt sich  $I_x(u, v) = \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^3} = g_{ij} u^i v^j$ . Zusammen mit dem Einheitsnormalenvektor  $N(x)$  in  $x \in F$ ,  $N(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial w^1}(x) \times \frac{\partial f}{\partial w^2}(w)}{\left| \frac{\partial f}{\partial w^1}(x) \times \frac{\partial f}{\partial w^2}(w) \right|}$  erhält man eine positiv orientierte Basis  $\frac{\partial f}{\partial w^1}(w), \frac{\partial f}{\partial w^2}(w), N(x)$  von  $\mathbb{R}^3$ .

Wir schreiben auch  $\tilde{N}(w) := N(f(w)) = N(x)$  mit  $x = f(w)$ . Nach Kettenregel hat man  $D\tilde{N}(w) = DN(x) \circ Df(w)$  und

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial w^i}(w) = DN(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial w^i}(w). \quad (*)$$

Für die zweite Fundamentalform hat man

$$\begin{aligned} II_x(u, v) &= I_x(u, -DN(x)v) = \langle u, -DN(x)v \rangle_{\mathbb{R}^3} = u^i v^j \left\langle \frac{\partial f}{\partial w^i}(w), -DN(x) \frac{\partial f}{\partial w^j}(w) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &\stackrel{(*)}{=} u^i v^j \left\langle \frac{\partial f}{\partial w^i}(w), -\frac{\partial \tilde{N}}{\partial w^j}(w) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = u^i v^j b_{ij} \end{aligned}$$

wobei  $b_{ij} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial w^i}(w), -\frac{\partial \tilde{N}}{\partial w^j}(w) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial w^i \partial w^j}(w), \tilde{N}(w) \right\rangle_{\mathbb{R}^3}$ . Die darstellende Matrix der zweiten Fundamentalform ist also  $B = (b_{ij})$ .

Ist  $(b_i^j)$  die darstellende Matrix der Weingarten-Abbildung  $-DN(x) : T_x F \rightarrow T_x F$ , so hat man  $-DN(x) \left( \frac{\partial f}{\partial w^i} \right) = b_i^j \frac{\partial f}{\partial w^j}$  und  $b_{ik} = \left\langle -DN(x) \frac{\partial f}{\partial w^i}, \frac{\partial f}{\partial w^k} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = b_i^j g_{jk}$ , also  $(b_i^j) = BG^{-1}$ .

Die minimale und die maximale Hauptkrümmung  $\kappa_1(x)$  und  $\kappa_2(x)$  in  $x \in F$  hatten sich ergeben als die Eigenwerte der Weingarten-Abbildung  $-DN(x)$ . Also hat man für die Gaußkrümmung

$$\kappa_1 \kappa_2 = \det(b_i^j) = \det(BG^{-1}) = \frac{\det(B)}{\det(G)}. \quad (*)$$

Noch einige „visuelle“ Interpretationen: Ein Punkt  $x \in F$  heißt

$$\begin{cases} \text{elliptisch} & \text{falls } \kappa_1(x)\kappa_2(x) > 0 \\ \text{parabolisch} & \text{falls } \kappa_1(x)\kappa_2(x) = 0, \kappa_1(x) + \kappa_2(x) \neq 0 \\ \text{Flachpunkt} & \text{falls } \kappa_1(x) = \kappa_2(x) = 0. \end{cases}$$

Ein elliptischer Punkt ist z.B. bei einer glockenförmigen Figur der Fall. Hyperbolisch ist ein Punkt auf einem Affensattel. Parabolische Punkte hat man unter Anderem bei einem Zylinder. Ein flaches Blatt Papier hat Gauß-Krümmung null. Biegen ohne Falten oder Reißen belässt die Gaußkrümmung bei null. Möchte man das Papier auf eine Sphäre oder eine Sattelfläche (hyperbolische Punkte) aufkleben, muss man es reißen, einschneiden, falten o.ä. Dies ändert die Gaußkrümmung.

**Bemerkung:**

Man kann das lokal auch durch die Hesse-Matrix einer geeigneten Funktion ausdrücken (Monge'sche Koordinaten), vgl. Analysis 2.

Wir betrachten den Riemannschen Zusammenhang (die kovariante Ableitung)  $\nabla$  auf  $F$ . In Richtung  $\frac{\partial f}{\partial w^i}$  war es er definiert als

$$\nabla_{\frac{\partial f}{\partial w^i}} \left( \frac{\partial f}{\partial w^j} \right) = D_{\frac{\partial f}{\partial w^i}} \left( \frac{\partial f}{\partial w^j} \right) - \left\langle D_{\frac{\partial f}{\partial w^i}} \frac{\partial f}{\partial w^j}, \tilde{N} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \tilde{N} = \frac{\partial^2 f}{\partial w^i \partial w^j} - \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial w^i \partial w^j}, \tilde{N} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \tilde{N}$$

wobei  $D_v$  die Richtungsableitung in Richtung  $v \in \mathbb{R}^3$  im  $\mathbb{R}^3$ -Sinne bezeichnet. Dies erfüllt  $\nabla_{\frac{\partial f}{\partial w^i}} \left( \frac{\partial f}{\partial w^j} \right) = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial w^k}$  wie in der allgemeinen Theorie. Also folgen die folgenden Gauß-Weingarten-Gleichungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial w^i \partial w^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial w^k} + b_{ij} \tilde{N}, \quad i, j = 1, 2. \quad (\S)$$

Andererseits folgt aus (\*)

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial w^i} = -b_{ij} g^{jk} \frac{\partial f}{\partial w^k} = -b_i^k \frac{\partial f}{\partial w^k}, \quad (\S\S)$$

denn

$$\left\langle -b_{ij} g^{jk} \frac{\partial f}{\partial w^k}, \frac{\partial f}{\partial w^l} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = -b_{ij} g^{jk} g_{kl} = -b_{ij} \delta_l^j = -b_{il} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial w^l}, \frac{\partial \tilde{N}}{\partial w^i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \tilde{N}}{\partial w^i}, \frac{\partial f}{\partial w^l} \right\rangle.$$

Wir leiten nun die Gauß-Weingarten-Gleichungen (§) ab und setzen ein:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial w^k} \frac{\partial^2 f}{\partial w^i \partial w^j} - \frac{\partial}{\partial w^j} \frac{\partial^2 f}{\partial w^i \partial w^k} \\
&\stackrel{(\S)}{=} \frac{\partial}{\partial w^k} \Gamma_{ij}^s \frac{\partial f}{\partial w^s} - \frac{\partial}{\partial w^j} \Gamma_{ik}^s \frac{\partial f}{\partial w^s} + \Gamma_{ij}^r \frac{\partial^2 f}{\partial w^k \partial w^r} - \Gamma_{ik}^r \frac{\partial^2 f}{\partial w^j \partial w^r} \\
&+ \left( \frac{\partial}{\partial w^k} b_{ij} \right) \tilde{N} - \left( \frac{\partial}{\partial w^j} b_{ik} \right) \tilde{N} + b_{ij} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial w^k} - b_{ik} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial w^j} \\
&= \left( \frac{\partial}{\partial w^k} \Gamma_{ij}^s - \frac{\partial}{\partial w^j} \Gamma_{ik}^s \right) \frac{\partial f}{\partial w^s} + \Gamma_{ij}^r \left( \Gamma_{kr}^s \frac{\partial f}{\partial w^s} + b_{kr} \tilde{N} \right) - \Gamma_{ik}^r \left( \Gamma_{jr}^s \frac{\partial f}{\partial w^s} + b_{jr} \tilde{N} \right) \\
&+ \left( \frac{\partial}{\partial w^k} b_{ij} - \frac{\partial w^j}{\partial b_{ik}} \right) \tilde{N} - b_{ij} b_{km} g^{ms} \frac{\partial f}{\partial w^s} + b_{ik} b_{jm} g^{ms} \frac{\partial f}{\partial w^s}
\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichheit (§§) benutzt haben. Offensichtlich müssen also alle Koeffizienten der Vektorfelder  $\frac{\partial f}{\partial w^s}$ ,  $s = 1, 2$  verschwinden, also muss für alle  $i, j, k, s$  gelten

$$\frac{\partial}{\partial w^k} \Gamma_{ij}^s - \frac{\partial}{\partial w^j} \Gamma_{ik}^s + \left( \Gamma_{ij}^r \Gamma_{skr} - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^s \right) = (b_{ij} b_{km} - b_{ik} b_{jm}) g^{ms}. \quad (\#)$$

Diese Gleichungen heißen Gauß-Gleichungen.

**Bemerkung:**

Das Verschwinden der Koeffizienten von  $\tilde{N}$  forciert

$$\frac{\partial}{\partial w^k} b_{ij} - \frac{\partial}{\partial w^j} b_{ik} + \Gamma_{ij}^r b_{kr} - \Gamma_{ik}^r b_{jr} = 0,$$

auch Codazzi-Mainardo-Gleichungen genannt.

Die Schnittkrümmung von  $F$  ist gegeben durch

$$K \left( \frac{\partial f}{\partial w^1}, \frac{\partial f}{\partial w^2} \right) = \frac{1}{\det G} \left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial w^1}} \nabla_{\frac{\partial f}{\partial w^2}} \frac{\partial f}{\partial w^1} - \nabla_{\frac{\partial f}{\partial w^2}} \nabla_{\frac{\partial f}{\partial w^1}} \frac{\partial f}{\partial w^1}, \frac{\partial f}{\partial w^2} \right\rangle,$$

denn die Lie-Klammer von  $\frac{\partial f}{\partial w^i}, \frac{\partial f}{\partial w^j}$  verschwinden für alle  $i, j$ .

Man hat  $\nabla_{\frac{\partial f}{\partial w^2}} \frac{\partial f}{\partial w^1} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial f}{\partial w^1} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial f}{\partial w^2}$  und somit

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial f}{\partial w^1}} \nabla_{\frac{\partial f}{\partial w^2}} \frac{\partial f}{\partial w^1} &= \left( \frac{\partial}{\partial w^1} \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 \right) \frac{\partial f}{\partial w^1} \\
&+ \left( \frac{\partial}{\partial w^1} \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \left( \Gamma_{12}^2 \right)^2 \right) \frac{\partial f}{\partial w^2}
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial f}{\partial w^2}} \nabla_{\frac{\partial f}{\partial w^1}} \frac{\partial f}{\partial w^1} &= \left( \frac{\partial}{\partial w^2} \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 \right) \frac{\partial f}{\partial w^1} \\
&+ \left( \frac{\partial}{\partial w^2} \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 \right) \frac{\partial f}{\partial w^2}
\end{aligned}$$

Multiplikation der Gauß-Gleichung (§) für  $i = j = 1$  und  $k = 2$  mit  $g_{s2}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial w^1}} \nabla_{\frac{\partial f}{\partial w^2}} \frac{\partial f}{\partial w^1} - \nabla_{\frac{\partial f}{\partial w^2}} \nabla_{\frac{\partial f}{\partial w^1}} \frac{\partial f}{\partial w^1}, \frac{\partial f}{\partial w^2} \right\rangle &= (b_{11}b_{2m} - b_{12}b_{1m})g^{ms}g_{s2} = (b_{11}b_{22} - b_{12}^2) \\ &= \det B. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun weitere Krümmungsbegriffe.

**Definition 3.2.7:**

Sei  $x \in M$  und  $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x M$ . Die *Ricci-Krümmung* von  $M$  in Richtung  $X$  ist definiert als  $\text{Ric}(X, X) := g^{il} \left\langle R \left( X, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^l}, X \right\rangle$ . Der Ricci-Tensor ist definiert als  $R_{ik} := g^{jl} R_{ijkl}$ .

Aus Lemma 3.2.3 (iv) ergibt sich die Symmetrie  $R_{ik} = R_{ki}$ .

**Definition 3.2.8:**

Sei  $x \in M$ . Die skalare Krümmung ist definiert als  $R := g^{ik} R_{ik}$ .

Die Ricci-Krümmung ist (bis auf Konstante) das arithmetische Mittel der Schnittkrümmungen aller Ebenen  $\sigma \subset T_x M$ , die  $X$  enthalten (d.h.  $X \in \sigma$ ). Die Skalarkrümmung ist (bis auf Konstante) das arithmetische Mittel der Ricci-Krümmung in Richtung der Einheitsvektoren und somit das Mittel der Schnittkrümmungen aller Ebenen.

**Bemerkung:**

Manche Autoren definieren die Ricci-Krümmung auch genau als das Mittel  $\frac{1}{d-1} \text{Ric}(X, X)$  und die Skalarkrümmung als  $\frac{1}{d} R$ .

Wir schauen uns zunächst eine algebraische Interpretation an: Auf  $T_x M$  kann man eine Bilinearform  $Q : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $Q(X, Y) := \text{tr}(Z \mapsto R(X, Y)Z)$ ,  $X, Y \in T_x M$ . Hier bezeichnet  $\text{tr}$  die Spur eines linearen Endomorphismus auf  $T_x M$ . Sie ist definiert als die Spur der darstellenden Matrix bzgl. einer beliebigen Basis in  $T_x M$  und ist nicht von der Wahl dieser Basis abhängig. Hier betrachten wir den Endomorphismus  $Z \mapsto R(X, Z)Y$  auf  $T_x M$ .

$Q$  ist symmetrisch: Ist  $\{z_1, \dots, z_d = X\}$  eine Orthonormalbasis in  $T_x M$ , so folgt

$$Q(X, Y) = \text{tr}(Z \mapsto R(X, Z)Y) = \sum_{i=1}^d \langle R(X, Z_i)Y, Z_i \rangle = \sum_{i=1}^{d-1} \langle R(Y, Z_i)X, Z_i \rangle = Q(Y, X).$$

Man hat  $\text{Ric}(X, X) = Q(X, X)$ . Andererseits gibt es zu  $Q$  auch einen selbstadjungierten linearen Operator  $K : T_x M \rightarrow T_x M$  mit  $\langle K(X), Y \rangle = Q(X, Y)$ . Für  $K$  ergibt sich dann

$$\text{tr} K = \sum_{j=1}^{d-1} \langle R(X, Z_j)X, Z_j \rangle$$

und  $R = \sum_{j=1}^d \text{Ric}(Z_j, Z_j)$  für eine Orthonormalbasis  $\{Z_1, \dots, Z_d = X\}$ . Diese beiden Identitäten kann man auch als Definition benutzen.

### 3.3 Der Laplace-Operator und Krümmung

Wir betrachten einige Zusammenhänge zwischen Krümmung und Elementen der Analysis. Dabei studieren wir zunächst eine Version zweiter Ordnung der kovarianten Ableitung.

**Definition 3.3.1:**

Für eine glatte Funktion  $f$  auf  $M$  und zwei Vektorfelder  $X, Y$  setzen wir

$$\left(\nabla^2 f\right)(X, Y) := \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle.$$

Die bilineare Abbildung  $(X, Y) \mapsto (\nabla^2 f)(X, Y)$  heißt Hesse-Form von  $f$ . Die Abbildung  $X \mapsto \nabla_X \nabla f$  heißt Hesse-Tensor von  $f$ .

**Bemerkung 3.3.2:**

Die Hesse-Form  $\nabla^2 f$  von  $f$  ordnet also zwei Vektorfeldern  $X, Y$  die glatte Funktion  $\nabla^2 f(X, Y)$  zu.

Wegen der metrischen Eigenschaft von  $\nabla$  folgt

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(X, Y) &= \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle = \nabla_X \langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle = \nabla_X Y(f) - (\nabla_X Y)(f) \\ &= \nabla_X \nabla_Y f - (\nabla_X Y)(f). \end{aligned} \tag{§}$$

**Korollar 3.3.3:**

Die Hesse-Form von  $f$  ist symmetrisch, d.h.  $\nabla^2 f(X, Y) = \nabla^2 f(Y, X)$ .

*Beweis:*

Aus (§) ergibt sich

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(X, Y) - \nabla^2 f(Y, X) &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f) - Y(X(f)) + (\nabla_Y X)(f) \\ &= (XY - YX)(f) - [X, Y](f) = 0 \end{aligned}$$

wegen der Torsionsfreiheit des Zusammenhangs. □

Die Spur von  $\nabla^2 f$  bezüglich der Metrik  $g$  ist definiert durch

$$\text{tr}(\nabla^2 f) := g^{jk}(\nabla^2 f)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right).$$

**Beispiel:**

Sei  $M = \mathbb{R}^d$  mit der  $e_1, \dots, e_d$  als Standardbasis in  $\mathbb{R}^d \cong T_x \mathbb{R}^d$ . Dann gilt

$$(\nabla^2 f)(e_i, e_k) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}(\nabla f), e_k \right\rangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k}.$$

Also folgt

$$\text{tr}(\nabla^2 f) = \sum_{j=1}^d (\nabla^2 f)(e_j, e_j) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial (x^j)^2}.$$

Die Spur der Hesse-Matrix (bzw. der Hesse-Form) liefert den Laplace-Operator im  $\mathbb{R}^d$ .

**Satz 3.3.4:**

Sei  $f$  eine glatte Funktion auf  $M$ . Dann gilt

$$\Delta f = \text{tr} \left( \nabla^2 f \right).$$

Wir geben dazu zwei Beweise (bzw. Beweisskizzen). Der erste basiert auf lokalen Koordinaten. Wir nutzen dazu einige Relationen aus der Tensoranalysis, die wir hier nicht weiter überprüfen. Insbesondere kann man die Wirkung einer kovarianten Ableitung  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}$  auch für allgemeinere Objekte definieren als Vektorfelder, sogenannte Tensorfelder, speziell auch für  $g$  und  $g^{-1}$ . Wir importieren folgende Relationen (Übung):

- (1)  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} g^{ij} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i g^{lj} + \Gamma_{kl}^j g^{il}$ .
- (2)  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} g^{ij} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} g_{ij} = 0$  ('metrische Eigenschaft').
- (3)  $\Gamma_{ki}^i = \Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2} \left( g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} \right)$  ('Kontraktionsrelation').

**Lemma 3.3.5:**

Ist  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$  eine Matrix mit glatten Funktionen  $a_{ij} = a_{ij}(t)$  auf einem Intervall und ist  $A$  überall invertierbar und  $A^{-1} = (a^{ij})_{i,j=1,\dots,d}$ , so folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \det A(t) = a^{ij}(t) \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}(t) \det A(t).$$

*Beweis:*

Es bezeichne  $a_j(t)$  die  $j$ -te Spalte von  $A$ . Dann hat man

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \det A(t) &= \sum_{j=1}^d \left( a_1(t), \dots, a_{j-1}(t), \frac{\partial}{\partial t} a_j(t), a_{j+1}(t), \dots, a_d(t) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^d (-1)^{i+j} \frac{\partial}{\partial t} a_{ij}(t) \det A^{(ij)}(t), \end{aligned}$$

wobei  $A^{(ij)}(t)$  die Matrix ist, die durch Streichung der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte entsteht. Die Cramersche Regel liefert  $a^{ij}(t) = \frac{(-1)^{i+j}}{\det A(t)} \det A^{(ij)}(t)$ . Also folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \det A(t) = \sum_{i,j=1}^d \det A(t) \frac{\partial a_{ij}(t)}{\partial t} a^{ij}(t).$$

□

*Beweis von Satz 3.3.4:*

**Erste Beweisskizze:**

Betrachten wir die lokalen Koordinaten  $x^1, \dots, x^d$ , so gilt nach (§)

$$\left( \nabla^2 f \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial f}{\partial x^k} - \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} - \Gamma_{jk}^l \frac{\partial f}{\partial x^l}.$$

Andererseits hat man

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( g^{jk} \sqrt{\det g} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \left( \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^j} \sqrt{\det g} \frac{\partial f}{\partial x^k} + g^{jk} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\det g) \frac{\partial f}{\partial x^k} + g^{jk} \sqrt{\det g} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} \right),\end{aligned}$$

was nach Lemma 3.3.5 gleich

$$g^{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^k} + \frac{1}{2} g^{jk} g^{il} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^k}$$

ist. Das kann man mittels Christoffelsymbolen nun ausdrücken als

$$g^{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} + g^{jk} \Gamma_{jk}^l \frac{\partial f}{\partial x^k} = g^{jk} (\nabla^2 f) \left( \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \text{tr}(\nabla^2 f),$$

denn aus den Relationen (1) – (3) folgt

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^j} g^{jk} = \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^k} + \Gamma_{js}^j g^{sk} + \Gamma_{js}^k g^{js} = \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^j} + \frac{1}{2} g^{sk} g^{jl} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^j} + \Gamma_{js}^k g^{js}$$

□

Wir betrachten noch eine Darstellung der Divergenz, die sich nach ähnlichem Muster aus Lemma 3.3.5 ergibt.

**Lemma 3.3.6:**

Die Divergenz  $\text{div } X$  eines Vektorfeldes  $X$  ist die Spur der kovarianten Ableitung (des Riemannschen Zusammenhanges) bzgl.  $g$ , d.h.

$$\text{div } X = g^{ik} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle.$$

*Beweis:*

Sei  $X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ . Dann hat man

$$\begin{aligned}g^{ik} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle &= g^{ik} \frac{\partial X^j}{\partial x^i} g_{jk} + g^{ik} X^j \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle \\ &= \frac{\partial X^j}{\partial x^j} + g^{ik} X^j \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{\partial X^j}{\partial x^j} + X^j \Gamma_{ij}^i.\end{aligned}$$

Wegen (3) und Lemma 3.3.5 gilt wieder

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g^{im} x^j}{\partial} = \frac{1}{2} \frac{1}{\det g} = \frac{\det g}{x^j} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial \sqrt{\det g}}{\partial x^j}.$$

Somit folgt

$$g^{ik} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = \frac{\partial X^j}{\partial x^j} + X^j \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial \sqrt{\det g}}{\partial x^j} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{\det g} X^j) = \text{div } X.$$

□

Anstatt mit Koordinatenvektorfeldern zu arbeiten, kann man auch orthogonale Koordinatensysteme benutzen. Ist  $x \in M$  und  $U$  eine Umgebung von  $x$  mit lokalen Koordinaten  $x^1, \dots, x^d$ , so kann man in jedem Tangentialraum  $T_y M, y \in U$  durch Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens auf  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^d}$  eine Orthonormalbasis  $\{X_1(y), \dots, X_d(y)\}$  in  $T_y M$  konstruieren. Das ergibt glatte Vektorfelder  $X_1, \dots, X_d$  auf  $U$ , die in jedem Tangentialraum  $T_y M, y \in U$ , eine Orthonormalbasis bilden. Eine solche Familie von Vektorfeldern nennt man auch lokalen (orthogonalen) moving frame (lokales orthonormales frame field). Im Allgemeinen gibt es aber keine lokalen Koordinaten in  $U$ , sodass sich die  $X_1, \dots, X_d$  als Koordinatenvektorfelder darstellen lassen.

Rechnungen in moving frames sind in gewisser Weise ein komplementärer Blickwinkel zu Koordinaten. Aus der linearen und multilinearen Algebra folgt nun sofort:

**Korollar 3.3.7:**

*Es sei  $X_1, \dots, X_d$  ein moving frame. Dann gilt für jedes Vektorfeld  $X$  die Identität  $\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^d \langle \nabla_{X_i} X, X_i \rangle$ . Dies ist die Spur der kovarianten Ableitung, geschrieben in der Basis  $X_1, \dots, X_d$ .*

*Für jede glatte Funktion  $f$  gilt  $\operatorname{tr}(\nabla^2 f) = \sum_{i=1}^d (\nabla^2 f)(X_i, X_i)$ .*

Alternative Formulierung vom Beweis zu Satz 3.3.4:

Für  $X = \nabla f$  hat man  $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^d \langle \nabla_{X_i} \nabla f, X_i \rangle = \sum_{i=1}^d (\nabla^2 f)(X_i, X_i) = \operatorname{tr}(\nabla^2 f)$ .

Es gibt eine weitere Art von Koordinaten, die viele Rechnungen vereinfacht. Sie basiert auf Geodäten.

**Satz 3.3.8:**

*Sei  $x \in M$  und  $v \in T_x M$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  und genau eine Geodäte  $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$ , sodass  $\gamma(0) = x$  und  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Die Kurve  $\gamma$  hängt glatt von  $x, v$  ab.*

*Beweis:*

Die Euler-Lagrange-Gleichung (EL) sind ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung, also gibt es lokal genau eine Lösung mit obigen Anfangsdaten, und sie hängt glatt von den Anfangsdaten ab (Picard-Lindelöf).  $\square$

Löst die Kurve  $\gamma$  (EL), so lösen auch  $\gamma(\lambda t), \lambda \in \mathbb{R}$ , die Gleichungen (EL). Ist  $\gamma_v$  eine Lösung gemäß Satz 3.3.8 mit Anfangsdaten  $x$  und  $v$ , so hat man  $\gamma_v(t) = \gamma_{\lambda v}(\frac{t}{\lambda}), \lambda > 0, t \in [0, \varepsilon]$ . Andererseits hängt  $\gamma_v$  sogar glatt von  $v$  ab, und  $\{v \in T_x M : \|v\| = 1\}$  ist kompakt. Daraus folgt, dass ein  $\varepsilon_0 > 0$  existiert, sodass für alle  $v \in T_x M$  mit  $\|v\| = 1$  die Geodäte  $\gamma_v$  zumindest auf  $[0, \varepsilon_0]$  definiert ist. Also ist für  $v \in T_x M$  mit  $\|v\| \leq \varepsilon$  zumindest auf  $[0, 1]$  definiert.

**Definition 3.3.9:**

Sei  $v_x := \{v \in T_x M \mid \gamma_v \text{ ist definiert auf } [0, 1]\}$ . Die Abbildung  $\exp_x : V_x \rightarrow M, v \mapsto \gamma_v(1)$  heißt die Exponentialabbildung von  $M$  in  $x$ .

**Bemerkung:**

Der Definitionsbereich von  $\exp_x$  enthält also zumindest eine kleine Umgebung der  $0 \in T_x M$ .

Im Allgemeinen gilt  $V_x \subsetneq T_x M$ . Man kann zeigen, dass für kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten  $\exp_x$  auf ganz  $T_x M$  definiert werden kann.

**Satz 3.3.10:**

Die Exponentialabbildung  $\exp_x$  bildet eine Umgebung von  $0 \in T_x M$  diffeomorph auf eine Umgebung  $U$  von  $x \in M$  ab.

*Beweis:*

Da  $T_x M$  ein Vektorraum ist, identifizieren wir wieder  $T_0(T_x M)$  mit  $T_x M$ . Das Differential von  $\exp_x$  in  $0 \in T_x M$  wird dann zu einer linearen Abbildung von  $T_x M$  auf sich selbst,  $d\exp_x(0) : T_x M \rightarrow T_x M$ . Mit dieser Identifikation folgt

$$d\exp_x(0)(v) = \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{tv}(1) \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \gamma_v(t) \Big|_{t=0} = \dot{\gamma}_v(0) = v,$$

d.h.  $d\exp(0) = id_{T_x M}$ . Insbesondere hat also  $d\exp_x(0)$  maximalen Rang und nach dem Satz über die implizite Funktionen existiert eine Umgebung von  $0 \in T_x M$ , die diffeomorph auf eine Umgebung  $U$  von  $x \in M$  abgebildet wird.  $\square$

Man erhält nun „gute Koordinaten“ um  $x$ , indem man  $U$  wie im Satz zusammen mit der Umkehrabbildung der Exponentialabbildung anschaut: Sei  $(X_1, \dots, X_d)$  eine Orthonormalbasis von  $T_x M$ . Schreiben  $v \in T_x M$  in dieser Basis als  $v = v^i X_i$  und erhalten einen Isomorphismus  $\Phi$  zwischen  $T_x M$  und  $\mathbb{R}^d$  wie gewöhnlich mit  $\Phi(v) = (v^1, \dots, v^d)$ . Identifizieren wir  $T_x M$  und  $\mathbb{R}^d$  unter  $\Phi$ , so erhalten wir eine Umgebung der  $0 \in \mathbb{R}^d$ , die unter  $\exp^{-1}$  auf die  $U$  abgebildet wird.

**Definition 3.3.11:**

Die lokalen Koordinaten zu der Karte  $(\exp_x^{-1}, U)$  heißen (Riemannsche) Normalkoordinaten um  $x$ .

**Satz 3.3.12:**

In Normalkoordinaten um  $x$  hat man  $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ ,  $\Gamma_{jk}^i(x) = 0$  und  $g_{ij,k} = 0$  für alle  $i, j, k$ .

**Bemerkung:**

Normalkoordinaten sind definiert auf einer Umgebung  $U$  von  $x$  und sind orthonormal in  $T_x M$  (aber i.A. nicht auf ganz  $U$ , d.h. nicht für alle  $T_y M, y \in U$ ).

Sind  $x^1, \dots, x^d$  Normalkoordinaten um  $x$ , so hat man  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x = 0$ , wieder i.A. nicht auf ganz  $U$ .

Da wir zur Berechnung von  $\operatorname{div} X$  und  $\Delta f$  die Orthonormalität nur in  $x$  verwendet hatten, folgt sofort:

**Korollar 3.3.13:**

Sind  $x^1, \dots, x^d$  Normalkoordinaten um  $x$ , so gilt für jedes Vektorfeld  $X$

$$(\operatorname{div} X)(x) = \sum_{i=1}^d \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle_{T_x M}$$

und für jede glatte Funktion  $f$

$$\Delta f(x) = \operatorname{tr} \left( \nabla^2 f \right) \Big|_x = \sum_{i=1}^d \left( \nabla^2 f \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \Big|_x.$$

*Beweis von Satz 3.3.12:*

$g_{ij}(x) = \delta_{ij}$  folgt unmittelbar, da eine Orthonormalbasis in  $T_x M$  bezüglich  $g$  mittels  $\Phi$  auf eine Orthonormalbasis in  $\mathbb{R}^d$  abgebildet wird.

Es gibt eine Umgebung von  $0 \in \mathbb{R}^d$ , innerhalb derer Liniensegmente durch  $0$  auf Geodäten abgebildet werden: Die Linie  $t \mapsto tv$  für festes  $v \in \mathbb{R}^d$  wird für kleine  $t$  auf  $\gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t)$  abgebildet, wobei  $\gamma_v(t)$  die Geodäte ist mit  $\dot{\gamma}_v(t) = v$  (und parametrisiert nach Bogenlänge). Setzt man nun  $\gamma(t) := \exp_x(tv)$  in die Euler-Lagrange-Gleichung (EL) ein, so folgt  $\Gamma_{j,k}^i(\gamma(0))v^j v^k = 0$  für  $j, k = 1, \dots, d$  für alle  $v \in \mathbb{R}^d$ . Setzen  $v := \frac{1}{2}(e_l + e_m)$ , wobei  $e_1, \dots, e_d$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^d$  ist. Dann folgt wegen der Symmetrie  $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ , dass  $\Gamma_{lm}^i(x) = 0$  für alle  $i$  und somit für alle  $i, l, m$ .

Nach Definition also auch  $g_{im,k} + g_{km,j} - g_{jk,m} = 0$ . Eine zyklische Permutation und Summation liefert  $g_{im,k}(x) = 0$  für  $i, k, m$ .  $\square$

Wir können nun bequem einen Satz beweisen, der den Laplace-Operator, die Hesse-Form und die Ricci-Krümmung verbindet. Dazu: Ist  $V$  ein euklidischer Vektorraum und  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine Bilinearform und  $e_1, \dots, e_d$  eine Orthonormalbasis in  $V$  und  $A$  die darstellende Matrix, d.h.  $B(v, w) = \langle Av, w \rangle$ , so ist die Hilbert-Schmidt-Norm von  $B$   $\|B\|_{HS}$  definiert als die Hilbert-Schmidt-Norm von  $A$   $\|A\|_{HS}$ , d.h.

$$\|B\|_{HS} = \|A\|_{HS} := \sqrt{\sum_{i,j=1}^d |\langle e_i, Ae_j \rangle|^2}.$$

Mit Parseval ist dies

$$\|B\|_{HS} = \sqrt{\sum_{j=1}^d \langle Ae_j, Ae_j \rangle}.$$

Dies ist unabhängig von der Wahl der ONB  $e_1, \dots, e_d$ .

**Satz 3.3.14** (Bochner-Lichnerowicz-Weitzenböck-Formel):

Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $f$  eine glatte Funktion. Dann gilt

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 = \|\nabla^2 f\|_{HS}^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f). \quad (\text{BLW})$$

**Bemerkung:**

- (i) Die Formel (BLW) nennt man meistens Weitzenböck-Formel. Versionen davon für Differentialformen bzw. Dirac-Operatoren heißen Bochner-Formel bzw. Lichnerowicz-Formel.

(ii) Die Schlagkraft der Formel liegt darin, dass  $f$  frei gewählt werden kann (z.B. Eigenfunktionen, Distanzfunktionen etc.).

(iii) Ist  $f$  eine harmonische Funktion, d.h.  $\Delta f = 0$  auf  $M$ , so folgt

$$\frac{1}{2}\Delta |\nabla f|^2 = \|\nabla^2 f\|_{HS}^2 + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f),$$

d.h. „Diffusion“ und „kovariante Ableitung zweiter Ordnung“ differieren um einen Krümmungsterm.

(iv) Für  $M = \mathbb{R}^d$  reduziert sich (BLW) auf

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta (\|\nabla f\|^2) &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)^2 + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^3 f}{\partial (x^i)^2 \partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^j} \\ &= \|\text{Hess} f\|_{HS}^2 + \langle \nabla f, \nabla (\Delta f) \rangle. \end{aligned}$$

(v) Schreiben wir für zwei glatte Funktionen  $f$  und  $g$   $\Gamma(f, g) := \langle \nabla f, \nabla g \rangle$ , so folgt

$$\Gamma(f, g) = \frac{1}{2} (\Delta(fg) - f\Delta g - g\Delta f).$$

Schreiben wir ferner  $\Gamma_2(f, f) := \frac{1}{2}\Delta |\nabla f|^2 - \langle \nabla f, \nabla (\Delta f) \rangle$ , so ergibt BLW dann

$$\Gamma_2(f, f) = \|\nabla^2 f\|_{HS}^2 + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f). \quad (\Gamma)$$

Dies ist französischer Stil a la Bakry/Emery/Ledoux/Villani etc.

Man kann durch geschickte Wahl von  $f$  aus  $(\Gamma)$  schließen, dass folgende Aussagen äquivalent sind

$$\Gamma_2(f, f) \geq \rho \Gamma(f, f) \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty \iff \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \geq \rho \Gamma(f, f) \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty \quad (\sharp)$$

wobei  $\rho$  eine geeignete Funktion ist. Die beste Wahl für  $\rho$  ist der kleinste Eigenwert des Ricci-Tensors

$$\rho(x) = \inf_{x \in T_x M, x \neq 0} \frac{\text{Ric}(x, x)}{\langle x, x \rangle_{T_x M}},$$

variierend in  $x \in M$ .  $(\sharp)$  heißt curvature condition  $CD(\rho, \infty)$ , sie ist äquivalent zu  $(*)$ , d.h. zu  $\text{Ric} \geq \rho g$ .

Andererseits gilt für jede  $d \times d$ -Matrix  $A$  nach Cauchy-Schwarz

$$(\text{tr}(A))^2 = \left( \sum_{i=1}^d \langle A e_i, e_i \rangle \right)^2 \leq d \sum_{i=1}^d \langle A e_i, e_i \rangle^2 = d \|A\|_{HS}^2.$$

Also auch  $(\Delta f)^2 = \text{tr}(\nabla^2 f)^2 \leq d \|\nabla^2 f\|_{HS}^2$ . Somit folgt mit  $(\Gamma)$  die Relation

$$\Gamma_2(f, f) \geq \rho \Gamma(f, f) + \frac{1}{d} (\Delta f)^2. \quad (\sharp\sharp)$$

Hier ist  $\rho$  der kleinste Eigenwert des Ricci-Tensors.  $(\sharp\sharp)$  nennt man curvature dimension condition  $CD(\rho, d)$ .

(vi) Formel (BLW) kann man auch „hydrodynamisch“ aus der druckfreien Euler-Gleichung bekommen, vgl. Villani 2012.

(vii) Bochners Formel führt auch auf Sätze, die Krümmung und Topologie verbinden.

*Beweis von Satz 3.3.14:*

Sei  $x \in M$ . Wir zeigen die Formel in  $x \in M$ . Wir dürfen annehmen, dass  $x^1, \dots, x^d$  Normalkoordinaten um  $x$  sind und schreiben  $X_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Dann gilt nach Satz 3.3.12, dass  $\langle X_i, X_j \rangle_{T_x M} = g(x)(X_i, X_j) = \delta_{ij}$  und  $\nabla_{X_i} X_j|_x = 0$  für alle  $i, j = 1, \dots, d$ . Wegen  $\nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$  ergibt sich in  $T_x M$

$$\nabla f = \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j} X_j$$

und daher

$$\nabla_{\nabla f} X_i = \nabla_{\sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j} X_j} X_i = \sum_{j=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^j} \nabla_{X_j} X_i = 0.$$

Im Punkt  $x \in M$  hat man dann aus Korollar 3.3.13, aus der ONB-Eigenschaft, aus der Definition der Hesse-Form sowie der metrischen Eigenschaft des Riemannschen Zusammenhangs

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\nabla^2 |\nabla f|^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d (\nabla^2 f)(X_i, X_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \langle \nabla_{X_i} \nabla |\nabla f|^2, X_i \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d X_i \langle \nabla |\nabla f|^2, X_i \rangle - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \underbrace{\langle \nabla |\nabla f|^2, \nabla_{X_i} X_i \rangle}_{=0} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d X_i X_i (|\nabla f|^2) \\ &= \sum_{i=1}^d X_i (\nabla_{X_i} \nabla f, \nabla f) = \sum_{i=1}^d X_i (\nabla^2 f)(X_i, \nabla f) \stackrel{\text{symm.}}{=} \sum_{i=1}^d X_i (\nabla^2 f)(\nabla f, X_i) \\ &= \sum_{i=1}^d X_i \langle \nabla_{\nabla f} \nabla f, X_i \rangle = \sum_{i=1}^d \langle \nabla_{X_i} \nabla_{\nabla f} \nabla f, X_i \rangle + \sum_{i=1}^d \underbrace{\langle \nabla_{\nabla f} \nabla f, \nabla_{X_i} X_i \rangle}_{=0} \\ &= \sum_{i=1}^d \langle R(X_i, \nabla f) \nabla f, X_i \rangle + \sum_{i=1}^d \langle \nabla_{\nabla f} \nabla_{X_i} \nabla f, X_i \rangle + \sum_{i=1}^d \langle \nabla_{[X_i, \nabla f]} \nabla f, X_i \rangle. \end{aligned}$$

Der erste Summand ist  $\operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f)$ . Der zweite ist nach der metrischen Eigenschaft gleich

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d (\nabla f)(\nabla_{X_i} \nabla f, X_i) - \sum_{i=1}^d \underbrace{\langle \nabla_{X_i} \nabla f, \nabla_{\nabla f} X_i \rangle}_{=0} &= (\nabla f)(\operatorname{tr} (\nabla^2 f)) = \nabla f(\Delta f) \\ &= \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle. \end{aligned}$$

Der dritte Summand ist nach Definition 3.1.1 (Torsionsfreiheit) gleich

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d (\nabla^2 f) ([X_i, \nabla f], X_i) &= \sum_{i=1}^d (\nabla^2 f) (\nabla_{X_i} \nabla f, X_i) - \underbrace{\sum_{i=1}^d (\nabla^2 f) (\nabla_{\nabla f} X_i, X_i)}_{=0} \\ &= \sum_{i=1}^d \langle \nabla_{X_i} \nabla f, \nabla_{X_i} \nabla f \rangle = \|\nabla^2 f\|_{HS}^2 \end{aligned}$$

mit der Vorüberlegung vor Satz 3.3.14 (mit  $X \mapsto \nabla_X \nabla f$  anstelle  $A$ ).  $\square$

Ausgehend von (BLW) kann man die Wärmeleitungshalbgruppe  $(P_t)_{t \geq 0}$ , also die Halbgruppe zum Laplace-Beltrami-Operator  $\Delta$  mit der Ricci-Krümmung in Verbindung setzen. Es bezeichne  $(P_t)_{t \geq 0}$  die Wärmeleitungshalbgruppe für die Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  betrachtet mit dem Riemannschen Volumen  $\nu$ . Nach Satz 2.3.5 ist für jedes  $t > 0$  und  $f \in L^2(M)$  (oder  $f \in \mathcal{C}(M)$  oder  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ) die Funktion  $P_t f$  in  $\mathcal{C}^\infty(M)$ .

**Satz 3.3.15** (Li-Yau-Ungleichung):

Sei  $(M, g)$  eine  $d$ -dimensionale kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\text{Ric} \geq -Kg$  für eine Konstante  $K \geq 0$ , d.h.  $\inf_{x \in M} \inf_{X \in T_x M, X \neq 0} \frac{\text{Ric}(X, X)|_x}{\langle X, X \rangle_{T_x M}} \geq -K$ . Dann gilt für jedes  $\alpha > 1$ , jede glatte, positive Funktion  $f$  und jedes  $t > 0$  die Ungleichung

$$\frac{|\nabla P_t f|^2}{(P_t f)^2} - \alpha \frac{\Delta P_t f}{P_t f} \leq \frac{d\alpha^2}{2t} \left( 1 + \frac{2Kt}{\alpha - 1} \right) \quad (\text{LY})$$

in jedem Punkt  $x \in M$ .

**Bemerkung:**

(LY) ermöglicht den Beweis einer parabolischen Harnack-Ungleichung, gradient estimates und letztlich den Beweis beidseitiger Gaußscher heat kernel estimates.

*Beweis:*

Für eine glatte Funktion  $g$  liefert BLW

$$\frac{1}{2} \Delta (|\nabla g|^2) - \langle \nabla g, \nabla (\Delta g) \rangle \geq \frac{1}{d} (\Delta g)^2 - K |\nabla g|^2, \quad (\text{B})$$

denn  $(\Delta g)^2 = \text{tr}(\nabla^2 g)^2 \leq \frac{1}{d} \|\nabla^2 g\|_{HS}^2$ , siehe vorherigen Beweis.

Ist  $f$  positiv und glatt auf  $M$  und  $T > 0$ , so betrachten wir die Funktion  $g := \log P_t f$  auf  $M \times [0, T]$ . Man hat

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{1}{P_t f} \frac{\partial P_t f}{\partial t} = \frac{\Delta P_t f}{P_t f} \\ |\nabla g|^2 &= \frac{|\nabla P_t f|^2}{(P_t f)^2} \\ \Delta g &= \frac{\Delta P_t f}{P_t f} - \frac{|\nabla P_t f|^2}{(P_t f)^2}, \end{aligned}$$

also  $\Delta g + |\nabla g|^2 = \frac{\partial g}{\partial t}$ . Aus (B) folgt

$$\begin{aligned} \frac{2}{d} (\Delta g)^2 - 2K |\nabla g|^2 &\leq \Delta(|\nabla g|^2) - 2 \left\langle \nabla g, \frac{\partial}{\partial t} g \right\rangle + 2 \left\langle \nabla g, \nabla |\nabla g|^2 \right\rangle \\ &= \Delta(|\nabla g|^2) - \frac{\partial}{\partial t} |\nabla g|^2 + 2 \left\langle \nabla g, \nabla |\nabla g|^2 \right\rangle \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die Ungleichung mit  $t$  und setzen  $H := t |\nabla g|^2$ . Dann hat man

$$\frac{\partial H}{\partial t} = t \frac{\partial}{\partial t} |\nabla g|^2 + |\nabla g|^2,$$

also

$$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla g|^2 = \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{H}{t}$$

und

$$t \left( \frac{2}{d} (\Delta g)^2 - 2K |\nabla g|^2 \right) \leq \Delta H - \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{H}{t} + 2 \langle \nabla g, \nabla H \rangle. \quad (\#)$$

Man hat auch  $\Delta \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} |\nabla g|^2 = \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$  wegen der Gleichung für  $g$ . Setzen wir  $I := t \frac{\partial g}{\partial t}$ , so folgt

$$\frac{\partial I}{\partial t} = t \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + \frac{\partial g}{\partial t} = t \Delta \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t} + 2 \left\langle \nabla g, t \nabla \frac{\partial g}{\partial t} \right\rangle$$

und somit

$$0 = \Delta I - \frac{\partial}{\partial t} I + \frac{I}{t} + 2 \langle \nabla g, \nabla I \rangle. \quad (\#\#)$$

Setzen wir  $G := H - \alpha I = t (\nabla g)^2 - \alpha \frac{\partial g}{\partial t}$ . Durch Addition von (#) und (\#\#) ergibt sich auf  $M \times [0, T]$  die Ungleichung

$$t \left( \frac{2}{d} (\Delta g)^2 - 2K |\nabla g|^2 \right) \leq \Delta G - \frac{\partial}{\partial t} G + \frac{G}{t} + 2 \langle \nabla g, \nabla G \rangle.$$

Sei  $(x, t)$  ein Punkt des kompakten Raumes  $M \times [0, T]$ , in dem  $G$  das Maximum annimmt. Nehmen wir zunächst an,  $G(x, t) > 0$ , so muss  $t > 0$  gelten und in  $(x, t)$  muss man haben  $\nabla G = 0$ ,  $\frac{\partial G}{\partial t} \geq 0$  (sonst kein kritischer Punkt) und auch  $\Delta g \leq 0$  (denn die Spur einer diagonalisierbaren Matrix ist die Summe ihrer Eigenwerte mit Vielfachheit, und die Hesse-Matrix von  $G$  als Funktion von  $x$  in  $x$  ist nichtpositiv definit).

Also folgt daraus, dass

$$\frac{2}{d} (\Delta g)^2 \leq \frac{G}{t^2} + 2K |\nabla g|^2.$$

Erinnern wir uns, dass  $\Delta g = \frac{\partial g}{\partial t} - |\nabla g|^2$  und  $G = t \left( |\nabla g|^2 - \alpha \frac{\partial g}{\partial t} \right)$ , so gilt

$$\frac{G}{\alpha t} = \frac{|\nabla g|^2}{\alpha} - \frac{\partial g}{\partial t}$$

und

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) |\nabla g|^2 + \frac{G}{\alpha t} = \frac{\partial g}{\partial t} - \Delta g - \frac{1}{\alpha} |\nabla g|^2 + \frac{1}{\alpha} |\nabla g|^2 - \frac{\partial g}{\partial t} = -\Delta g.$$

Somit folgt

$$\frac{2}{d} \left( \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) |\nabla g|^2 + \frac{G}{\alpha t} \right)^2 \leq \frac{G}{t^2} + 2K |\nabla g|^2.$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit  $\alpha^2 t^2$ , so folgt daraus

$$\frac{2}{d} \left( \alpha t \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{|\nabla g|^2}{G} + 1 \right) G^2 \leq \alpha^2 G + 2\alpha^2 t^2 K |\nabla g|^2.$$

Setzen wir  $J := \frac{|\nabla g|^2}{G} > 0$  und teilen wir durch  $G$ , so erhalten wir in  $(x, t)$

$$\frac{2}{d} (1 + (\alpha - 1)tJ)^2 G \leq \alpha^2 (1 + 2Kt^2 J).$$

Also:

$$G \leq \frac{d\alpha^2}{2} \frac{1 + 2Kt^2 J}{(1 + (\alpha - 1)tJ)^2} \leq \frac{d\alpha^2}{2} \left( 1 + \frac{2Kt^2 J - 2(\alpha - 1)tJ - (\alpha - 1)^2 t^2 J^2}{(1 + (\alpha - 1)tJ)^2} \right)$$

und wegen  $\alpha > 1, J > 0, (\alpha - 1)tJ > 0$  folgt

$$G \leq \frac{d\alpha^2}{2} \left( 1 + \frac{2Kt^2 J}{1 + (\alpha - 1)tJ} \right) \leq \frac{d\alpha^2}{2} \left( 1 + \frac{2Kt}{\alpha - 1} \right).$$

Einsetzen von  $G$  ergibt die (LY)-Ungleichung. □

**Bemerkung:**

Aus (LY) lässt sich die folgende Gradientenabschätzung ableiten: Falls  $\text{Ric} \geq -K$ , so gilt für alle  $T > 0$  und  $0 < t \leq T$  und für alle positiven, glatten Funktionen  $f$ :

$$\|\nabla P_t f\|_{L^\infty(M, \nu)} = \left\| \sqrt{g(\nabla P_t f, \nabla P_t f)} \right\|_{L^\infty(M, \nu)} \leq \frac{c}{\sqrt{t}} \|f\|_{L^\infty(M, \nu)}, \quad (\text{GE})$$

wobei  $C = \sqrt{3d(1 + 2KT)}$ . (GE) stellt z.B. eine uniforme und explizite Abschätzung für  $P_t f(x) - P_t f(y)$  zur Verfügung. Siehe dazu z.B. bei Cranston, '91.

*Beweisskizze:*

Wegen der Standardzerlegung  $\Delta P_t f = (\Delta P_t f)^+ - (\Delta P_t f)^-$  in Differenz zweier nichtnegativer Funktionen gilt mit  $\alpha = 2$ , dass

$$(\Delta P_t f)^- \leq d(1 + 2KT) \frac{1}{t} P_t f.$$

Unter unseren Voraussetzungen gilt  $\int_M p_t(x, y) \nu(dx) = 1$  für alle  $x \in M$  („ $M$  ist stochastisch vollständig“), also auch (mit Fubini)

$$\int_M P_t f d\nu = \int_M f d\nu,$$

d.h.  $\nu$  ist ein invariantes Maß für  $(P_t)_{t \geq 0}$  bzw. für  $\Delta$ . Man kann auch folgern, dass  $\int_M \Delta P_t f d\nu = 0$ . Also gilt

$$\int_M (\Delta P_t f)^+ d\nu = \int_M (\Delta P_t f)^- d\nu \leq d(1 + 2KT) \int_M |f| d\nu$$

und somit

$$\|\Delta P_t f\|_{L^1(M, \nu)} \leq \frac{2C'}{t} \|f\|_{L^1(M, \nu)}$$

mit  $C' = d(1 + 2KT)$ . Wegen der Selbstadjungiertheit von  $\Delta$  und  $P_t$  und wegen der Kommutativität beider Operatoren für glatte  $f$  in  $L^2(M, \nu)$  ist der duale Operator zu  $\Delta P_t f : L^1(M, \nu) \rightarrow L^1(M, \nu)$  gerade  $\Delta P_t : L^\infty(M, \nu) \rightarrow L^\infty(M, \nu)$ . Daraus folgt also, dass

$$\|\Delta P_t f\|_{L^\infty(M, \nu)} \leq \frac{2C'}{t} \|f\|_{L^\infty(M, \nu)}.$$

Setzen wir dies in (LY) ein, so ergibt sich für  $\alpha = 2$

$$\begin{aligned} \|\nabla P_t f\|_{L^\infty(M, \nu)}^2 &\leq \frac{d}{t} (1 + 2KT) \underbrace{\|P_t f\|_{L^\infty(M, \nu)}^2}_{\leq \|f\|_{L^\infty}^2} + 2 \underbrace{\|\Delta P_t f\|_{L^\infty(M, \nu)} \|P_t f\|_{L^\infty(M, \nu)}}_{\leq \frac{2C'}{t} \|f\|_{L^\infty}} \\ &\leq \frac{3C'}{t} \|f\|_{L^\infty}^2, \end{aligned}$$

also die Behauptung. □

Eine weitere Folgerung aus (LY) ist die parabolische Harnack-Ungleichung. Sie vergleicht Lösungen der Wärmeleitungsgleichung in verschiedenen Raum-Zeit-Punkten. Wir benötigen zur Formulierung eine Metrik auf  $M$  (wie auch für heat kernel estimates).

Sei dazu  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für eine glatte Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  ist die Länge  $L(\gamma)$  von  $\gamma$  definiert durch

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{g(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt.$$

In lokalen Koordinaten  $x^1, \dots, x^d$  mit  $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$  hat man

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t)} dt.$$

Man hat  $L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \leq (b-a)^{1/2} \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt = \sqrt{b-a} E(\gamma)^{1/2}$ . Die Gleichheit tritt ein, falls  $\|\dot{\gamma}(t)\| = c$ .

$\gamma : [a, b] \rightarrow M$  heißt stückweise glatte Kurve, falls eine Zerlegung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  existiert und glatte Kurven  $\gamma_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow M, i = 0, \dots, n-1$  mit  $\gamma_i(t_{i+1}) = \gamma_{i+1}(t_{i+1})$ . Setze dann  $L(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} L(\gamma_i)$ . Da  $\dot{\gamma}(t)$  für fast alle  $t \in [a, b]$  existiert, gilt wieder  $L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ .

Betrachten wir eine natürliche Abstandsfunktion auf  $M$ . Für  $x, y \in M$  setzen wir

$$d(x, y) := \inf\{L(\gamma) : \gamma : [a, b] \rightarrow M \text{ stückweise glatt mit } \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\},$$

oder falls kein solches  $\gamma$  existiert,  $d(x, y) = \infty$ . Man nennt  $d(x, y)$  die geodäsische Distanz zwischen  $x$  und  $y$ . Zwei Punkte  $x, y$  einer zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  können stets durch eine stückweise glatte Kurve verbunden werden (also gilt  $d(x, y) < \infty$ ). Dazu setzen wir

$$E_x := \{y \in M \mid x \text{ und } y \text{ können durch stückweise glatte Kurve verbunden werden}\}.$$

$E_x$  ist offen, denn ist  $y \in E_x$  und  $(U, \varphi)$  eine Karte um  $y$  und  $z \in U$ , so folgt  $z \in E_x$ , denn die glatte Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow U, \gamma(t) := \varphi^{-1}(\varphi(y) + (t-a) \frac{\varphi(z) - \varphi(y)}{b-a})$  verbindet  $y$  und  $z$ . Also sind dann auch  $x$  und  $z$  durch stückweise glatte Kurven verbunden.

Andererseits ist  $\cup_{y \notin E_x} E_y$  offen und da  $E_x \cup \cup_{y \notin E_x} E_y = M$  gilt, muss  $E_x = M$  sein wegen dem Zusammenhang von  $M$ , denn  $x \in E_x$  und damit ist  $E_x$  nichtleer.

Die geodäsische Distanz ist eine Metrik auf  $M$ :

**Lemma 3.3.16:**

Für  $M$  zusammenhängend ist  $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$  eine Funktion mit

i)  $d(x, y) \geq 0 \forall x, y \in M, d(x, y) > 0$ , falls  $x \neq y$ ,

ii)  $d(x, y) = d(y, x)$  für alle  $x, y \in M$ ,

iii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  für alle  $x, y, z \in M$ ,

d.h.  $(M, d)$  wird zu einem metrischen Raum. Ist  $M$  nicht zusammenhängend, so ist  $d : M \times M \rightarrow [0, \infty]$ , aber alle Eigenschaften gelten nach wie vor.

*Beweis:*

(ii), (iii) und die erste Aussage in (i) sind klar. Wir zeigen  $d(x, y) > 0$  für  $x \neq y$ . Sei  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine Karte um  $x$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $D_\varepsilon(\varphi(x)) = \{\eta \in \mathbb{R}^d \mid |\eta - \varphi(x)| \leq \varepsilon\} \subset \varphi(U)$  und  $y \notin \varphi^{-1}(D_\varepsilon(\varphi(x)))$ .

In  $U$  sei  $g$  dargestellt durch  $g_{ij}$ . Da  $g_{ij}(x)$  positiv definit ist, gilt  $\lambda := \inf_{\xi \neq 0, \xi \in \mathbb{R}^d} \frac{g_{ij}(x) \xi^i \xi^j}{|\xi|^2} >$

0. Da die Funktion  $\eta \mapsto g_{ij}(\varphi^{-1}(\eta))$  stetig ist und  $D_\varepsilon(\varphi(x))$  kompakt ist, ist sie (gleichmäßig) stetig auf  $D_\varepsilon(\varphi(x))$ , und man hat  $g_{ij}(\eta)\xi^i\xi^j \geq \lambda|\xi|^2$  für alle  $\eta \in D_\varepsilon(\varphi(x))$  und  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^d) \in \mathbb{R}^d$ . Für jede (stückweise glatte) Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  mit  $\gamma(a) = x$  gilt somit

$$L(\gamma) \geq L(\gamma \cap \varphi^{-1}(D_\varepsilon(\varphi(x)))) \geq \lambda\varepsilon > 0,$$

denn  $\varphi \circ \gamma$  muss einen Punkt  $\zeta \in \partial D_\varepsilon(\varphi(x))$  enthalten. Dann hat  $\varphi^{-1}(\zeta)$  mindestens den Abstand  $\lambda\varepsilon$  von  $x$  auf  $M$ .  $\square$

**Korollar 3.3.17:**

*Die Topologie auf  $M$  induziert durch die geodäsische Distanz  $d$  stimmt mit der ursprünglichen Topologie von  $M$  überein.*

*Beweis:*

Es genügt zu zeigen, dass in jeder Karte die Topologie induziert durch  $d$  übereinstimmt mit der Topologie auf  $\mathbb{R}^d$  (induziert durch die euklidische Distanz). Für jedes  $x \in M$  existiert eine Karte  $(U, \varphi)$  um  $x$  und  $\varepsilon > 0$  mit  $D_\varepsilon(\varphi(x)) \subset \varphi(U)$  und es existieren positive Konstanten  $\lambda, \mu > 0$  mit  $\lambda^2 \|\xi\|^2 \leq g_{ij}(\varphi^{-1}(\eta))\xi^i\xi^j \leq \mu^2 \|\xi\|^2$  für alle  $\eta \in D_\varepsilon(\varphi(x))$  und für alle  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . Also hat man  $\lambda \|\eta - \varphi(x)\| \leq d(\varphi^{-1}(\eta), x) \leq \mu \|\eta - \varphi(x)\|$  für alle  $\eta \in D_\varepsilon(\varphi(x))$ .

Daraus folgt, dass mit  $B(z, \delta) := \{y \in M \mid d(z, y) < \delta\}$  gilt

$$\text{int}(D_{\lambda\delta}(\varphi(x))) \subset \varphi(B(x, \delta)) \subset \text{int}(D_{\mu\delta}(\varphi(x))),$$

falls  $\mu\delta \leq \varepsilon$ .  $\square$

Beachte dabei, dass  $(M, d)$  ein lokalkompakter, separabler, metrischer Raum ist. Nutzen wir die geodäsische Distanz in Verbindung mit Krümmung und Wärmeleitung.

**Satz 3.3.18** (Parabolische Harnack-Ungleichung, Li/Yau '86):

*Sei  $M$  eine kompakte  $d$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\text{Ric} \geq -K$ ,  $K \geq 0$ . Sei  $f$  eine nichtnegative Funktion und sei  $u(x, t) =: P_t f(x)$  eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswert  $f$  auf  $M \times [0, T]$ ,  $T > 0$ . Für alle  $0 < t < t+s \leq T$  und  $\alpha > 1$  gilt dann für  $x, y \in M$*

$$0 \leq u(x, t) \leq u(y, t+s) \left(\frac{t+s}{t}\right)^{d\alpha/2} \exp\left(\alpha \frac{d(x, y)^2}{4s} + \frac{d\alpha 4Ks}{4(\alpha-1)}\right). \quad (\text{PHI})$$

**Bemerkung:**

(PHI) ist ein Standard-Werkzeug, um im Falle  $\text{Ric} \geq 0$  die untere Abschätzung für den heat kernel  $P_t(x, y)$  zu bekommen: Mit  $u(x, t) := p_t(x, y)$  folgt

$$p_s(x, x) \leq p_{t+s}(x, y) \left(\frac{t+s}{s}\right)^{d/2} \exp\left(\frac{d(x, y)^2}{4t}\right) \quad (*)$$

für alle  $s, t > 0$ . Ein mögliches Resultat aus (\*) ist, dass

$$1 = \lim_{s \rightarrow 0} (4\pi s)^{d/2} p_s(x, x).$$

Zusätzliche metrische Argumente führen auf die natürliche Abschätzung von  $p_t(x, y)$  von oben und unten: Es existiert positive Konstanten  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , sodass für  $t > 0$  gilt

$$\frac{C_1}{B(x, \sqrt{t})} \exp\left(-\frac{C_2 d(x, y)^2}{4t}\right) \leq p_t(x, x) \leq \frac{C_3}{B(x, \sqrt{t})} \exp\left(-\frac{C_4 d(x, y)^2}{4t}\right) \quad (\text{HKE})$$

wobei  $B(x, r)$  der geodäsische Ball um  $x$  mit Radius  $r$  ist. Beachte, dass hier  $M$  kompakt und  $\text{Ric} \geq 0$  ist.

Für die obere Abschätzung in (HKE) ist  $\text{Ric} \geq 0$  nicht notwendig - man kann sie aus isoperimetrischen Ungleichungen und PDE-Argumenten bekommen.

*Beweis:*

Wir können  $u$  durch  $u + \varepsilon, \varepsilon > 0$  ersetzen und  $\varepsilon \rightarrow 0$  betrachten. Daher dürfen wir annehmen, dass  $u$  strikt positiv ist. Mit  $g := \log u$  folgt aus (LY):

$$\nabla g - \alpha \frac{\partial g}{\partial t} \leq \frac{d\alpha^2}{2t} + \frac{d\alpha^2 K}{\alpha - 1}. \quad (*)$$

Für  $x, y \in M$  fest sei  $\beta := \frac{\alpha d^2(x, y)}{4s^2} + \frac{d\alpha K}{\alpha - 1}$  und  $\varphi(\lambda) := u(\gamma(\lambda), \lambda) \lambda^{d\alpha/2} e^{\beta\lambda}, t \leq \lambda \leq t + s$ , wobei  $\gamma$  eine Kurve ist mit  $\gamma(t) = x, \gamma(t + s) = y$  und

$$\|\dot{\gamma}(\lambda)\| = \frac{d(x, y)}{s}, \quad (**)$$

d.h.  $\gamma(\lambda)$  bewegt sich auf einer geodätischen Kurve von  $x$  nach  $y$ . Dies kann stets arrangiert werden (vgl. [Jos11]). Dann hat man

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \log \varphi &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( g + \frac{d\alpha}{2} \log \lambda + \beta \lambda \right) = \langle \nabla g, \dot{\gamma}(\lambda) \rangle + \frac{\partial g}{\partial \lambda} + \frac{d\alpha}{2\lambda} + \beta \\ &\stackrel{(*)}{\geq} \langle \nabla g, \dot{\gamma}(\lambda) \rangle + \frac{d\alpha}{2\lambda} + \beta + \alpha^{-1} (\nabla g)^2 - \frac{d\alpha}{2\lambda} - \frac{d\alpha K}{\alpha - 1} \\ &\stackrel{CS}{\geq} -\|\nabla g\| \frac{d(x, y)}{s} + \frac{\alpha d(x, y)^2}{4s^2} + \alpha^{-1} (\nabla g)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Also ist  $\varphi$  wachsend entlang der Kurve und

$$u(x, t) t^{d\alpha/2} e^{\beta t} \leq u(y, t + s) (t + s)^{d\alpha/2} e^{\beta(t+s)}.$$

Umstellen liefert die Behauptung. □

## Literatur

- [Gri09] Alexander Grigoryan. *Heat kernel and analysis on manifolds*, volume 47 of *AMS/IP studies in advanced mathematics ; 47*. American Math. Soc. [u.a.], Providence, RI, 2009.
- [Jos11] Jürgen Jost. *Riemannian geometry and geometric analysis*. Universitext. Springer, Heidelberg [u.a.], 6. ed. edition, 2011.